Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

9. 4. Die Bayes-Formel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

9.4. Die *Bayes*-Formel*

Beispiel: In einem Ferienort in Oberbayern leben während der Hochsaison 5mal soviel Touristen wie Einheimische. 60% der Touristen tragen einen Trachtenhut, dagegen nur jeder 5. Einheimische. Auf der Straße begegnet uns während der Hochsaison ein Mensch mit Trachtenhut. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein Einheimischer?

Bedeuten $E :=$ »Der Mensch ist einheimisch« und $H :=$ »Der Mensch trägt einen Trachtenhut«, so gilt $P(E) = \frac{1}{6}$, $P_E(H) = \frac{1}{5}$ und $P_{\bar{E}}(H) = \frac{3}{5}$. Gesucht ist $P_H(E)$. Es handelt sich also um ein **Umkehrproblem:** Aus bekanntem $P_E(H)$ soll das unbekannte $P_H(E)$ berechnet werden.

Wegen $P_H(E) = \dfrac{P(H \cap E)}{P(H)}$ wäre das Problem gelöst, wenn die Wahrscheinlichkeiten $P(H)$ und $P(H \cap E)$ bekannt wären. Ehe wir die Aufgabe rein rechnerisch angehen, wollen wir zeigen, daß sie sich bei Verwendung eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel besonders einfach lösen läßt.

1) Lösung mit Hilfe eines Baumes

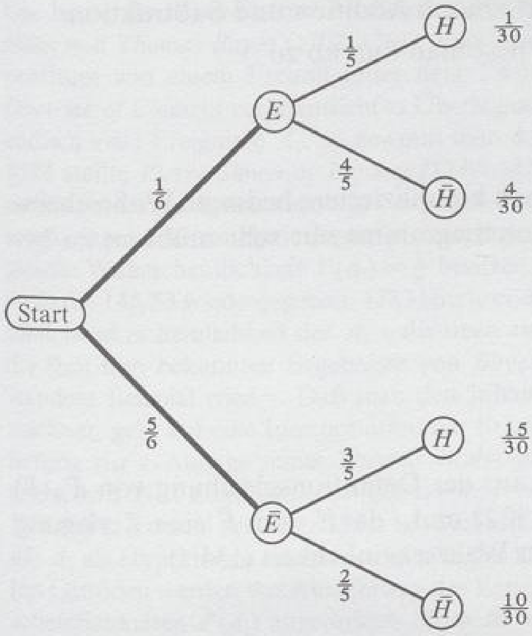

Fig. 135.1 Baum zum Umkehrproblem in üblicher Beschriftung

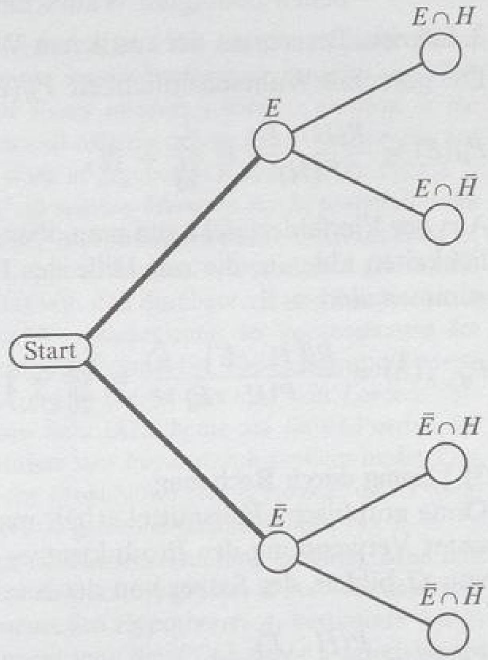

Fig. 135.2 Baum zum Umkehrproblem in ausführlicher Beschriftung

Dem Baum von Figur 135.1 entnimmt man

$P(H \cap E) = P(E \cap H) = \frac{1}{30}$ (1. Pfadregel),

$P(H) = P(E \cap H) + P(\bar{E} \cap H) = \frac{1}{30} + \frac{15}{30} = \frac{16}{30}$ (2. Pfadregel).

Also ist $P_H(E) = \frac{1}{16}$.

* gesprochen beız. – Siehe Seite 396.

Bemerkung: Der Baum von Figur 135.1 müßte eigentlich analog zu dem von Figur 132.1 beschriftet werden, was in Figur 135.2 ausgeführt ist. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden wir aber die oben angegebene vereinfachte Darstellung verwenden.

2) Lösung mit Hilfe einer Vierfeldertafel

	H	$\bar{H}$	
E			$\frac{1}{6}$
$\bar{E}$			$\frac{5}{6}$

$P_E(H) = \frac{1}{5}$

$P_{\bar{E}}(H) = \frac{3}{5}$

	H	$\bar{H}$	
E	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$
$\bar{E}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}$		$\frac{5}{6}$

	H	$\bar{H}$	
E	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$
$\bar{E}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{25}{30}$
	$\frac{16}{30}$	$\frac{14}{30}$	

Man erhält die vollständige Vierfeldertafel in 3 Schritten:

1. Schritt: Eintragen des gegebenen $P(E)$ und damit auch von $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.
2. Schritt: Ausfüllen der Felder für $P(E \cap H)$ und $P(\bar{E} \cap H)$ mit Hilfe der gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten und des Produktsatzes.
3. Schritt: Berechnen der restlichen Werte durch Addition und Subtraktion.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_H(E)$ liest man nun ab zu

$$P_H(E) = \frac{P(H \cap E)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{16}{30}} = \frac{1}{16}.$$

Aus der Vierfeldertafel kann man aber auch kompliziertere bedingte Wahrscheinlichkeiten ablesen, die mit Hilfe des Baumdiagramms nur sehr mühsam zu bestimmen sind, z.B.

$$P_{H \cup E}(\bar{E}) = \frac{P([H \cup E] \cap \bar{E})}{P(H \cup E)} = \frac{\frac{15}{30}}{\frac{20}{30}} = \frac{3}{4}.$$

3) Lösung durch Rechnung

Ohne graphische Hilfsmittel erhält man aus der Definitionsgleichung von $P_H(E)$ unter Verwendung des Produktsatzes (132.1) und, da E und $\bar{E}$ eine Zerlegung von Ω bilden, des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit (134.1)

$$\begin{aligned} P_H(E) &= \frac{P(H \cap E)}{P(H)} = \\ &= \frac{P(E) \cdot P_E(H)}{P(E) \cdot P_E(H) + P(\bar{E}) \cdot P_{\bar{E}}(H)} = \\ &= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}} = \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Unser vorgeführtes Problem war zwar typisch, aber einfach, da die Zerlegung von Ω durch 2 Ereignisse bewirkt wurde. Im allgemeinen Fall liegt eine Zerlegung von Ω durch n Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vor. Man kann dann einen Baum mit $2n$ Ästen und statt der 4-Feldertafel eine $2n$-Feldertafel zeichnen. Zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit $P_B(A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}$ wendet man auf den Zähler den Produktsatz und auf den Nenner den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit an und erhält

Satz 137.1: ***Bayes*-Formel.**
Bilden die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit $P(A_i) \neq 0$ für alle i eine Zerlegung von Ω und ist B ein Ereignis mit $P(B) \neq 0$, so gilt für jedes i

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P_{A_j}(B)}.$$

Sonderfall für $n = 2$:
Mit $A_1 = A$ und $A_2 = \bar{A}$ gilt $P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$.

Die heute als *Bayes*-Formel bezeichnete Gleichung von Satz 137.1 stammt in dieser Form nicht von *Thomas Bayes* (1702–1761). Verallgemeinert man jedoch einerseits seine erst 1763 posthum von einem Freund unter dem Titel *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* veröffentlichten Überlegungen und reduziert diese dann andererseits auf endlich viele Ereignisse A_i, so gewinnt man den oben angegebenen Ausdruck für $P_B(A_i)$.
1774 stellte *Pierre Simon de Laplace* (1749–1827)* in seinem *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènemens* die obige Formel als Prinzip** an den Beginn seiner Untersuchungen, setzte dabei aber im Sinne *Bayes*' – ohne *Bayes*' Arbeit zu kennen – voraus, daß alle A_i die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(A_i) = \frac{1}{n}$ besitzen. Das von ihm durchgerechnete Beispiel ist in Aufgabe 145/**53** wiedergegeben. 1783 leitete er dann*** – wieder unter der Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit der A_i – die oben angegebene Formel für $P_B(A_i)$ her und beweist die ihm nun bekannten Ergebnisse von *Bayes*. Aufgabe 146/**54** gibt das von *Laplace* verwendete Beispiel wieder. Daß man den Inhalt von Satz 137.1 heute als *Bayes*-Formel bezeichnet, geht auf eine Interpretation der Erkenntnisse von *Bayes* durch *Laplace* in der Einleitung zur 2. Auflage seiner *Théorie Analytique des Probabilités* (1814) zurück, die er auch unter dem Titel *Essai philosophique sur les probabilités* getrennt veröffentlichte.
Die *Bayes*-Formel von Satz 137.1 hat vielfach eine interessante Deutung erfahren. Man faßt die A_i als Hypothesen oder Ursachen für das Eintreten eines Ereignisses B auf. Aus bestimmten Gründen werden vor Ausführung des Experiments den Hypothesen A_i bestimmte Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ zugeordnet. Nach *Bayes* nennt man die $P(A_i)$ daher **a-priori-Wahrscheinlichkeiten******. Weiß man aber über die Hypothesen A_i nichts, dann ist es nach *Bayes* gerechtfertigt, sie als gleichwahrscheinlich anzunehmen. Hinsichtlich B ist bekannt, daß es

* 1774 nennt er sich noch *de la Place*.

** PRINCIPE. – Si un évènement peut être produit par un nombre n de causes différentes, les probabilités de l'existence de ces causes prises de l'évènement, sont entre elles comme les probabilités de l'évènement prises de ces causes, et la probabilité de l'existence de chacune d'elles, est égale à la probabilité de l'évènement prise de cette cause, divisée par la somme de toutes les probabilités de l'évènement prises de chacune de ces causes.

*** *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres* (Suite).

**** Man beachte, daß die Begriffe *a priori* und *a posteriori* bei *Bayes* eine andere Bedeutung als bei *Jakob Bernoulli* haben. (Siehe Seite 70 ff. und Seite 251.)