Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

10. 2. Unabhängigkeit bei mehr als zwei Ereignissen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

> A und B **unvereinbar** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
> Für *jede* Wahrscheinlichkeitsverteilung P gilt dann der **spezielle Summensatz** für Wahrscheinlichkeiten: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
> A und B **unabhängig** in $(\Omega, P) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, d.h., für die *gegebene* Wahrscheinlichkeitsverteilung P gilt ein **spezieller Produktsatz** für Wahrscheinlichkeiten und umgekehrt.

Man beachte also den Unterschied: Ob zwei Ereignisse A und B unvereinbar sind oder nicht, ist allein durch den Ergebnisraum Ω festgelegt, in dem A und B Teilmengen sind. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung P über Ω eingeführt ist, spielt dabei überhaupt keine Rolle. Die stochastische Unabhängigkeit von A und B dagegen ist eine Eigenschaft der Ereignisse *bei gegebener* Wahrscheinlichkeitsverteilung P, also eine Eigenschaft des Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, P). Wählt man zum gleichen Ergebnisraum Ω und zu den gleichen Ereignissen A und B eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung, so geht im allgemeinen eine zuvor bestehende Unabhängigkeit von A und B verloren. (Vgl. Aufgabe 161/**29**.)

10.2. Unabhängigkeit bei mehr als zwei Ereignissen

Die Unabhängigkeit zweier Ereignisse drückt sich im Baum dadurch aus, daß auf der 2. Stufe auf allen aufwärts gerichteten Ästen die gleiche Wahrscheinlichkeit steht, wie Figur 151.2 veranschaulicht. Diese Eigenschaft des Baumes können wir als Anregung für eine Definition der stochastischen Unabhängigkeit von 3 Ereignissen nehmen. Wir verlangen, daß auch in der 3. Stufe alle aufwärts gerichte-

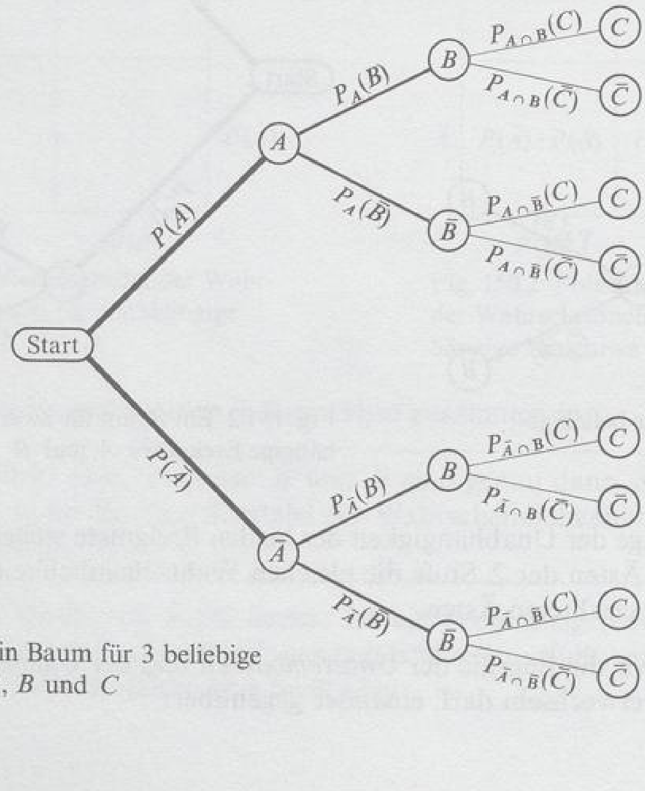

Fig. 152.1 Ein Baum für 3 beliebige Ereignisse A, B und C

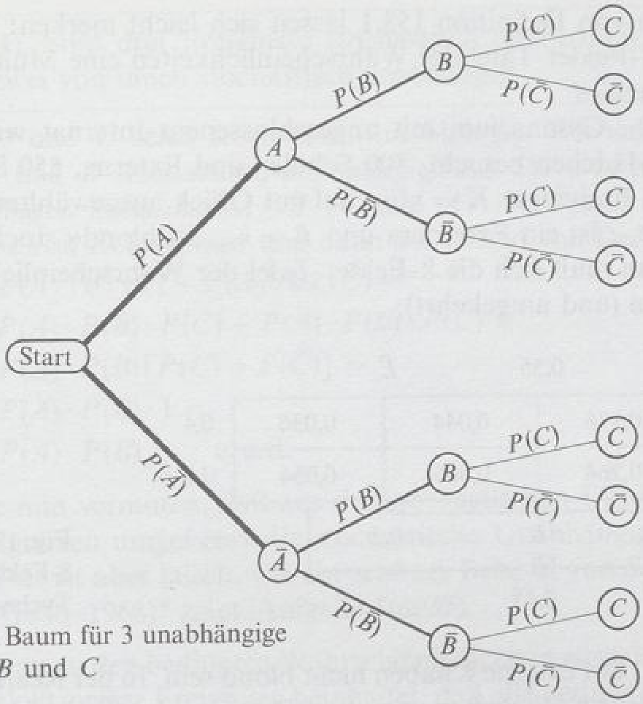

Fig. 153.1 Ein Baum für 3 unabhängige Ereignisse A, B und C

ten Äste die gleiche Wahrscheinlichkeit tragen. Aus dem Baum von Figur 152.1 würde dann der Baum von Figur 153.1. Unsere Forderung bedeutet also, daß das Eintreten des dritten Ereignisses nicht davon abhängt, ob das erste bzw. das zweite Ergeignis eingetreten ist oder nicht. Die 1. Pfadregel liefert uns die 8 Produkte, mittels derer 1908 *Georg Bohlmann* (1869–1928) die stochastische Unabhängigkeit von 3 Ereignissen definierte:

> **Definition 153.1:** Die Ereignisse A, B und C heißen in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) **stochastisch unabhängig,** wenn folgende 8 Gleichungen gelten:
>
> $$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$
> $$P(\bar{A} \cap B \cap C) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C),$$
> ....
> $$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}).$$
>
> (Aus der ersten Gleichung entstehen die 7 übrigen, indem man eines oder mehrere der drei Ereignisse durch ihre Gegenereignisse ersetzt.)

Die Untersuchung der Unabhängigkeit von 3 Ereignissen kann sehr mühsam sein. Man müßte nämlich alle 8 Gleichungen prüfen. Tatsächlich genügt es aber, 4 geeignet ausgewählte Gleichungen zu verifizieren. (Aufgabe 163/**40**)

Aus der Struktur der geforderten 8 Gleichungen erkennt man sofort, daß die Unabhängigkeit von 3 Ereignissen erhalten bleibt, wenn man eines oder mehrere durch ihr Gegenereignis ersetzt.

Die 8 Gleichungen von Definition 153.1 lassen sich leicht merken: Sie besagen nämlich, daß die 8-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten eine Multiplikationstafel ist. Dazu folgendes

Beispiel: Das Tyche-Gymnasium mit angeschlossenem Internat wird von 400 Knaben und 600 Mädchen besucht. 800 Schüler sind Externe, 550 Schüler sind blond. Wenn die 3 Ereignisse $K :=$ »Ein auf gut Glück ausgewählter Schüler ist ein Knabe«, $E :=$ »... ist ein Externer« und $B :=$ »... ist blond« stochastisch unabhängig sind, dann muß sich die 8-Felder-Tafel der Wahrscheinlichkeiten von Figur 154.1 ergeben (und umgekehrt):

	E		$\bar{E}$		
	$\bar{B}$	B (0,55)	B (0,55)	$\bar{B}$	
K	0,144	0,176	0,044	0,036	0,4
$\bar{K}$	0,216	0,264	0,066	0,054	0,6
	0,8		0,2		

$\bar{B}$: 0,45

Fig. 154.1
8-Felder-Tafel zum Tyche-Gymnasium.

Es müßten also u. a. 144 externe Knaben nicht blond sein. In der Realität hat man es aber nur mit relativen Häufigkeiten zu tun. Dann wird selbst bei Unabhängigkeit die analoge Produktformel $h_n(A \cap B) = h_n(A) \cdot h_n(B)$ nur angenähert gelten. Man muß im Einzelfall entscheiden, ob die Abweichung zufallsbedingt ist oder ob wirklich Abhängigkeit vorliegt. Diese Entscheidung ist ein Problem der Beurteilenden Statistik.

Unsere übliche Vorstellung von Unabhängigkeit drückt sich z. B. so aus, daß der Anteil der Blonden an der Gesamtschülerschaft genauso groß ist wie der Anteil der Blonden unter den Knaben bzw. wie der Anteil unter den Externen und sogar wie der Anteil unter den externen Knaben. Überprüfen wir diese anschauliche Vorstellung an der Mehrfeldertafel von Figur 154.1:

$$P(B) = 0{,}55\,,$$

$$P_K(B) = \frac{P(K \cap B)}{P(K)} = \frac{0{,}176 + 0{,}044}{0{,}4} = \frac{22}{40} = 0{,}55\,,$$

$$P_E(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E)} = \frac{0{,}176 + 0{,}264}{0{,}8} = \frac{44}{80} = 0{,}55\,,$$

$$P_{K \cap E}(B) = \frac{P(K \cap E \cap B)}{P(K \cap E)} = \frac{0{,}176}{0{,}176 + 0{,}144} = \frac{176}{320} = 0{,}55\,,$$

womit unsere Vorstellung bestätigt ist.

Wir werden später diesem Zusammenhang zwischen bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten noch nachgehen. Zunächst aber wollen wir eine weitere anschauliche Vorstellung von der Unabhängigkeit dreier Ereignisse in unserem Modell überprüfen. Man hat doch den Eindruck, daß, wenn sich 3 Ereignisse nicht beeinflussen, dann auch irgend zwei davon keinen Einfluß aufeinander haben. Tatsächlich gilt in unserem stochastischen Modell

Satz 155.1: Sind drei Ereignisse stochastisch unabhängig, so sind auch schon je zwei von ihnen stochastisch unabhängig.

Beweis: A, B und C seien stochastisch unabhängig. Wir zeigen exemplarisch, daß dann A und B stochastisch unabhängig sind. Dazu zerlegen wir $A \cap B$ in die unvereinbaren Ereignisse $A \cap B \cap C$ und $A \cap B \cap \bar{C}$ und erhalten mit Hilfe des 3. Axioms von *Kolmogorow* und dann auf Grund von Definition 153.1:

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) = \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) = \\ &= P(A) \cdot P(B)[P(C) + P(\bar{C})] = \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot 1 = \\ &= P(A) \cdot P(B), \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Man könnte nun vermuten, daß aus der stochastischen Unabhängigkeit von je 2 aus 3 Ereignissen umgekehrt die stochastische Unabhängigkeit aller 3 Ereignisse folgt. Das ist aber falsch, wie ein schönes Beispiel von *Sergei Natanowitsch Bernschtein* (1880–1968)* zeigt (Aufgabe 162/**35**).

Kehren wir nun zu den bedingten Wahrscheinlichkeiten zurück. Die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse beinhaltet, daß alle bedingten Wahrscheinlichkeiten gleich den zugehörigen unbedingten Wahrscheinlichkeiten sind, wie auf Seite 151 gezeigt wurde. Es ist also z.B. $P_{\bar{B}}(A) = P(A)$. Dies gilt in analoger Weise auch bei 3 Ereignissen. Unter Verwendung von Definition 148.1 bzw. 153.1 und Satz 155.1 erhalten wir z.B., wenn A, B und C stochastisch unabhängig sind und die jeweiligen bedingten Wahrscheinlichkeiten existieren,

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(C)}{P(A)} = P(C) \quad \text{oder}$$

$$P_{A \cap \bar{C}}(B) = \frac{P(A \cap \bar{C} \cap B)}{P(A \cap \bar{C})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{C}) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(\bar{C})} = P(B) \quad \text{oder}$$

$$P_B(\bar{A} \cap C) = \frac{P(\bar{A} \cap C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(C) \cdot P(B)}{P(B)} = P(\bar{A}) \cdot P(C) = P(\bar{A} \cap C).$$

Wir wurden zu unserer Definition der stochastischen Unabhängigkeit von 3 Ereignissen durch Betrachtung des Baumes von Figur 153.1 angeregt. Bei 3 Ereignissen kann man aber 6 verschiedene Bäume zeichnen! Hätte ein anderer Baum zu einer anderen Definition geführt? Nein; denn die soeben durchgeführten Überlegungen über die bedingten Wahrscheinlichkeiten zeigen, daß bei all diesen 6 Bäumen die kennzeichnende Eigenschaft der stochastischen Unabhängigkeit erfüllt ist: Auf allen aufwärts gerichteten Ästen jeder Stufe ist jeweils die gleiche Wahrscheinlichkeit zu finden. Jeder der 6 Bäume liefert also dieselben 8 Gleichungen.

Es liegt nun auf der Hand, wie *Georg Bohlmann* (1869–1928) auf dem IV. Internationalen Mathematiker-Kongreß 1908 Definition 153.1 sinnvoll auf n Ereignisse erweiterte:

* Бернштейн – Siehe Seite 394.

Definition 156.1: Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen in einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) **stochastisch unabhängig,** wenn folgende 2^n Gleichungen gelten:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n),$$
$$P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n).$$

(Aus der ersten Gleichung entstehen die übrigen, indem man eines oder mehrere der n Ereignisse durch ihre Gegenereignisse ersetzt.)

Auch in diesem allgemeinen Fall muß man nicht alle 2^n Gleichungen nachprüfen, um die Unabhängigkeit der n Ereignisse zu gewährleisten. (Vgl. Aufgabe 163/**45**.) Satz 155.1 läßt sich ebenfalls auf n Ereignisse verallgemeinern:

Satz 156.1: In einer Menge von stochastisch unabhängigen Ereignissen sind stets auch beliebig daraus ausgewählte Ereignisse stochastisch unabhängig.

Den **Beweis** dieses Satzes wollen wir Aufgabe 163/**44** überlassen.

Und schließlich drückt sich die stochastische Unabhängigkeit von n Ereignissen auch wiederum darin aus, daß alle bedingten Wahrscheinlichkeiten genauso groß sind wie die zugehörigen unbedingten Wahrscheinlichkeiten.

Aufgaben

Zu 10.1.

1. Untersuche beim Roulettspiel (Seite 22f.) die Ereignisse $A :=$ »pair«, $B :=$ »douze premier« und $C :=$ »rouge« paarweise auf stochastische Unabhängigkeit, falls es sich
   a) um das übliche Roulett, **b)** um ein Roulett ohne die Null handelt.
2. Von *Francis Galton* (1822–1911)* stammt eine Untersuchung der Augenfarbe von 1000 Vätern und je einem ihrer Söhne. Mit $V :=$ »Vater helläugig« und $S :=$ »Sohn helläugig« fand er folgende Anzahlen:

	S	$\bar{S}$
V	471	151
$\bar{V}$	148	…

   Ergänze die Tabelle, erstelle eine vollständige 4-Feldertafel der Wahrscheinlichkeiten und beurteile die Unabhängigkeit der Augenfarben von Vater und Sohn.
3. Eine Urne enthält 3 weiße und 5 schwarze Kugeln, eine andere Urne 2 weiße und 8 schwarze Kugeln.
   a) Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Es sei $W_i :=$ »Aus der Urne i wird eine weiße Kugel gezogen«. Sind W_1 und W_2 unabhängig?
   b) Die Urneninhalte werden zusammengeschüttet und mit Zurücklegen 2mal eine Kugel gezogen. Nun bedeute $W_i :=$ »Beim i-ten Zug wird eine weiße Kugel gezogen«. Sind W_1 und W_2 unabhängig?

* Siehe Seite 407.