Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Besonders problematisch ist der Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit, wenn der Ergebnisraum unendlich viele Ergebnisse enthält. Zwei historische Paradoxa, in denen geometrische Probleme mit unendlichen Ergebnisräumen behandelt werden, sind im Anhang II (Seite 388) dargestellt.

Aufgaben

Zu 8.1.

• 1. Zeige mit den *Kolmogorow*-Axiomen, daß $P: A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|}$, $A \subset \Omega$, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

2. Aus dem Wort »STOCHASTIK« werde auf gut Glück ein Buchstabe ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) das K gewählt wird, **b)** ein T gewählt wird,
c) ein Konsonant gewählt wird, **d)** S oder T gewählt wird?

3. Aus dem Wort »KLASSE« werden auf gut Glück zwei Buchstaben ausgewählt.
a) Auf wie viele Arten ist eine solche Auswahl möglich?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
1) ein A darunter ist, **2)** ein S darunter ist, **3)** zwei Konsonanten gewählt werden?

4. Eine natürliche Zahl n ($10 < n \leqq 20$) werde willkürlich gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) eine gerade Zahl gezogen wird,
b) eine Primzahl gezogen wird,
c) eine durch 4 teilbare Zahl gezogen wird,
d) eine durch 4 und 7 teilbare Zahl gezogen wird?

5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Quadrat einer beliebig aus $\{1, 2, \ldots, 100\}$ herausgegriffenen Zahl als Einerziffer **a)** 4, **b)** 5, **c)** 2 hat?

6. Eine Laplace-Münze mit den Seiten Wappen und Zahl wird zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$A :=$ »Es fällt genau einmal Wappen«
$B :=$ »Es fällt mindestens einmal Wappen«
$C :=$ »Es fällt höchstens einmal Wappen«

7. Eine Laplace-Münze mit den Seiten Wappen und Zahl wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$A :=$ »Es fällt genau zweimal Zahl«
$B :=$ »Es fällt mindestens zweimal Zahl«
$C :=$ »Es fällt höchstens zweimal Zahl«

8. In einem Spiel wird eine L-Münze dreimal geworfen. Erscheint zweimal nacheinander Zahl, so erhält der Spieler einen Preis. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

9. Zwei Laplace-Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Augensumme durch 3 (5 bzw. 6) teilbar ist.

10. *Leibniz* (1646–1716) dachte, es sei mit zwei Würfeln ebenso leicht, eine 11 wie eine 12 zu werfen. Entscheide, ob er recht hatte. (Vgl. Aufgabe 12/**1** und siehe Seite 76.)

•11. Spieler hatten entdeckt, daß beim Wurf mit 3 Würfeln die Augensumme 10 leichter zu erreichen ist als die Augensumme 9. *Galilei* (1564–1642) fand dafür die richtige Erklärung (siehe Seite 76). Zeige durch Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der beiden Augensummen, welch kleiner Unterschied durch die Spieler damals bemerkt worden war. (Vgl. auch Aufgabe 12/**2**.)

12. **a)** Welche Augensumme ist beim Wurf zweier Würfel am wahrscheinlichsten?

b) Theodor bietet folgende Wetten mit gleichen Einsätzen an:

1) Die Augensumme 6 fällt eher als die Augensumme 7.
2) Die Augensumme 8 fällt eher als die Augensumme 7.
3) Die Augensummen 6 und 8 fallen eher als zum zweiten Mal die Augensumme 7.
Welche Wette würdest du eingehen? Begründe deine Antwort!

13. Aus dem *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* von *Christiaan Huygens* (1629–1695):

a) »*Aufgabe XIV*: Wenn ich und ein anderer abwechselnd 2 Würfel werfen unter der Bedingung, daß ich gewinne, wenn ich die 7 werfe, er aber, wenn er 6 wirft, und ich ihm den ersten Wurf lasse, wie verhalten sich dann die Gewinnchancen?«*

Hinweis: *Jakob Bernoulli* (1655–1705) löste diese und die nächste Aufgabe mit Hilfe einer geometrischen Reihe.

b) »*Problem I*: A und B spielen mit zwei Würfeln unter der Bedingung, daß A gewinnt, wenn er sechs Augen wirft, B jedoch, wenn er sieben Augen wirft; A beginnt das Spiel mit einem Wurf, dann tut B zwei Würfe hintereinander, dann ebenso A zwei Würfe, und so fort, bis schließlich einer gewinnt. Wie verhält sich die Hoffnung von A zu der von B?«

14. Aus einem Bridge-Kartenspiel (52 Karten) wird eine Karte gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

$A :=$ »Die gezogene Karte ist eine Herzkarte«
$B :=$ »Die gezogene Karte ist ein König«
$C :=$ »Die gezogene Karte ist Herz-König«
$D :=$ »Die gezogene Karte ist eine Herzkarte oder ein König«
$E :=$ »Die gezogene Karte ist entweder eine Herzkarte oder ein König«
$F :=$ »Die gezogene Karte ist eine Herzkarte, aber kein König«
$G :=$ »Die gezogene Karte ist ein König, aber keine Herzkarte«
$H :=$ »Die gezogene Karte ist weder eine Herzkarte noch ein König«.

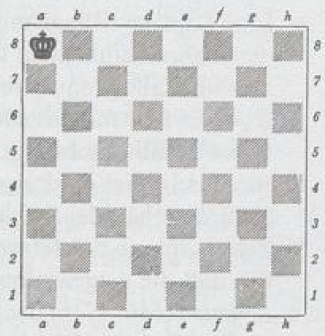
15. Zwei (drei) Jungen und drei Mädchen sind eingeladen. Sie treffen nacheinander ein. Jede Reihenfolge des Eintreffens ist gleichwahrscheinlich. Wie wahrscheinlich treffen

a) abwechselnd ein Junge und ein Mädchen ein,
b) die drei Mädchen direkt nacheinander ein?

16. In einem Benzolring seien zwei der sechs Kohlenstoffatome radioaktiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden nebeneinanderliegen?

17. Die Oberfläche eines Würfels wird rot eingefärbt. Dann werde der Würfel durch 6 ebene Schnitte in 27 kongruente Teilwürfel zerlegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein willkürlich herausgegriffener Teilwürfel

a) keine gefärbte Fläche hat,
b) genau 2 rote Flächen hat?



18. Auf dem leeren Schachbrett steht der schwarze König auf a 8 (c 3). Die weiße Dame werde auf gut Glück auf eines der restlichen 63 Felder gestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bietet sie Schach?

* *Huygens* schickt diese Aufgabe am 18.4.1656 an *Gilles Personne de Roberval* (1602–1675), um seine Lösung bestätigt zu bekommen. Als er nichts hörte, wendet er sich an *Mylon*. Mittlerweile hatte *Pierre de Carcavy* (um 1600–1684) diese Aufgabe an *Pierre de Fermat* (1601–1665) gesandt, der im Juni 1656 zugleich mit der Lösung *Carcavy* zwei weitere Probleme zuschickt. *Huygens* erhält sie von diesem im Brief vom 22.6.1656. Am 6.7.1656 schickt er die Lösung an *Carcavy*. Als Problem I und III nimmt er sie in seinen *Traktat* auf.

19. Zwei fehlerhafte Transistoren sind mit zwei guten zusammengepackt worden. Man prüft die Transistoren der Reihe nach, bis man weiß, welche die zwei fehlerhaften sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist man nach Prüfung des zweiten Transistors, mit welcher Wahrscheinlichkeit erst nach Prüfung des dritten Transistors fertig?

Zu 8.2

20. Von A nach B führen 7 Wege. Von B nach C führen 4 Wege.
a) Wie viele Wege führen von A nach C über B?
b) Von C nach D führen 9 Wege. Wie viele Wege führen von A nach D über B und C?

21. Wie viele drei-(vier)stellige Zahlen gibt es mit verschiedenen Ziffern, wenn
a) die Null nicht auftritt, **b)** auch die Null verwendet wird?

22. Wie viele verschiedene 5stellige Zahlen kann man aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 0, 1, 2, 3, 4 bilden, wenn
a) in jeder Zahl alle Ziffern verschieden sein sollen,
b) die Bedingung **a)** nicht erfüllt sein muß?

23. Gib alle Anagramme an, die durch Permutation der Buchstaben entstehen:
a) ABC **b)** ROMA*

24. Gib alle möglichen Anagramme der folgenden Wörter an:
a) AAS **b)** OTTO **c)** POPOP

25. Bilde alle Paare ohne (mit) Wiederholung aus **a)** ABC, **b)** ROMA.

26. *John Wallis* (1616–1703) bearbeitet in *A discourse of combinations, alternations, and aliquot parts*, einem Anhang seines *Treatise of Algebra***, zwei Aufgaben des *Gerhardus Johannes Vossius* (1557–1649) aus dessen *de Scientiis Mathematicis* von 1650:
a) Ein Wirt verspricht 7 Gästen, sie so viele Tage freizuhalten, wie sie in veränderter Ordnung Platz nehmen können. *Vossius* behauptet, der Wirt sei seiner Verpflichtung nach 14 Jahren ledig. Wie lautet die von *Wallis* korrekt angegebene Lösung?***
b) Die 24 Buchstaben des Alphabets [U = V, I = J] sollen permutiert werden. Wenn jemand pro Minute 5 solcher Permutationen hinschreiben könnte und mit dem Permutieren mit der Erschaffung der Welt begonnen hätte, so wäre das Unterfangen jetzt noch nicht beendet. *Wallis* fügt hinzu, daß das sogar noch gilt, wenn man jede Minute, die seit der Erschaffung der Welt verflossen ist, zu 10 Millionen Jahren rechnen würde.
α) *Wallis* rechnet das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen und nimmt für das Alter der Welt die damals üblichen 6000 Jahre. Beurteile die beiden Lösungen!
β) Zu welchem Ergebnis kommt man in beiden Fällen, wenn man für das Alter des Universums, wie heute üblich, 21 Milliarden Jahre annimmt?

27. Berechne:
a) $\binom{14}{2}$ **b)** $\binom{23}{4}$ **c)** $\binom{19}{16}$ **d)** $\binom{47}{6}$ **e)** $\binom{50}{35}$ **f)** $\binom{100}{10}$.

28. In einer Klasse wird ein Mathematik-Hausheft und ein Mathematik-Schulheft geführt. Heftumschläge gibt es in 7 verschiedenen Farben. Leider hat der Lehrer vergessen zu sagen, welche Farben für die Umschläge verwendet werden sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
a) Haus- und Schulheft immer verschiedenfarbig eingebunden sein sollen,
b) diese Einschränkung nicht gilt?

* *John Wallis* (1616–1703) behauptet 1685 in seinem Anhang zum *Treatise of Algebra*, 7 dieser Anagramme ergeben sinnvolle lateinische Wörter. Welche sind es?

** Siehe Fußnote * auf Seite 91.

*** Vermutlich geht die Aufgabe auf *Luca Pacioli* (um 1445–1517) zurück, der in seiner *Summa* (fol. 43v) folgende Aufgabe vorrechnet: Jemand lädt 10 Personen ein und will ihnen so viele verschiedene Gerichte vorsetzen, wie diese Personen in verschiedener Anordnung nebeneinandersitzen können. Wie viele Gerichte sind es? *Pacioli* zeigt dann noch die Lösung für 11 Personen und sagt, daß man das Verfahren fortsetzen könne.

29. Ein vorbildlicher Leistungskursschüler führt in Mathematik 6 Hefte, und zwar je ein Schul- und Hausheft für Stochastik, Analytische Geometrie und Infinitesimalrechnung. Er hat für die Heftumschläge 7 Farben zur Verfügung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
a) alle Hefte verschiedenfarbig eingebunden sein sollen,
b) keine Einschränkung gilt,
c) Schul- und Hausheft des gleichen Fachbereichs die gleiche Farbe tragen sollen, die Fachbereiche aber durch Farben unterschieden werden?

30. Auf wie viele Arten kann man 2 Buchstaben aus »COMPUTER« auswählen, wenn
a) keine Einschränkung besteht,
b) beide Buchstaben Konsonanten sein müssen,
c) beide Buchstaben Vokale sein müssen,
d) ein Buchstabe ein Vokal und der andere ein Konsonant sein muß?

31. Löse Aufgabe **30** für »MISSISSIPPI«, wenn man die Buchstaben I bzw. S bzw. P
a) nicht unterscheidet, **b)** unterscheidet.

32. Ein König beschließt in seinem Reich eine Gebietsreform. Dabei soll jede neu zu bildende Provinz eine Fahne erhalten. Zur Verfügung stehen die heraldischen Farben Rot, Blau, Schwarz, Grün, Gold, Silber und Purpur.
a) In wie viele Provinzen kann das Land höchstens eingeteilt werden, wenn die Fahne eine Trikolore sein soll und
1) keine weitere Bedingung gestellt wird,
2) der oberste Streifen der Trikolore golden sein muß,
3) einer der 3 Streifen der Trikolore golden sein muß?
b) Wie viele neue Provinzen können gebildet werden, wenn die Fahne zwar aus 3 Streifen bestehen, der untere und der obere Streifen aber gleichfarbig sein sollen?

33. 6 Jungen und 4 Mädchen sollen in 2 Mannschaften zu 5 Spielern aufgeteilt werden. Auf wie viele Arten geht das, wenn in jeder Mannschaft mindestens ein Mädchen mitspielen soll?

34. Eine Reisegruppe von 12 Personen verteilt sich auf 2 Abteile eines Eisenbahnwagens. In jedem Abteil gibt es 3 Sitzplätze in Fahrtrichtung und 3 entgegen der Fahrtrichtung. Von den 12 Personen wollen auf alle Fälle 5 in Fahrtrichtung und 4 gegen die Fahrtrichtung sitzen. Wie viele Plazierungsmöglichkeiten gibt es, wenn man die Sitze unterscheidet?

35. Bei einem Lochstreifen besteht eine Codegruppe aus 5 (8) Stellen, die gelocht werden können. Wie viele Zeichen lassen sich so codieren?

36. Bei einem Binärcode arbeitet man mit 2 Zeichen. Es sollen die 26 Buchstaben des Alphabets, die 10 Ziffern und 27 Sonderzeichen (z.B. », +, [, ?, ...) codiert werden (IBM-Lochkartencode). Wie groß muß k mindestens gewählt werden, damit alle Zeichen des oben angegebenen Zeichenvorrats durch gleich lange Binärwörter (k-Tupel aus einer 2-Menge) codiert werden können?

37. Auf Anregung *Leonhard Eulers* (1707–1783) veröffentlichte 1756 der Komponist *Johann Philipp Kirnberger* (1721–1783) eine Anleitung, wie man mit 2 Würfeln Menuette komponieren könne, wenn man für jeden der 16 Takte 11 musikalische Figuren zur Verfügung stellt. *Joseph Haydn* (1732–1809) und *Wolfgang Amadeus Mozart* (1756 bis 1791) ahmten dies nach. Wie viele Menuette lassen sich komponieren?

38. a) In München-Stadt waren 1981 folgende Kombinationen als Autokennzeichen zulässig*: Nach dem Ortskennzeichen M folgen 2 Buchstaben und dann eine der ganzen Zahlen aus [100; 4999]. Bei der Buchstabenkombination sind verboten B, F, G, I, O, Q. Nicht verwendet werden HJ, KP, KZ, NS, SA, SS, WC. CD und CC dürfen nur Haltern aus dem diplomatischen bzw. konsularischen Dienst zugeteilt werden.

* Die Ausgabe von Nummernschildern begann weltweit 1899 in München mit einer schwarzen Eins auf gelbem Grund (Farben der Stadt München) 10,3 × 7,3 cm.

α) Wie viele Kennzeichen können damit an normale Staatsbürger ausgegeben werden?

β) Wie viele Kennzeichen sind möglich, wenn der Zahlenvorrat $[100; 9999]$ ausgeschöpft wird?

b) Für den Landkreis München galt: Nach dem M steht entweder 1 Buchstabe und eine 3- oder 4stellige Zahl oder 2 Buchstaben und eine ganze Zahl aus $[1; 99]$. Nicht zulässig sind die in **a)** aufgeführten Ausnahmen. Löse **α)** für den Landkreis.

c) Warum sind die obigen Kombinationen nicht gestattet?

39. Beweise das **Symmetriegesetz:**

$$\boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.}$$

40. Beweise die **Additionsformel:**

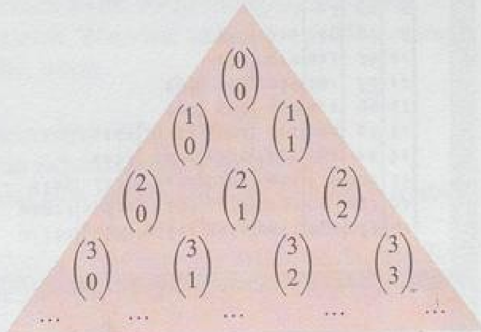
$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.}$$

41. Zeige: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Hinweis: Überlege, wie oft der Summand $a^k b^{n-k}$ bei der Multiplikation entsteht.

42. Beweise:

a)* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ **b)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ **c)** $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

43. Die Binomialkoeffizienten lassen sich auf einfache Weise in einem Dreieck anordnen. Es heißt ***Pascal-Stifel*sches Dreieck** oder auch **Arithmetisches Dreieck****. Unter Verwendung der Formel aus Aufgabe **40** lassen sich die Binomialkoeffizienten der $(n+1)$-ten Zeile aus denen der n-ten Zeile berechnen. Berechne das *Pascal-Stifel*sche Dreieck bis zur 7. Zeile.



44. Von n Elementen seien jeweils n_i ununterscheidbar, d.h., $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

a) Zeige: Die Anzahl aller unterscheidbaren Permutationen ist $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

b) Wende die 1635 von *Marin Mersenne* (1588–1648) gefundene Formel auf Aufgabe 113/**24** an und berechne die entsprechenden Anzahlen.

* *Michael Stifel* (1487?–1567) zitiert diese Formel 1544 in *Arithmetica integra* (folium 101r) als *Eine gewisse Regel des Hieronymus Cardanus. Geronimo Cardano* (1501–1576) bringt sie als 170. Satz seines *Opus novum de proportionibus* erst 1570, bemerkt aber: »*Ich habe sie schon anderwärts gelehrt;* [...] *kann aber die Stelle nicht finden.*«

** Die oben angegebene Anordnung stimmt weder mit der von *Michael Stifel* in seiner *Arithmetica integra* (1544) noch mit der *Pascals* in dessen *Traité du triangle arithmétique* (1654) überein. Die früheste erhaltene Darstellung dieser Anordnung findet sich in *Yang Huis Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher* aus dem Jahre 1261, die aber auf *Qia Xsian* [sprich: Tschia Hsien] (um 1100) zurückgeht. Dieselbe Anordnung der Binomialkoeffizienten ist im *Kostbaren Spiegel der vier Elemente* des *Zhu Shi-Jie* [sprich: Tschuh-dschieh] aus dem Jahre 1303 enthalten. Die erste gedruckte Darstellung in Europa schmückt das Titelblatt des *Neuen Rechenbuchs* von 1527 des *Peter Apian* (1495–1552). *Niccolò Tartaglia* (1499–1557) bringt ebenfalls diese Darstellung in seinem *General Trattato di numeri et misure* (1556). – Bekannt war das Arithmetische Dreieck bereits den Arabern des 11. Jh.s und den Indern des 2. vorchristlichen Jh.s – Vgl. Bild 116.1 und die Abbildung auf Seite 228.

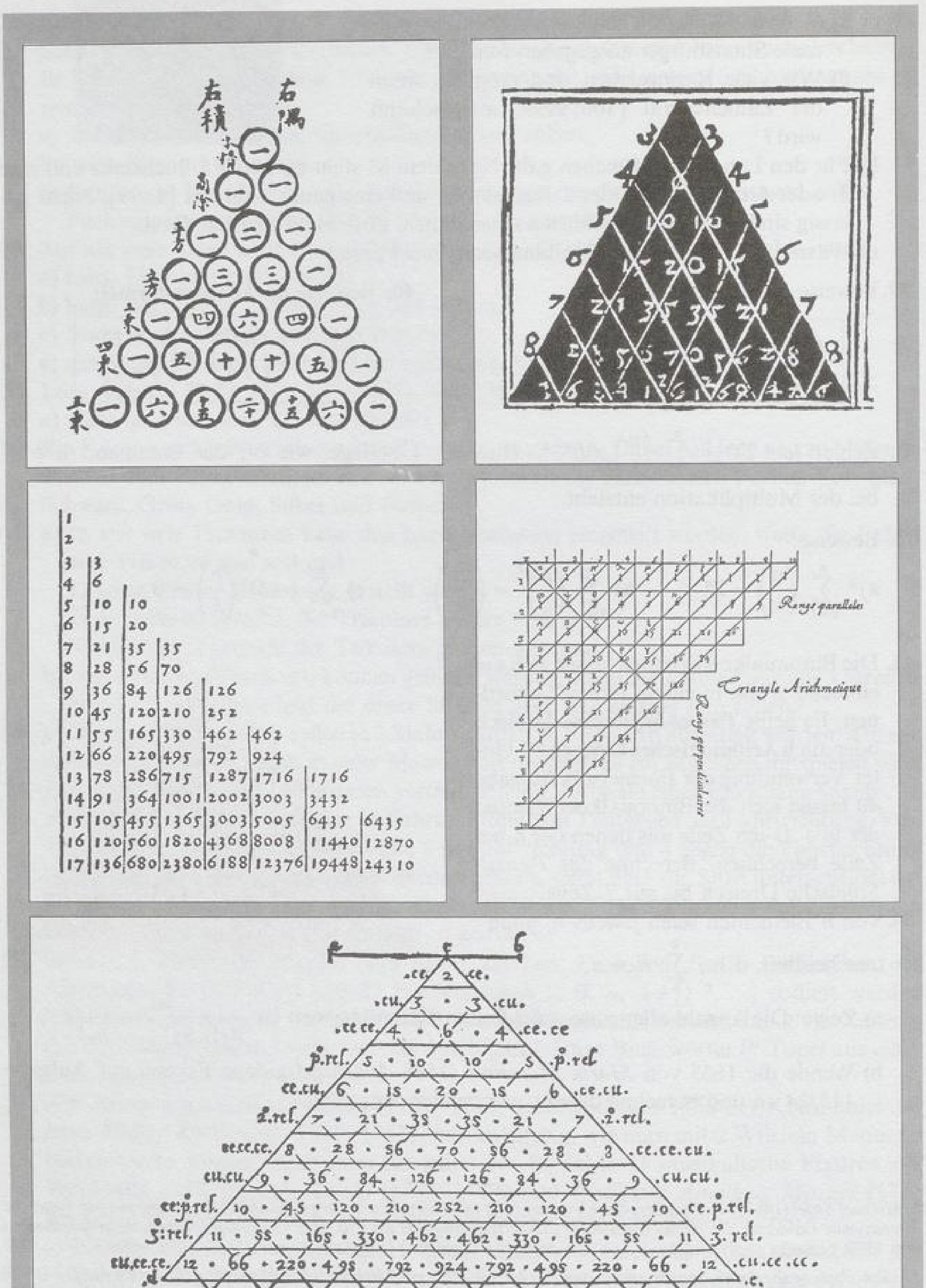


Bild 116.1 Das Arithmetische Dreieck des *Yang Hui* (1261) und des *Peter Apian* (1527) [1. Reihe], des *Michael Stifel* (1544), des *Blaise Pascal* (1654) [2. Reihe], des *Niccolò Tartaglia* (1556).

45. Wie viele Wörterbücher (der Art: Sprache A → Sprache B) benötigt ein Übersetzungsinstitut für die direkte Übersetzung aus jeder von 6 Sprachen in jede dieser 6 Sprachen? Wie viele zusätzliche Wörterbücher müssen angeschafft werden, wenn 3 weitere Sprachen dazukommen?

46. Ein Ausschuß von 10 Parlamentariern soll aus 2 Parteien zusammengesetzt werden. Die FSU hat 8 Fachleute, die CSP hat 6 Fachleute anzubieten. Auf Grund der Mehrheitsverhältnisse kann die FSU 7 und die CSP 3 Sitze im Ausschuß beanspruchen. Wie viele verschiedene Zusammensetzungen des Ausschusses sind möglich, wenn
a) keine weitere Bedingung gemacht wird,
b) ein bestimmtes Mitglied der CSP auf alle Fälle im Ausschuß sitzen soll,
c) 2 bestimmte Kandidaten der CSP von der FSU grundsätzlich abgelehnt werden?

47. Aus einer Gruppe von 4 Frauen und 4 Männern wollen 4 Personen Tennis spielen.
a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn
1) keinerlei Einschränkungen bestehen, **2)** keine Frau mitspielen soll,
3) genau eine Frau mitspielen soll, **4)** genau 2 Frauen mitspielen sollen,
5) genau 3 Frauen mitspielen sollen, **6)** alle 4 Frauen mitspielen sollen?
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Ergebnis von **1)** und den Ergebnissen von **2)**–**6)**?

•**48.** Ein Bridgespiel besteht aus 52 Karten, von denen vier Asse sind. Man entnimmt 13 Karten. In wieviel Fällen enthalten diese 13 Karten
a) kein As, **b)** genau ein As, **c)** mindestens ein As,
d) höchstens ein As, **e)** genau 2 Asse, **f)** alle 4 Asse?

•**49.** An einem runden Tisch nehmen 6 bzw. 7 Personen Platz. Anordnungen, bei denen jeder die gleichen Nachbarn hat, betrachten wir als gleich. Wie viele verschiedene Plazierungen der Personen gibt es in jedem der beiden Fälle, wenn
a) keine weitere Bedingung gestellt wird,
b) 2 bestimmte Personen auf alle Fälle nebeneinandersitzen wollen,
c) 3 bestimmte Personen auf alle Fälle beliebig nebeneinandersitzen wollen,
d) eine bestimmte Person auf alle Fälle jedesmal zwei bestimmte Personen als Nachbarn haben will?

•**50.** **a)** 5 gleiche Äpfel sollen auf 3 Kinder verteilt werden. Auf wie viele Arten ist das möglich?
b) k Kugeln sollen auf n Urnen verteilt werden. Auf wie viele Arten ist das möglich, wenn man die Kugeln nicht unterscheidet?

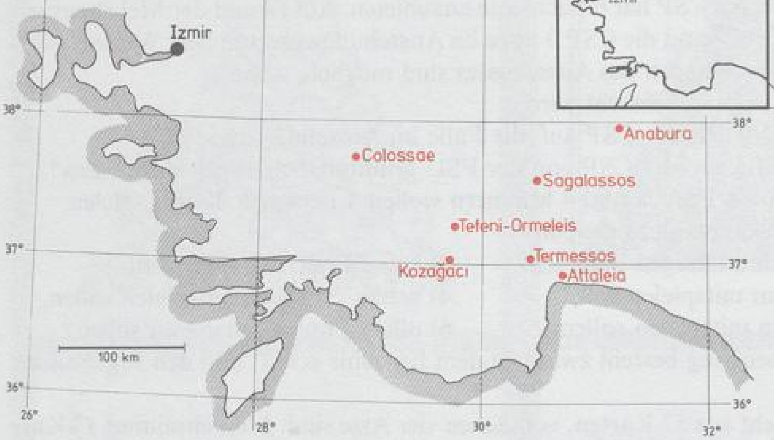
51. *Pausanias* (110–180) berichtet in seiner *Beschreibung Griechenlands* (VII, 25, 10) von einem Astragalorakel*:

»Geht man von Bura [in Achaia] zum Meer hinab, so ist da [...] ein nicht großer Herakles in einer Höhle. [...] Man kann dort mit einer Tafel und Astragali Orakelsprüche erhalten. Wer den Gott befragen will, betet vor der Statue und nimmt dann 4 von den reichlich vor dem Herakles liegenden Astragali und läßt sie auf einen Tisch fallen. Zu jeder Konfiguration dieser 4 Astragali ist auf einer Tafel ein passender Wortlaut als Erklärung angegeben.«

a) Wie viele Orakelsprüche mußten von den Priestern erstellt werden, wenn zu jedem Ergebnis eine andere Prophezeiung gehörte?
b) Aus dem 2. Jh. n. Chr. sind Orakel für 5 Astragali erhalten, die bis auf das in Bulgarien gefundene alle aus der heutigen südlichen Türkei stammen (siehe Figur 118.1). Als Beispiel seien die Sprüche 50 und 52 der dort üblichen Orakelliste wiedergegeben:

* Der Unsinn dieser Astragalorakel – vergleichbar mit den Horoskopen unserer Regenbogenpresse – erlebte im 2. Jh. n. Chr. in den alten Orakelheiligtümern, die teilweise aus dem 6. Jh. v. Chr. stammten, eine Renaissance und verbreitete sich über das südliche Kleinasien. Von den alten hölzernen Weissagetafeln, die pinax oder grammateia hießen, blieb nichts erhalten. Glücklicherweise wurden die neueren in Stein gehauen.

Fig. 118.1 Fundstätten von Astragalorakeln in Kleinasien. Anscheinend gab es im 2. Jh. n. Chr. in jeder Stadt des südlichen Kleinasiens ein Astragalorakel. An 16 Plätzen konnte man es bis jetzt nachweisen.



44466 24 Kronos, der Kinderfresser
Drei Vierer, zwei Sechser. Das ist der Rat der Gottheit:
Bleib zu Haus und geh nicht irgendwohin,
Damit nicht die reißende Bestie und die rächende Furie über Dich kommen;
Denn ich sehe, daß das Vorhaben weder gefahrlos noch sicher ist.

66661 25 Der lichtspendende Mondgott
Vier Sechser, und der fünfte Wurf eine Eins. Das bedeutet:
Wie Wölfe über Lämmer herfallen und mächtige Löwen
Gehörnte Ochsen bezwingen, so wirst Du alles überwinden.
Mit Hilfe des Hermes, des Zeussohnes, werden Deine Wünsche erfüllt.

Wie viele Prophezeiungen enthielt diese Orakelliste?

c) Astragalorakel gab es nicht nur in Heiligtümern sondern auch auf öffentlichen Plätzen. Hier mußte jeder seine eigenen Astragali verwenden. In Termessos (Pisidien) schmückte eine Orakelliste für 7 Astragali die Mauer des Stadttores. Wie viele Prophezeiungen enthielt sie?

d) Die unter **b)** angeführten Sprüche könnten uns auf die falsche Idee bringen, daß es auf die Reihenfolge der Wurfergebnisse angekommen sei. Wie viele Prophezeiungen hätte man dann im Fall von 4, 5 bzw. 7 Astragali erstellen müssen?

•**e)** Neben der Astragalomanteia ist auch die Kybomanteia mittels 6seitiger Würfel bezeugt. Wie viele Orakelsprüche hat man bei 4, 5 bzw. 7 Würfeln benötigt? Wie viele wären es bei Berücksichtigung der Reihenfolge?*

52. Für Christen war das Würfelspiel eine Erfindung des Teufels. Bischof *Wibold* von Cambrai (971–972) stellte es jedoch in den Dienst der Kirche: Jeder Kombination, die man mit 3 Würfeln erzielen kann, ordnet er eine christliche Tugend zu. Der Sieger soll den Verlierer bis zum 6. Tag ermahnen, die nicht erwürfelten Tugenden durch gutes Verhalten zu erwerben. Wie viele Tugenden gab es für Bischof *Wibold*?

* *Niccolò Tartaglia* (1499–1557) gibt 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* (II, fol. 17ʳ) ein Verfahren an, wie man, ausgehend von einem Würfel, alle möglichen Kombinationen für beliebig viele Würfel finden kann. Er behauptet, dies in der Nacht vom Faschingsdienstag auf den Aschermittwoch des Jahres 1523 gefunden zu haben. Die Ergebnisse bei 4, 5 und 6 Würfeln erarbeitete 1559 auch *Jean Buteo* (1492–1572) in seiner *Logistica* (ed. 1560).

Zu 8.3.

53. **a)** Zwei Karten eines Bridgespiels werden gleichzeitig gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
$A :=$ »Beide Karten sind Herzkarten«
$B :=$ »Beide Karten sind Damen«
$C :=$ »Herzdame, Herzkönig«

b) Ein Spieler erhält 13 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie alle von derselben Farbe sind?

c) Aus dem *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (1657) von *Christiaan Huygens**:

»*Problem III*: A wettet mit B, daß er aus 40 Spielkarten, von denen je 10 von derselben Farbe sind, vier Karten verschiedener Farbe herausziehen wird.«

Wie müssen sich die Einsätze verhalten, damit die Wette fair ist?

54. Eine Laplace-Münze wird 10mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim k-ten Wurf zum ersten Mal Wappen erscheint,
a) für $k = 1, 2, \ldots, 10$, **b)** allgemein.

55. Ein Prüfer gibt eine Liste von 8 Fragen heraus. Bei der Prüfung wird er dem jeweiligen Kandidaten 2 davon vorlegen. Dieser muß eine davon bearbeiten.
a) Meier bereitet sich auf eine der 8 Fragen vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er seine Frage gestellt bekommt?
b) Huber bereitet sich auf 6 der 8 Fragen vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er mindestens eine vorbereitete Frage vorgelegt bekommt?
c) Wie viele Fragen muß Schmid wenigstens vorbereiten, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer als 50% ist, auf mindestens eine vorbereitete Frage stößt?

56. In einer Reisegesellschaft von 5 Personen sind 2 Schmuggler, darunter Herr Meier. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Zollbeamter, der auf gut Glück 3 Personen kontrolliert,
a) mindestens einen Schmuggler, **b)** Herrn Meier, **c)** beide Schmuggler ertappt?

57. In einer Familie sind 2 Söhne und 3 Töchter. Jeden Tag wird ausgelost, wer abspülen muß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) es den ältesten Sohn an zwei aufeinanderfolgenden Tagen trifft,
b) es irgendein Kind an zwei aufeinanderfolgenden Tagen trifft,
c) an zwei aufeinanderfolgenden Tagen Söhne abspülen müssen?

58. Drei L-Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
$A :=$ »Keine Sechs« $B :=$ »Genau 1 Sechs«
$C :=$ »Genau zweimal sechs« $D :=$ »Alle drei Würfel zeigen sechs«

59. Aus sechs Ehepaaren werden zwei Personen ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um
a) zwei Damen, **b)** zwei Herren,
c) eine Dame und einen Herrn, **d)** ein Ehepaar?

60. Drei Mädchen und drei Jungen setzen sich auf gut Glück nebeneinander auf eine Bank. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) die drei Mädchen nebeneinandersitzen,
b) links außen ein Mädchen sitzt,
c) eine bunte Reihe entsteht.

* *Pierre de Fermat* (1601–1665) stellte *Christiaan Huygens* (1629–1695) diese Aufgabe über seinen Mittelsmann *Pierre de Carcavy* (um 1600–1684) im Brief vom Juni 1656. *Huygens* schickte die Lösung an *Carcavy* am 6.7.1656. Siehe hierzu auch die Fußnote auf Seite 112.

61. Neben der alten Genueser Zahlenlotterie »5 aus 90« gibt es aber auch noch andere Zahlenlotterien:

Land	Lottotyp	Land	Lottotyp
Bundesrepublik	6 aus 49, 6 aus 45	Kanada	6 aus 49, 6 aus 36,
	7 aus 38 (s. S. 39)		4 aus 10
DDR (s. S. 39)	6 aus 49, 5 aus 90,	Österreich	6 aus 45
	5 aus 45, 5 aus 35	Polen	6 aus 49, 5 aus 35
Finnland	6 aus 60	Rumänien	6 aus 45, 5 aus 45
Italien	5 aus 90	Schweiz, Belgien	6 aus 40
Jugoslawien	5 aus 36	Tschechoslowakei	6 aus 49, 5 aus 35
Niederlande	6 aus 41	UdSSR, Frankreich	6 aus 49
		Ungarn	5 aus 90

a) Berechne für jeden Lottotyp die Wahrscheinlichkeit für einen Haupttreffer. In welchem Verhältnis stehen diese Wahrscheinlichkeiten zur Wahrscheinlichkeit für einen Haupttreffer bei »6 aus 49«?

b) Berechne für jeden Lottotyp die Wahrscheinlichkeit für »Genau 4 Richtige«. In welchem Verhältnis stehen diese Wahrscheinlichkeiten zur Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis bei »6 aus 49«?

c) Löse Aufgabe **b)** für das Ereignis »Genau 2 Richtige weniger als die maximal möglichen Richtigen«.

62. Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Gewinnklasse II »5 Richtige mit Zusatzzahl« und die Gewinnklasse III »5 Richtige« beim Lotto »6 aus 49«.

63. Beim Poker* erhält jeder Spieler eine »Hand« von 5 Karten aus den 52 französischen Karten des Bridgespiels. Fünf gleichfarbige Karten in ununterbrochener Reihenfolge bilden eine »Farbfolge« (= straight flush). Dabei darf das *As* nur am Anfang einer Farbfolge als *Eins* oder nur am Ende nach dem *König* stehen. Vier gleichwertige Karten bilden einen »Viererpasch« (= four of a kind).

a) Wie viele Viererpasche und wie viele Farbfolgen gibt es?

b) Warum gilt trotz des Ergebnisses in **a)** beim Poker eine Farbfolge mehr als ein Viererpasch? Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein Spieler eine Farbfolge bzw. einen Viererpasch als »Hand« erhält, und begründe damit die Regel.

64. **a)** Berechne in der Situation von Beispiel 4 (Seite 100) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der erste schwarze König an k-ter Stelle erscheint.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der zweite schwarze König an i-ter Stelle erscheint?

65. Das Problem von *de Méré*. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

a) bei 4 Würfen mindestens eine 6 auftritt,

b) bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs auftritt.

Gib dazu jeweils einen geeigneten Ergebnisraum an.

66. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim Skatspiel (32 Karten) 2 Buben im Skat (= 2 weggelegte Karten) liegen**.

* Poker ist ein internationales Kartenglücksspiel amerikanischer Herkunft, das in der Öffentlichkeit verboten ist. 4–8 Personen können am Spiel teilnehmen. Die nicht verteilten Karten werden verdeckt als Talon aufgelegt.

** Das Skatspiel entstand ab 1815 in der Kartendruckerstadt Altenburg (Thüringen) aus dem Tarockspiel, das seit dem letzten Viertel des 14. Jahrhunderts belegt ist. Sein Name hängt mit dem italienischen Wort scarto = Ausschuß, Weggelegtes zusammen. Das Skatspiel besteht aus 32 Blatt. Jeder der 3 Spieler erhält 10 Karten, die restlichen 2 Karten werden weggelegt und bilden den Skat. Das Skatspiel kann mit französischen oder deutschen Karten gespielt werden. Dabei entsprechen den französischen Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo die deutschen Farben Eichel, Blatt (auch Grün), Herz (auch Rot) und Schelle. (In der Schweiz ist das Blatt durch eine Rose und das Herz durch ein Wappen ersetzt.) Höchste Trümpfe sind die Buben (im deutschen Spiel die Unter) in der angegebenen absteigenden Farbenreihenfolge. Die Dame wird im deutschen Spiel durch den Ober ersetzt.

•67. Ein Skatspieler hat nach Aufnahme des Skats 8 von 11 Trümpfen in der Hand. Der dritthöchste Trumpf jedoch fehlt ihm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einer der beiden Gegenspieler alle 3 restlichen Trümpfe in der Hand hat und daher die Möglichkeit hat, einen Trumpfstich zu machen?

•68. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei 10 (20; n) Würfen mit einem L-Würfel mindestens eine 1 und mindestens eine 6 auftritt.

69. Wie wahrscheinlich ist es, daß die Geburtstage von 12 Personen in 12 verschiedenen Monaten liegen? (Man nehme gleiche Wahrscheinlichkeit für jeden Monat an!)

70. 5 Mädchen und 5 Jungen setzen sich auf gut Glück um einen runden Tisch. Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine bunte Reihe.

•71. Herr Huber parkt täglich vor seinem Haus im Parkverbot. Er hat deswegen schon 9 Strafmandate erhalten. Er stellt fest, daß keines davon an einem Montag, Dienstag, Mittwoch oder Samstag ausgefertigt wurde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine solche Feststellung getroffen werden kann, wenn man annimmt, daß die Wahrscheinlichkeit für die Ausfertigung eines Strafmandats für jeden Tag der Woche gleich groß ist?

72. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim
a) Toto (unter der Voraussetzung von Beispiel 3, Seite 99)
b) Lotto (6 aus 49)
keinen einzigen Treffer zu haben?

•73. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter n Personen mindestens eine ist, die mit mir am gleichen Tag Geburtstag hat?
Ab welchem n lohnt es sich, darauf zu wetten?

74. Ein Laplace-Floh springt auf der Zahlengeraden in Einheitssprüngen mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links und rechts. Er beginnt bei 0. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er nach 6 Sprüngen bei **a)** 6 **b)** -2 **c)** 0 **d)** 5?

75. In einer Schublade befinden sich 4 schwarze, 6 braune und 2 graue Socken. 2 (4) Socken werden im Dunkeln herausgenommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man 2 gleichfarbige Socken?

76. **a)** Frau Meier hat 10 verschiedene Handschuhpaare in einer Schublade. Sie will ausgehen und nimmt 2 (4) Handschuhe auf gut Glück heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie
1) kein passendes Paar herausgreift,
2) mindestens ein passendes Paar herausgreift?
b) Löse **a)** allgemein für den Fall, daß Frau Meier aus n verschiedenen Handschuhpaaren $2m$ Handschuhe herausgreift.

77. Ist es günstig, darauf zu wetten, daß beim n-maligen Werfen eines Laplace-Würfels lauter verschiedene Augenzahlen erscheinen? ($n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$)

•78. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei 10maligem Wurf mit einem Laplace-Würfel jede Augenzahl mindestens einmal auftritt.

79. 10 Sportler treten zu einer Veranstaltung an. Die Startnummern 1 bis 10 werden durch Los vergeben.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens einer der Sportler den Platz in der Siegerliste erreicht, den seine Startnummer angibt?
b) Wie viele Sportler müssen antreten, damit es günstig ist, darauf zu wetten, daß mindestens einer den Rang erreicht, den seine Startnummer angibt?

•80. **a)** Berechne beim *Bernoulli-Euler*schen Problem der vertauschten Briefe die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau k Briefe im richtigen Umschlag stecken.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von den 10 Sportlern der Aufgabe **79**
1) genau die Hälfte, **2)** mehr als die Hälfte
den Platz in der Siegerliste erreichen, den ihre Startnummer angibt?

•**81.** 1980 hatten sich 8 Mannschaften für das Viertelfinale des UEFA-Pokals* qualifiziert; 5 davon waren deutsche. Bei der Auslosung ergab sich der für die deutschen Mannschaften günstigste Fall, daß nur eine einzige Paarung zustande kam, bei der ein deutscher Verein gegen einen deutschen Verein spielen mußte.

a) Welche Wahrscheinlichkeit hat dieses Ereignis?

••**b)** Verallgemeinerung des Problems: 2^n Mannschaften stehen im 2^{n-1}tel-Finale; darunter befinden sich k $(0 < k \leqq 2^n)$ deutsche Mannschaften. Der für Deutschland günstigste Fall ist derjenige, bei dem möglichst selten deutsche Mannschaften gegeneinander antreten müssen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür.

82. n verschiedene Teilchen werden willkürlich auf z Zellen verteilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer Anordnung, bei der in der i-ten Zelle n_i Teilchen sind $(i = 1, \ldots, z)$? (*Maxwell-Boltzmann*-Statistik)

b) Berechne diese Wahrscheinlichkeit bei 5 Zellen und 4 Teilchen für alle wesentlich verschiedenen Anordnungen. Wie viele Anordnungen gibt es zu jedem Typ?

c) Löse **b)** für 4 Zellen und 5 Teilchen.

d) Stelle für $n = 2$ und $z = 3$ die Verhältnisse auch graphisch dar.

83. n ununterscheidbare Teilchen werden willkürlich auf z Zellen verteilt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Anordnung, wenn jede unterscheidbare Anordnung gleiche Wahrscheinlichkeit hat? (*Bose-Einstein*-Statistik, 1924)

b) Löse **82. b)** in diesem Fall. **c)** Löse **82. c)** in diesem Fall. **d)** Löse **82. d)**

84. n ununterscheidbare Teilchen sollen auf z Zellen verteilt werden $(n \leqq z)$, wobei sich in einer Zelle höchstens ein Teilchen befinden darf.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Anordnung, wenn jede unterscheidbare Anordnung gleiche Wahrscheinlichkeit hat? (*Fermi-Dirac*-Statistik, 1926)

b) Löse **82. b)**, **82. c)** und **82. d)** für diesen Fall.

Zu 8.4.

85. Eine Urne enthält 11 weiße und 15 schwarze Kugeln. Wie wahrscheinlich ist es, daß sich unter 10 willkürlich herausgegriffenen Kugeln genau 5 weiße befinden?

86. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmter Spieler beim Skatspiel

a) genau 3 Buben,

b) 3 bestimmte Buben und den vierten nicht,

c) mindestens 3 Buben erhält?

87. Ein Prüfer testet 100 Geräte, unter denen sich 10 defekte befinden. Er wählt willkürlich 10 aus und akzeptiert die Lieferung nur dann, wenn die Probe kein defektes Gerät enthält. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Lieferung angenommen?

88. Eine Firma stellt fest, daß bei einer bestimmten Lieferung von Dosen eines Fertiggerichts versehentlich Giftstoffe in die Dosen gelangten. Sie sperrt sofort den Verkauf dieser Dosen. Ein Kaufmann hat von n Dosen, unter denen sich k aus der betreffenden Lieferung befinden, m Dosen $(m \leqq n - k)$ verkauft.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß keine der vergifteten Dosen verkauft wurde
1) allgemein, **2)** für $n = 20$; $m = 10$; $k = 6$.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Fall **a)2)**
1) mindestens 1 vergiftete Dose, **2)** genau 1 vergiftete Dose,
3) weniger als 4 vergiftete Dosen, **4)** alle 6 vergifteten Dosen verkauft wurden?

* Union Européenne de Football Association, 1954 gegründete internationale Vereinigung der Fußballverbände.

89. $2n$ ($4n$) Spieler werden bei einem Turnier in 2 (4) Gruppen zu je n Spielern eingeteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden stärksten Spieler in derselben Gruppe spielen müssen? Berechne diese Wahrscheinlichkeit für $n = 4$ und $n = 8$.

90. In einer Urne befinden sich 11 weiße und 15 schwarze Kugeln. Man darf 11mal je 1 Kugel mit bzw. ohne Zurücklegen ziehen. Welches Ziehungsverfahren ist günstiger, falls man einen Preis erhält, wenn sich unter den gezogenen Kugeln
a) genau 5 weiße Kugeln, **b)** genau 6 schwarze Kugeln, **c)** keine weiße Kugel,
d) mindestens 3 weiße Kugeln, **e)** höchstens 3 weiße Kugeln befinden?

91. Eine Familie hat 5 Kinder. Die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen sei 0,5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
a) es 2 Mädchen und 3 Jungen sind, **b)** es 5 Mädchen sind,
c) das mittlere Kind ein Junge ist?
d) Welche Werte erhält man, wenn man für eine Knabengeburt die realistische Wahrscheinlichkeit 0,514 verwendet?

92. Beim Würfelspiel »Einsame Filzlaus« gewinnt derjenige, der zuerst eine 1 (= »einsame Filzlaus«) würfelt. Wer nach 10 Würfen noch keine 1 hat, muß eine Strafe zahlen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel Strafe zahlen zu müssen?
b) Wie wahrscheinlich ist es, bei den ersten 3 Würfen mindestens eine 1 zu werfen?
c) Ab welcher Wurfzahl ist es günstig, darauf zu wetten, daß mindestens einmal eine 1 erscheint?

93. Eine Firma stellt Bolzen mit 20% Ausschuß her. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter 20 (200) herausgegriffenen Bolzen sich
a) kein Ausschußstück befindet, **b)** genau 4 (40) Ausschußstücke befinden?

94. Zu Olims Zeiten* wurde einem Gefangenen die Chance gegeben freizukommen. Er hatte zwei Möglichkeiten:
a) Er greift aus einer Urne, die 4 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält, eine Kugel heraus. Ist sie weiß, so kommt er frei.
b) Vor ihm stehen 2 Urnen. Die erste enthält gleich viel schwarze und weiße Kugeln. Die zweite ist die Urne aus **a)**. Er zieht aus beiden Urnen je eine Kugel und kommt frei, wenn die Farben gleich sind.
Welcher Fall ist für ihn günstiger?

95. Die Polizei führt in einer Spielhölle eine Razzia durch. Sie testet die verwendeten Würfel nach folgendem Schema: Jeder Würfel wird 12mal geworfen; er wird für gut befunden, wenn 1-, 2- oder 3mal die 6 erscheint. Die Polizei stellt fest, daß 24% der Würfel nach diesem Verfahren als schlecht anzusehen sind. Kann der Vorwurf des Betrugs aufrechterhalten werden?

96. Bei einem bestimmten Verfahren, Transistoren herzustellen, ergibt sich erfahrungsgemäß ein Ausschußanteil von 50%. Ein neues Verfahren soll angeblich besser sein. Eine erste Probe zeigt, daß von 10 nach dem neuen Verfahren hergestellten Transistoren 3 defekt waren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß 3 oder weniger defekt sind, wenn das erste Verfahren angewendet wird? Das zweite Verfahren wird für besser gehalten, wenn diese Wahrscheinlichkeit unter 10% liegt. Kann man das zweite Verfahren demnach schon als besser bezeichnen?

97. Eine Urne enthält 5 grüne und 4 rote Kugeln. Man zieht 4 Kugeln
a) ohne Zurücklegen, **b)** mit Zurücklegen
und erhält dabei die Farbfolge: ggrg. Wie wahrscheinlich ist diese Farbfolge in jedem der beiden Fälle?

* Scherzhafte Redeweise für »vor undenklichen Zeiten«, entstanden aus *olim* (lat.) = *einst*.

98. Eine Urne enthält 8 blaue und 2 gelbe Kugeln. Man löse die folgenden Aufgaben sowohl für Ziehen ohne Zurücklegen wie auch für Ziehen mit Zurücklegen.

a) A, B und C ziehen in dieser Reihenfolge je eine Kugel aus der Urne. Wer eine gelbe Kugel zieht, erhält einen Preis. Wie groß sind die Chancen von A, B und C, einen Preis zu erhalten?

b) Wie groß sind die Gewinnchancen von A, B und C, wenn das Spiel nach dem 1. Ziehen einer gelben Kugel, spätestens nach dem Zug von C zu Ende ist?

c) Wie groß sind die Gewinnchancen für A, B und C, wenn in dieser Reihenfolge so lange gezogen wird, bis ein Spieler die erste gelbe Kugel zieht?

99. *Christiaan Huygens* (1629–1695) stellte am Ende seines *Tractatus de ratiociniis in ludo aleae* (1657) seinen Lesern 5 Probleme, deren zweites lautet:

»Drei Spieler A, B und C nehmen 12 Steine, von denen 4 weiß und 8 schwarz sind, und spielen unter der Bedingung, daß derjenige Sieger sei, der als erster mit verbundenen Augen einen weißen Stein ergreift; dabei solle zuerst A, dann B und schließlich C ziehen, dann wieder A und so fort. Gefragt wird, in welchem Verhältnis ihre Chancen zueinander stehen.«

Jan Hudde (1628–1704) schickte *Huygens* im Frühjahr 1665 seine Lösung. Daraufhin machte sich *Huygens* selbst an die Lösung der Aufgabe und kommt zu einem anderen Ergebnis. Überzeugt, richtig gerechnet zu haben, schickte er seine Werte am 4.4.1665 an *Hudde*. Gleich am nächsten Tag fand *Hudde* den Grund für die Diskrepanz: Die Aufgabe war nicht vollständig formuliert!

a) *Huygens* hatte bei seiner (im Manuskript erhaltenen) Lösung so gerechnet, als würde mit Zurücklegen gezogen. Welche Werte erhielt *Huygens*?

b) *Hudde* hatte die Aufgabe so verstanden, als würde ohne Zurücklegen gezogen. Zu welchen Werten gelangte er?

c) *Jakob Bernoulli* (1655–1705) fügt sowohl in seinem Tagebuch, den *Meditationes*, wie auch in seiner *Ars Conjectandi* diesen beiden Interpretationen eine dritte hinzu: Jeder der 3 Spieler nimmt sich zu Beginn 12 Steine und zieht dann jeweils von den seinigen in der angegebenen Reihenfolge, ohne die gezogenen Steine wieder in die Urne zurückzulegen.* Zu welchen Werten gelangte *Bernoulli*?

100. Für das Funktionieren eines Gerätes A ist die Funktionsfähigkeit des Bauteils B unbedingt nötig. Aus diesem Grund ist B n-fach vorhanden. Die Wahrscheinlichkeit für das Ausfallen von B innerhalb eines Tages sei p.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Gerät A innerhalb eines Tages funktionsunfähig wird
1) für $n = 2$; $p = 0{,}5$, **2)** für $n = 3$; $p = \frac{1}{3}$, **3)** allgemein?

b) Wie groß muß n sein, wenn für $p = 0{,}5$ die Wahrscheinlichkeit für die Funktionsfähigkeit von A innerhalb eines Tages 95% betragen soll?

101. Eine Obstgroßhandlung erhält Äpfel in Steigen zu je 100 Stück. Ein Kontrolleur überprüft die Steigen durch Entnahme einer Stichprobe von 20 Äpfeln pro Steige. Eine bestimmte Steige enthalte genau 5 schlechte Äpfel.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich bei dieser Steige genau ein schlechter Apfel in der Stichprobe befindet?

b) Welche Wahrscheinlichkeit ergäbe sich, wenn die Stichprobe mit Zurücklegen entnommen würde?

* Bei dieser Beschreibung der 3 möglichen Interpretationen des *Huygens*schen Problems taucht unseres Wissens zum ersten Mal in der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Begriff **Urne** auf. In den *Meditationes* (geschrieben vor dem 26.8.1685) steht noch, daß die Steine in ihr Gefäß zurückzulegen seien – *electos calculos in loculum suum reponendos esse* –, in der *Ars Conjectandi* heißt es dann, daß sie wieder in die Urne zurückzulegen seien – *calculos electos* [...] *in urnam recondendos esse*.

c) Eine Steige, bei der in der Stichprobe mindestens 2 schlechte Äpfel gefunden werden, wird zurückgewiesen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Steige mit genau 5 schlechten Äpfeln zurückgewiesen wird? Untersuche Fall **a)** und **b)**.

102. Unter den N Kugeln einer Urne seien S schwarze.

a) Es werde eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen, ihre Farbe notiert, aber nicht bekanntgegeben. Berechne nun die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 2. Zug eine schwarze Kugel zu ziehen.

b) Es werden der Reihe nach n $(n \leq N)$ Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim k-ten Zug $(k \leq n)$ eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn man über die Ergebnisse der anderen Züge nichts weiß?

103. Unter den N Kugeln einer Urne seien S schwarze.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine schwarze Kugel zu ziehen?

b) Es werde eine schwarze Kugel ohne Zurücklegen gezogen. Berechne nun die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 2. Zug wieder eine schwarze Kugel zu ziehen. Wie groß ist der Unterschied der beiden Wahrscheinlichkeiten?

c) Berechne den Unterschied Δp der in **a)** und **b)** gefundenen Werte zunächst allgemein, dann für $\frac{S}{N} = 1\%$; 5%; 50%; 95% und $N = 100$; 500; 1000.

104. Um die Existenz medialer Begabungen zu beweisen, wird folgendes Experiment angestellt: Eine Laplace-Münze wird 10mal geworfen und die Ergebnisfolge nicht bekanntgegeben. 500 Versuchspersonen raten die geworfenen Ergebnisse unabhängig voneinander. Es wird vereinbart, daß mediale Begabung anzuerkennen sei, wenn wenigstens 9 Treffer erzielt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens eine Versuchsperson als »medial« erkannt wird, obwohl keine der Versuchspersonen eine mediale Begabung hat?

Zu 8.5.

•105. Gib die Menge der Ergebnisse aus Ω_7 an (siehe Lösung 7 der Aufgabe auf Seite 110), die bei der in der Schlußbetrachtung dieser Aufgabe angesprochenen Vergröberung mit dem Element $\omega_i \in \Omega_i$ identifiziert werden.
$\omega_3 = 4$; $\omega_4 = \{1, 2\}$; $\omega_5 = 110000$; $\omega_6 = 4$.

106. Eine Laplace-Münze werde zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens einmal Wappen erscheint?
Lösung von *d'Alembert* (1717–1783)* im Artikel *Croix ou Pile* der *Encyclopédie* (Bd. 4, 1754): Der erste Wurf bringt sicher Wappen oder Zahl. Nur im Fall Zahl ist ein zweiter Wurf überhaupt nötig. Er bringt entweder Wappen oder Zahl. Von den drei Fällen sind zwei günstig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{2}{3}$. – Nimm kritisch dazu Stellung!

107. Drei Laplace-Münzen werden gleichzeitig geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen alle drei Münzen die gleiche Seite?
Nimm kritisch Stellung zu folgender Lösung der Aufgabe: Zwei der drei Münzen zeigen sicher die gleiche Seite. Es kommt also nur darauf an, ob die dritte Münze auch diese Seite zeigt oder nicht. Es gibt also einen günstigen Fall von zwei möglichen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit 50%.

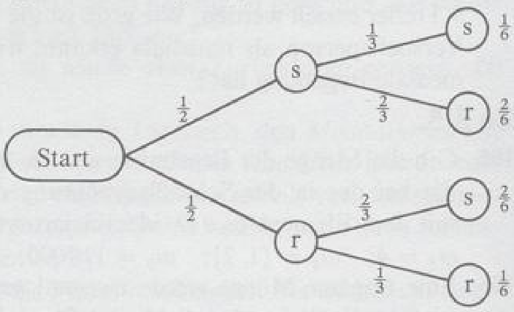
Bild 125.1 Ergebnisse beim 2fachen Münzenwurf

* Siehe Seite 394.

108. In einem Kasten liegen drei Karten, die folgendermaßen beschriftet sind:
- Die erste Karte trägt auf beiden Seiten eine Null.
- Die zweite Karte trägt auf beiden Seiten eine Eins.
- Die dritte Karte trägt auf einer Seite eine Null und auf der anderen eine Eins.

Eine Karte wird auf gut Glück gezogen und so auf den Tisch gelegt, daß man nicht sieht, was auf der Unterseite steht. Die Oberseite zeigt eine Eins. Theodor behauptet, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß auch auf der Rückseite eine Eins stehe, sei 50%; denn es gebe für die Rückseite zwei Möglichkeiten, von denen eine günstig sei. Was meinst du dazu?

109. In einer Urne liegen zwei rote und zwei schwarze Kugeln. Zwei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p haben die beiden gezogenen Kugeln gleiche Farbe? Diskutiere die folgenden 7 Lösungsvorschläge:
Lösung 1: Es gibt zwei Fälle: Die Kugeln haben entweder gleiche oder verschiedene Farbe. Ein Fall ist günstig, d.h. $p = \frac{1}{2}$.
Lösung 2: Es gibt drei Fälle: Beide Kugeln sind rot; beide Kugeln sind schwarz, oder die beiden Kugeln haben verschiedene Farbe. Zwei Fälle sind günstig, also ist $p = \frac{2}{3}$.
Lösung 3: Es gibt vier Fälle: rot-rot, rot-schwarz, schwarz-rot und schwarz-schwarz. Zwei Fälle sind günstig, also ist $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Lösung 4: Man denke sich die Kugeln durchnumeriert: 1r, 2r, 3s, 4s. Es gibt sechs Fälle: 1r2r, 1r3s, 1r4s, 2r3s, 2r4s, 3s4s. Zwei Fälle sind günstig, also ist $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Lösung 5: Die eine gezogene Kugel hat irgendeine Farbe. Für die andere Kugel gibt es zwei Möglichkeiten, von denen eine günstig ist. Also ist $p = \frac{1}{2}$.
Lösung 6: Die eine gezogene Kugel hat irgendeine Farbe. Dann ist die andere Kugel eine von den drei restlichen. Davon ist eine günstig, also ist $p = \frac{1}{3}$.
Lösung 7: Man stellt die Entnahme der beiden Kugeln als zweistufiges Experiment durch einen Baum dar und wendet die Pfadregeln an:
Man erhält $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.



110. In einer Urne liegt eine Kugel, die entweder weiß oder schwarz ist. Man legt eine weiße Kugel dazu, mischt und zieht eine Kugel. Sie ist weiß. Würdest du darauf wetten, daß die Kugel, die noch in der Urne liegt, auch weiß ist? Begründe deine Antwort!

111. *Problème du bâton brisé:* Ein Stab der Länge $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geqq 3$ soll auf gut Glück in drei Teile der Längen a_1, a_2, a_3 ($a_i \in \mathbb{N}$) zerbrochen werden.
Verfahren A: Die beiden Teilpunkte T_1 und T_2 werden willkürlich aus den $a - 1$ Möglichkeiten ausgewählt.
Verfahren B: Teilpunkt T_1 werde willkürlich aus den $a - 1$ Möglichkeiten ausgewählt. Dann wählt man wieder willkürlich eines der beiden Teilstücke und teilt es noch mal auf gut Glück, falls es noch teilbar ist. Andernfalls erhält man nur zwei Stücke und sicher kein Dreieck.

a) Wie groß ist in jedem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich aus den drei Teilen ein (nicht entartetes) Dreieck bilden läßt, wenn $a = 5$ ist?
b) Was ergibt sich für $a = 3; 4; 6; 7$?