Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

9. 3. Die totale Wahrscheilichkeit und die 2. Pfadregel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

scheinlichkeitsverteilung P und die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit benötigt werden, ist hiermit also nachträglich die Verwendung der 1. Pfadregel gerechtfertigt.
Abraham de Moivre (1667–1754) formulierte diese Produktsätze 1738 in der 2. Auflage seiner *Doctrine of Chances.**

9.3. Die totale Wahrscheinlichkeit und die 2. Pfadregel

Beispiel: Bei der Wahl zum 1. Deutschen Bundestag (1949) verteilten sich die abgegebenen Stimmen und die für die FDP wie folgt auf die damaligen Länder:

Nr.	Bundesland	Anteil der Wähler in %	Anteil der FDP in %
1	Baden-Württemberg	11,7	17,6
2	Bayern	19,8	8,5
3	Bremen	1,3	12,9
4	Hamburg	3,8	15,8
5	Hessen	9,2	28,1
6	Niedersachsen	14,0	7,5
7	Nordrhein-Westfalen	28,2	8,6
8	Rheinland-Pfalz	6,2	15,8
9	Schleswig-Holstein	5,8	7,4

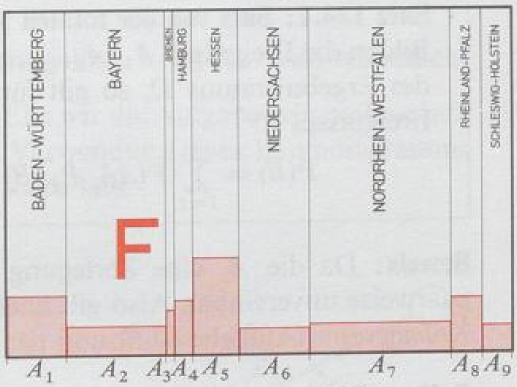

Fig. 133.1 Wähleranteile und Stimmenanteile der FDP in den 9 Bundesländern bei der Wahl zum 1. Deutschen Bundestag

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Wähler FDP gewählt?
Wir nehmen als Ergebnisraum Ω dieses Zufallsexperiments die Menge aller Wähler und betrachten die Ereignisse $F :=$ »Der Wähler hat seine Stimme der FDP gegeben« und $A_i :=$ »Der Wähler stammt aus dem i-ten Bundesland«. Die Ereignisse A_i bilden eine Zerlegung von Ω, da sie paarweise unvereinbar sind und ihre Vereinigung ganz Ω ergibt. Wegen der paarweisen Unvereinbarkeit der A_i sind auch die Ereignisse $F \cap A_i$ mit paarweise unvereinbar; außerdem gilt $F = \bigcup_{i=1}^{9} F \cap A_i$, was Figur 133.1 anschaulich zeigt.
Mit dem verallgemeinerten 3. Axiom von *Kolmogorow* (Aufgabe 82/**5**) können wir nun die Wahrscheinlichkeit $P(F)$ des gesuchten Ereignisses F berechnen:

$$P(F) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{9} F \cap A_i\Big) = \sum_{i=1}^{9} P(F \cap A_i).$$

Mit Hilfe des Produktsatzes 132.1 läßt sich diese Summe umformen zu

$$P(F) = \sum_{i=1}^{9} P(A_i) \cdot P_{A_i}(F).$$

Auf der rechten Seite sind nun alle Wahrscheinlichkeiten bekannt; wir erhalten

* Satz 132.1 lautet bei ihm: "The Probability of the happening of two Events dependent, is the product of the Probability of the happening of one of them, by the Probability which the other will have of happening, when the first shall have been consider'd as having happen'd."

$$P(F) = 0{,}117 \cdot 0{,}176 + 0{,}198 \cdot 0{,}085 + 0{,}013 \cdot 0{,}129 + 0{,}038 \cdot 0{,}158 + 0{,}092 \cdot 0{,}281 + \\ + 0{,}140 \cdot 0{,}075 + 0{,}282 \cdot 0{,}086 + 0{,}062 \cdot 0{,}158 + 0{,}058 \cdot 0{,}074 = \\ = 0{,}119\,795 \approx 12\%.$$

Die im obigen Beispiel durchgeführte Überlegung gilt allgemein für jede Zerlegung eines Ergebnisraums (vgl. Figur 134.1):

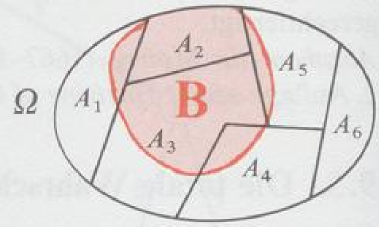

Fig. 134.1 Veranschaulichung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Satz 134.1: Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.
Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung des Ergebnisraums Ω, so gilt für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$$

Beweis: Da die A_i eine Zerlegung von Ω bilden, sind die Ereignisse $B \cap A_i$ paarweise unvereinbar. Also gilt nach der Verallgemeinerung des 3. Axioms von *Kolmogorow* (Aufgabe 82/**5**) und nach dem Produktsatz 132.1

$$P(B) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\Big) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B).$$

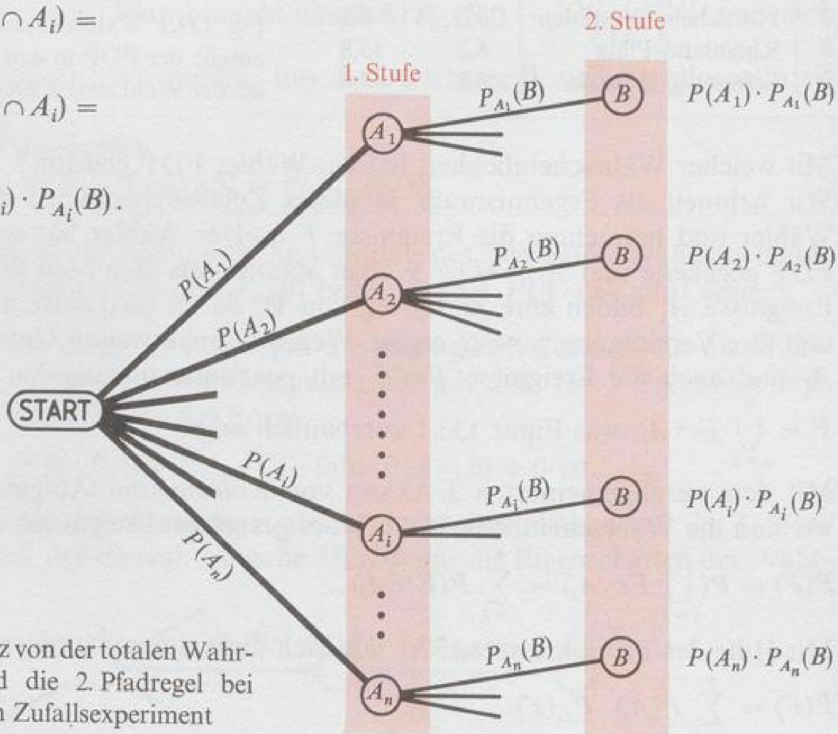

Fig. 134.2 Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und die 2. Pfadregel bei einem zweistufigen Zufallsexperiment

Wie man aus Figur 134.2 unmittelbar erkennt, ist der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit nichts anderes als die 2. Pfadregel für ein zweistufiges Zufallsexperiment.