Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

9. 2. Die Wahrscheinlichkeit von Und-Ereignissen und die 1. Pfadregel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

ω	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs
$P_B(\{\omega\})$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	0	0	0

Es wird also die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf diejenigen Ergebnisse verteilt, die r an erster Stelle haben; z.B.

$$P_B(\{\text{rs}\}) = \frac{1}{P(B)} \cdot P(\{\text{rs}\}) = \frac{1}{0{,}5} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{7}.$$

Wählen wir B als neuen Ergebnisraum Ω', so können wir auf den Begriff »bedingte Wahrscheinlichkeit« verzichten. Wir erhalten die Wahrscheinlichkeitsverteilung P' auf $\Omega' = \{\text{rr}, \text{rs}, \text{rg}\}$. Dabei beschreiben die Ergebnisse aus Ω' die Farbe der zweiten Kugel, die aus einer Urne mit 3 roten, 3 schwarzen und einer grünen Kugel gezogen wird. Diese neue Urne entsteht aus der ursprünglichen Urne durch Ziehen einer roten Kugel. Es gilt:

ω'	rr	rs	rg
$P'(\{\omega'\})$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$

Der Anfänger neigt dazu, $P_B(A)$ mit $P(A \cap B)$ zu verwechseln, weil die umgangssprachlichen Beschreibungen dieser Wahrscheinlichkeiten sehr ähnlich klingen. (Vgl. Aufgabe 138/**1.**) In beiden Fällen handelt es sich tatsächlich ja auch um dieselbe Menge $A \cap B$. Bei $P(A \cap B)$ bezieht man die Überlegungen auf die Gesamtmenge Ω. Bei $P_B(A)$, was ja dasselbe ist wie $P_B(A \cap B)$ – vergleiche Aufgabe 139/**6. a)** –, ist die Bezugsmenge jedoch nur noch die Teilmenge B. Die 4-Feldertafel von Figur 131.1 veranschaulicht diesen Unterschied. Man achte also sorgfältig auf die gegebene Aufgabenstellung, um die Verwechslung zu vermeiden.

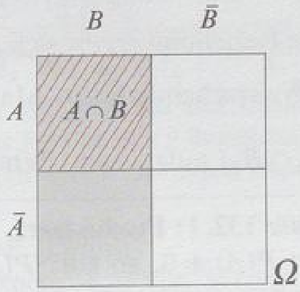

Fig. 131.1 $A \cap B$ als Teilmenge von Ω bzw. als Teilmenge von B

9.2. Die Wahrscheinlichkeit von *Und*-Ereignissen und die 1. Pfadregel

Figur 132.1 zeigt das Baumdiagramm für zweimaliges Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 4 roten, 3 schwarzen und einer grünen Kugel. Dabei bedeute z.B. $R_i :=$ »Rot beim i-ten Zug«. Über den Ergebnissen der jeweiligen Stufe sind die Ereignisse notiert, zu denen der Pfad bis dahin führt. Die Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen entpuppen sich nach dem, was wir gerade gelernt haben, als bedingte Wahrscheinlichkeiten über Ω. So gilt z.B. für die Wahrscheinlichkeit, beim 2. Zug eine rote Kugel zu ziehen, falls der 1. Zug eine rote Kugel ergab, $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{7}$.

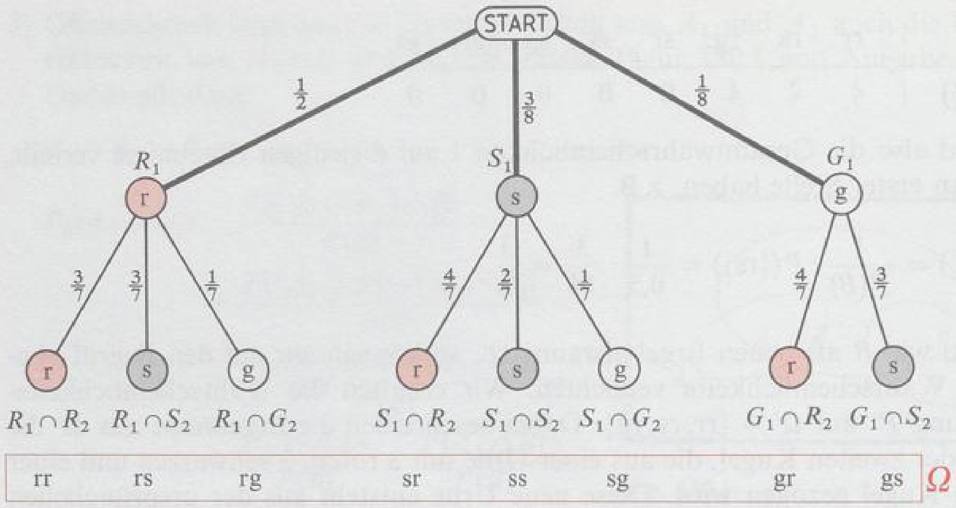

Fig. 132.1 Baumdiagramm zur Urne aus **9.2**.

Die 1. Pfadregel liefert uns den Zusammenhang zwischen der *Und*-Wahrscheinlichkeit $P(R_1 \cap R_2)$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(R_1)$ und $P_{R_1}(R_2)$:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P_{R_1}(R_2).$$

Diese Beziehung ergibt sich aber auch unmittelbar aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Man braucht nämlich $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)}$ nur nach $P(R_1 \cap R_2)$ aufzulösen! Wir merken uns diese wichtige Beziehung allgemein als

Satz 132.1: Produktsatz.
Ist $P(A) \neq 0$, so gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Der Produktsatz ist die wichtigste Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit. Oft sind nämlich $P(A)$ und $P_A(B)$ bekannt, und $P(A \cap B)$ wird gesucht.

Die 1. Pfadregel für längere Pfade liefert uns auch gleich Formeln für die Wahrscheinlichkeiten mehrfacher *Und*-Ereignisse. So gilt z.B. für 3 Ereignisse (vgl. Figur 132.2) ein Produktsatz der Form

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C), \text{ falls } P(A \cap B) \neq 0 \text{ ist.}$$

Die Produktsätze sind nichts anderes als ein algebraischer Ausdruck der 1. Pfadregel. Da zu ihrem Beweis (vgl. Aufgabe 142/**28**) nur die Eigenschaften der Wahr-

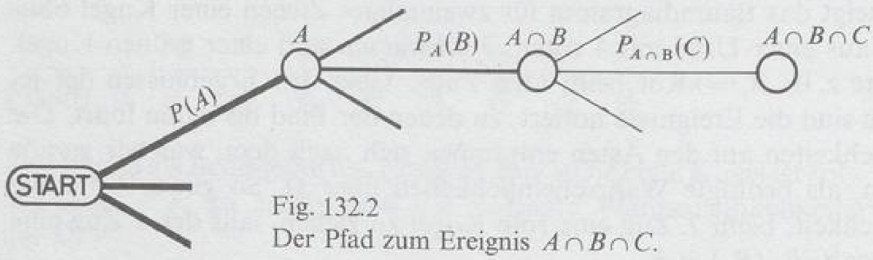

Fig. 132.2
Der Pfad zum Ereignis $A \cap B \cap C$.

scheinlichkeitsverteilung P und die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit benötigt werden, ist hiermit also nachträglich die Verwendung der 1. Pfadregel gerechtfertigt.
Abraham de Moivre (1667–1754) formulierte diese Produktsätze 1738 in der 2. Auflage seiner *Doctrine of Chances*.*

9.3. Die totale Wahrscheinlichkeit und die 2. Pfadregel

Beispiel: Bei der Wahl zum 1. Deutschen Bundestag (1949) verteilten sich die abgegebenen Stimmen und die für die FDP wie folgt auf die damaligen Länder:

Nr.	Bundesland	Anteil der Wähler in %	Anteil der FDP in %
1	Baden-Württemberg	11,7	17,6
2	Bayern	19,8	8,5
3	Bremen	1,3	12,9
4	Hamburg	3,8	15,8
5	Hessen	9,2	28,1
6	Niedersachsen	14,0	7,5
7	Nordrhein-Westfalen	28,2	8,6
8	Rheinland-Pfalz	6,2	15,8
9	Schleswig-Holstein	5,8	7,4

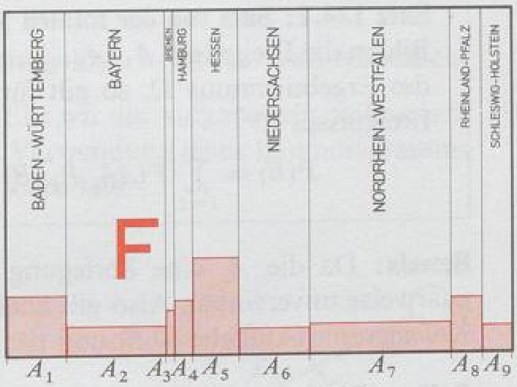

Fig. 133.1 Wähleranteile und Stimmenanteile der FDP in den 9 Bundesländern bei der Wahl zum 1. Deutschen Bundestag

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Wähler FDP gewählt?
Wir nehmen als Ergebnisraum Ω dieses Zufallsexperiments die Menge aller Wähler und betrachten die Ereignisse $F :=$ »Der Wähler hat seine Stimme der FDP gegeben« und $A_i :=$ »Der Wähler stammt aus dem i-ten Bundesland«. Die Ereignisse A_i bilden eine Zerlegung von Ω, da sie paarweise unvereinbar sind und ihre Vereinigung ganz Ω ergibt. Wegen der paarweisen Unvereinbarkeit der A_i sind auch die Ereignisse $F \cap A_i$ mit paarweise unvereinbar; außerdem gilt $F = \bigcup_{i=1}^{9} F \cap A_i$, was Figur 133.1 anschaulich zeigt.

Mit dem verallgemeinerten 3. Axiom von *Kolmogorow* (Aufgabe 82/5) können wir nun die Wahrscheinlichkeit $P(F)$ des gesuchten Ereignisses F berechnen:

$$P(F) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{9} F \cap A_i\Big) = \sum_{i=1}^{9} P(F \cap A_i).$$

Mit Hilfe des Produktsatzes 132.1 läßt sich diese Summe umformen zu

$$P(F) = \sum_{i=1}^{9} P(A_i) \cdot P_{A_i}(F).$$

Auf der rechten Seite sind nun alle Wahrscheinlichkeiten bekannt; wir erhalten

* Satz 132.1 lautet bei ihm: "The Probability of the happening of two Events dependent, is the product of the Probability of the happening of one of them, by the Probability which the other will have of happening, when the first shall have been consider'd as having happen'd."