Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

10. 1. Unabhängigkeit bei zwei Ereignissen

10. Unabhängigkeit

10.1. Unabhängigkeit bei zwei Ereignissen

Ein L-Würfel werde zweimal geworfen. Bedeuten $A :=$ »Augenzahl beim 1. Wurf kleiner als 4« und $B :=$ »Augenzahl beim 2. Wurf größer als 4«, dann erhält man mit $\Omega := \{(1|1), (1|2), (1|3), \ldots, (6|6)\}$:

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ und $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Wir stellen fest:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Nach dem Produktsatz 132.1 muß aber gelten:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

In unserem Experiment ist demnach $P(B) = P_A(B)$. Was heißt das?

Das Eintreten des Ereignisses A beeinflußt offenbar nicht die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B. Unsere Erwartungen für B werden also nicht geändert, wenn wir schon wissen, daß A eingetreten ist.

Umgangssprachlich wird ein solcher Sachverhalt durch »B ist unabhängig von A« beschrieben. In unserem Beispiel ist dies auch naheliegend. Warum sollte das Ergebnis des 2. Wurfs vom 1. Wurf abhängen?

Vertauscht man im Produktsatz 132.1 A mit B, so erhält man in gleicher Weise

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Nun ist offenbar $P_B(A) = P(A)$. Also ist auch A unabhängig von B.

Die Überlegungen dieses Beispiels führen dazu, den Begriff der Unabhängigkeit zweier Ereignisse ins mathematische Modell zu übertragen.

Definition 148.1: Die Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig** in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Andernfalls heißen die Ereignisse **stochastisch abhängig.**

Der Zusatz »stochastisch« soll deutlich zum Ausdruck bringen, daß die Unabhängigkeit hiermit als Fachbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt ist. Wenn eine Verwechslung mit dem umgangssprachlichen Wort »unabhängig« nicht zu befürchten ist, werden wir den Zusatz weglassen.

Die in Definition 148.1 enthaltene Produktformel für unabhängige Ereignisse bringt *Abraham de Moivre* (1667–1754) bereits am Anfang seiner *De Mensura Sortis* 1711. Aber erst 1901 erkannte *Georg Bohlmann* (1869–1928), daß es sich nicht um einen beweisbaren Satz handelt, sondern daß Unabhängigkeit durch diese Produktformel definiert werden muß.

Folgerung aus Definition 148.1. Es ergibt sich unmittelbar, daß die Relation der Unabhängigkeit zweier Ereignisse *symmetrisch* ist:

Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, dann sind es auch B und A.

An einem praktischen Beispiel wollen wir zeigen, daß der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit in unserem Modell ziemlich gut das wiedergibt, was man in der Realität als unabhängig empfindet.

Beispiel 1: Das Fortuna-Gymnasium wird von 600 Mädchen und 400 Knaben besucht. 80 Knaben sind Linkshänder; das sind 20% der Knaben. Falls nun Linkshändigkeit geschlechtsunabhängig wäre, müßten auch 20% der Mädchen und damit 20% aller Schüler Linkshänder sein. Beim Zufallsexperiment »Auswahl eines beliebigen Schülers« bedeuten $L :=$ »Linkshänder« und $K :=$ »Knabe«. Die Geschlechtsunabhängigkeit der Linkshändigkeit würde nach den obigen Überlegungen im Zufallsexperiment die Gleichheit der drei Wahrscheinlichkeiten $P_K(L)$, $P_{\bar{K}}(L)$ und $P(L)$ bedeuten; also $P_K(L) = P_{\bar{K}}(L) = P(L) = 20\%$.
Damit erhält man $P(K \cap L) = P(K) \cdot P_K(L) = P(K) \cdot P(L)$, was aber gerade der Ausdruck für die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse K und L ist. – Von den 600 Mädchen müßten also 120 linkshändig sein, falls Linkshändigkeit unabhängig vom Geschlecht wäre. Eine Umfrage ergab aber, daß nur 84 der Mädchen Linkshänder sind. Das legt den Verdacht nahe, daß Linkshändigkeit geschlechtsabhängig ist. Läge die Anzahl der linkshändigen Mädchen nahe bei 120, dann würde man Unabhängigkeit vermuten.

Je undurchsichtiger der Zusammenhang zwischen zwei Ereignissen ist, desto schwerer fällt es, ihre Unabhängigkeit gefühlsmäßig einzuschätzen. Hier hilft nur die Rechnung weiter, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2: n L-Münzen ($n \geqq 2$) werden gleichzeitig geworfen. Sind die Ereignisse $A :=$ »Höchstens einmal Adler« und $B :=$ »Jede Seite der Münze fällt wenigstens einmal« stochastisch unabhängig?
Als Ergebnisraum Ω bietet sich die Menge der n-Tupel aus $\{0; 1\}$ an, wobei 1 »Adler« bedeute. Es ist $|\Omega| = 2^n$. A besteht aus all den n-Tupeln von Ω, die keine oder genau eine 1 enthalten. Damit ist $|A| = 1 + n$. Zur Bestimmung von $|B|$ betrachten wir $\bar{B} =$ »Es tritt nur Zahl oder nur Adler auf« und erhalten sofort $|\bar{B}| = 2$; damit ist $|B| = 2^n - 2$. Für das noch fehlende Ereignis $A \cap B =$ »Genau einmal Adler« erhält man $|A \cap B| = n$.
A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \cdot n = (n+1) \cdot (2^n - 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = n + 1$$

Figur 149.1 zeigt, daß diese Gleichung in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ genau eine Lösung hat, nämlich $n = 3$, was man durch Einsetzen leicht verifiziert.

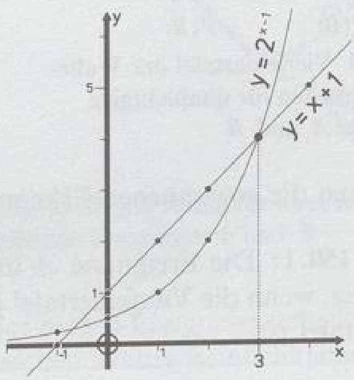

Fig. 149.1 Zur Lösung der Gleichung $2^{n-1} = n + 1$ betrachtet man die Graphen von $y = 2^{x-1}$ und $y = x + 1$.

Das überraschende Resultat besagt, daß die genannten Ereignisse nur beim Werfen von 3 Münzen stochastisch unabhängig sind, sonst aber immer stochastisch abhängig. Dies ist im ersten Moment erstaunlich. Bedenkt man aber, daß die umgangssprachlich gleichlautenden Ereignisse für verschiedene n verschiedene Ereignisse sind – was ja deutlich durch die Verschiedenheit der jeweiligen Ergebnismengen zum Ausdruck kommt –, so wird verständlich, daß die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse A und B von n abhängt.

In Beispiel 2 haben wir die stochastische Unabhängigkeit durch Rechnung überprüft. Es ist zu erwarten, daß die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse auch in den von uns vielfach verwendeten graphischen Hilfsmitteln, nämlich Vierfeldertafel und Baumdiagramm, zum Ausdruck kommt.

Stochastische Unabhängigkeit in der Vierfeldertafel.
Sind A und B stochastisch unabhängig, so steht im Feld $A \cap B$ der Vierfeldertafel für Wahrscheinlichkeiten statt $P(A \cap B)$ nun $P(A) \cdot P(B)$, wie Figur 150.1 zeigt. Im Feld für $\bar{A} \cap B$ steht dann

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot P(B) = P(\bar{A}) \cdot P(B).$$

Es erweisen sich also auch $\bar{A}$ und B als stochastisch unabhängig. Analog füllt man die beiden noch ausstehenden Felder $A \cap \bar{B}$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$ aus und erhält Figur 150.2.

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A) \cdot P(B)$		$P(A)$
$\bar{A}$			$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	

Fig. 150.1 Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten für unabhängige Ereignisse A und B

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A) \cdot P(B)$	$P(A) \cdot P(\bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A}) \cdot P(B)$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	

Fig. 150.2 Vollständige Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten für unabhängige Ereignisse A und B

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

> **Satz 150.1:** Die Ereignisse A und B sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn die Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten eine Multiplikationstafel ist.

Die obige Herleitung zeigte ferner: Ist die Produkteigenschaft für ein einziges Feld der Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten erfüllt, so ist sie auch für die restlichen 3 Felder gültig. Das heißt aber:

Satz 151.1: Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse bleibt erhalten, wenn man eines davon durch sein Gegenereignis ersetzt.
Also:

$$\begin{aligned} A \text{ und } B \text{ unabhängig} &\Leftrightarrow \bar{A} \text{ und } B \text{ unabhängig} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \text{ und } \bar{B} \text{ unabhängig} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bar{A} \text{ und } \bar{B} \text{ unabhängig.} \end{aligned}$$

Stochastische Unabhängigkeit im Baumdiagramm.
Aus dem gerade formulierten Satz 151.1 folgt unmittelbar: Sind A und B stochastisch unabhängig, so gilt

$P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$ und
$P_A(\bar{B}) = P_{\bar{A}}(\bar{B}) = P(\bar{B})$.

Das bedeutet, daß auf den Ästen der 2. Stufe statt der bedingten Wahrscheinlichkeiten die unbedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B)$ bzw. $P(\bar{B})$ stehen. Figur 151.1 und 151.2 veranschaulichen dies.

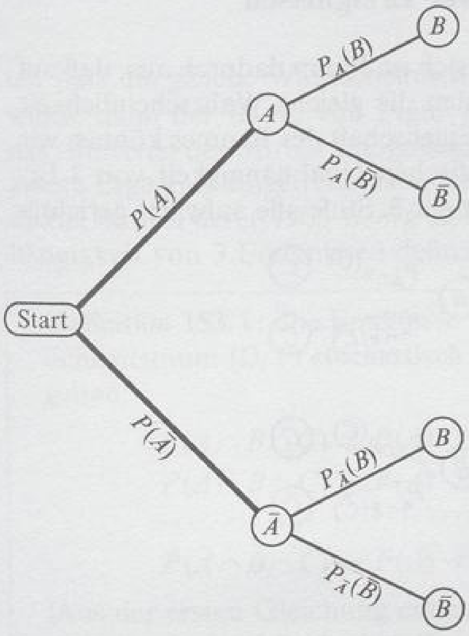

Fig. 151.1 Ein Baum für beliebige Ereignisse A und B

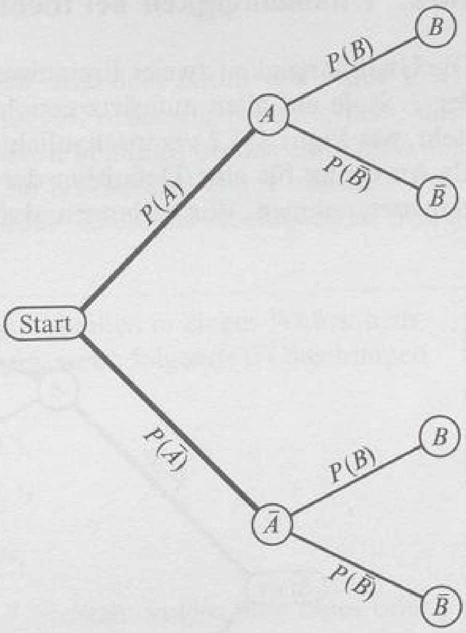

Fig. 151.2 Ein Baum für zwei unabhängige Ereignisse A und B

Wir stellen fest: Infolge der Unabhängigkeit der beiden Ereignisse stehen an allen aufwärts gerichteten Ästen der 2. Stufe die gleichen Wahrscheinlichkeiten, ebenso an allen abwärts gerichteten Ästen.

Zum Schluß stellen wir die Begriffe der *Unvereinbarkeit* und der *Unabhängigkeit*, die man keinesfalls verwechseln darf, einander gegenüber:

A und B **unvereinbar** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
Für *jede* Wahrscheinlichkeitsverteilung P gilt dann der **spezielle Summensatz** für Wahrscheinlichkeiten: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
A und B **unabhängig** in $(\Omega, P) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, d.h., für die *gegebene* Wahrscheinlichkeitsverteilung P gilt ein **spezieller Produktsatz** für Wahrscheinlichkeiten und umgekehrt.

Man beachte also den Unterschied: Ob zwei Ereignisse A und B unvereinbar sind oder nicht, ist allein durch den Ergebnisraum Ω festgelegt, in dem A und B Teilmengen sind. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung P über Ω eingeführt ist, spielt dabei überhaupt keine Rolle. Die stochastische Unabhängigkeit von A und B dagegen ist eine Eigenschaft der Ereignisse *bei gegebener* Wahrscheinlichkeitsverteilung P, also eine Eigenschaft des Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, P). Wählt man zum gleichen Ergebnisraum Ω und zu den gleichen Ereignissen A und B eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung, so geht im allgemeinen eine zuvor bestehende Unabhängigkeit von A und B verloren. (Vgl. Aufgabe 161/**29**.)

10.2. Unabhängigkeit bei mehr als zwei Ereignissen

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse drückt sich im Baum dadurch aus, daß auf der 2. Stufe auf allen aufwärts gerichteten Ästen die gleiche Wahrscheinlichkeit steht, wie Figur 151.2 veranschaulicht. Diese Eigenschaft des Baumes können wir als Anregung für eine Definition der stochastischen Unabhängigkeit von 3 Ereignissen nehmen. Wir verlangen, daß auch in der 3. Stufe alle aufwärts gerichte-

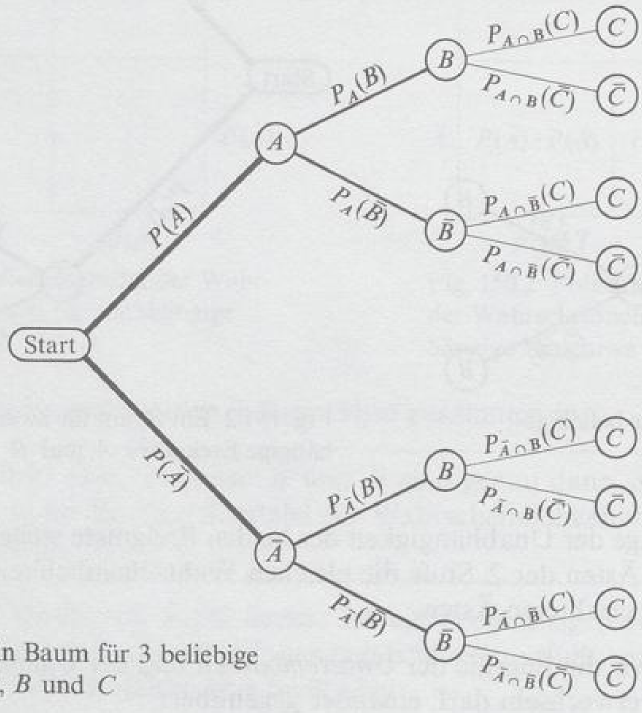

Fig. 152.1 Ein Baum für 3 beliebige Ereignisse A, B und C