Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

11. 2. Die kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Beispiel 3: Die Zufallsgröße »Quadrat der Augenzahl« beim einfachen Wurf eines Laplace-Würfels hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung

x	1	4	9	16	25	36
$W(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathscr{E}X = \mu &= 1\cdot\tfrac{1}{6} + 4\cdot\tfrac{1}{6} + \\ &\quad + 9\cdot\tfrac{1}{6} + 16\cdot\tfrac{1}{6} + \\ &\quad + 25\cdot\tfrac{1}{6} + 36\cdot\tfrac{1}{6} = \\ &= \tfrac{91}{6} = \\ &= 15\tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

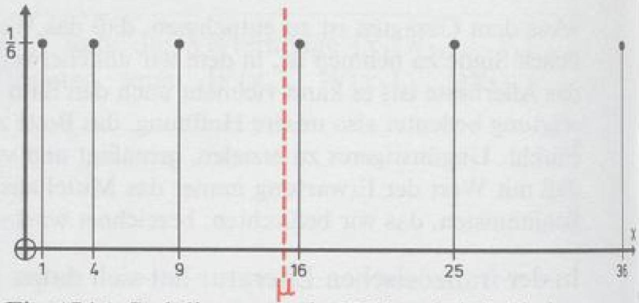

Fig. 174.1 Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße »Quadrat der Augenzahl eines Laplace-Würfels« mit Erwartungswert μ

Die Berechnung des Erwartungswerts wird besonders übersichtlich, wenn man die Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung um die Zeile $xW(x)$ erweitert.

Betrachten wir dazu das einfache

Beispiel 4: In einer Urne liegen 4 Kugeln, die mit den Zahlen 0, 1, 2 und 3 beschriftet sind. Man zieht 2 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen. Die Zufallsgröße X sei die größere der beiden gezogenen Zahlen. Wir berechnen den Erwartungswert von X:

x	1	2	3	
$W(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	
$xW(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\Rightarrow \mathscr{E}X = \frac{14}{6} = 2\frac{1}{3}$.

11.2. Die kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße

Einführendes Beispiel: Die 52 Karten des Bridgespiels werden auf 4 Spieler verteilt. Theodor hat dabei keine Herzkarte erhalten. Nun interessiert er sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit seine Spielgegnerin Dorothea eine bestimmte Höchstzahl von Herzkarten, z.B. höchstens 8 Herzkarten, erhalten hat. Wir wollen die Anzahl der Herzkarten, die Dorothea erhält, mit X bezeichnen. Dann ist X eine Zufallsgröße, die die Werte $x_1 = 0$, $x_2 = 1, \ldots, x_{14} = 13$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie den Wert x_i annimmt, berechnet sich zu $P(X = x_i) = W(x_i) = \dfrac{\binom{13}{x_i}\binom{26}{13-x_i}}{\binom{39}{13}}$. Die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion W sind in Tabelle 175.1 wiedergegeben. Theodor interessiert sich also für Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse »X ist höchstens so groß wie b«, z.B. »X ist höchstens so groß wie 8«. Für die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse schreiben wir kurz $P(X \leqq b)$, im Beispiel $P(X \leqq 8)$. Kennt Theodor die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße X, z.B. aus Tabelle 175.1, so kann er die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \leqq 8)$ als Summe berechnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P(X \leqq 8) &= P(X = 0 \cup X = 1 \cup \ldots \cup X = 8) = \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 8) = \\ &= W(x_1) + W(x_2) + \ldots + W(x_9) = \\ &= \sum_{x_i \leqq 8} W(x_i) = \\ &= 0{,}99859. \end{aligned}$$

x	$W(x)$
0	0,00128
1	0,01546
2	0,07420
3	0,18703
4	0,27505
5	0,24754
6	0,13897
7	0,04864
8	0,01042
9	0,00132
10	0,00009
11	$3{,}12 \cdot 10^{-6}$
12	$4{,}16 \cdot 10^{-8}$
13	$1{,}23 \cdot 10^{-10}$

Tab. 175.1 $x \mapsto \dfrac{\binom{13}{x}\binom{26}{13-x}}{\binom{39}{13}}$

Um die lästigen Summationen nicht immer wieder durchführen zu müssen, stellt sich Theodor mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion W eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten $P(X \leqq b)$ auf. Da diese Wahrscheinlichkeiten eine Funktion von b sind, nennt er sie kurz $F(b)$; also $F(b) := P(X \leqq b)$. Tabelle 175.2 zeigt uns die von Theodor durchgeführte Summation.

Auch beim darauffolgenden Spiel hat Theodor keine Herzkarte erhalten. Nun möchte er aber die Wahrscheinlichkeit dafür wissen, daß Dorothea mehr als a Herzkarten, aber höchstens b Herzkarten erhalten hat, kurz $P(a < X \leqq b)$. Nehmen wir für $a = 3$ und $b = 8$, so ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned} P(3 < X \leqq 8) &= P(X = 4 \cup X = 5 \cup \ldots \cup X = 8) = \\ &= P(X = 4) + P(X = 5) + \ldots + P(X = 8) = \\ &= W(x_5) + W(x_6) + \ldots + W(x_9) = \\ &= \sum_{3 < x_i \leqq 8} W(x_i) = \\ &= 0{,}72062. \end{aligned}$$

b	$F(b)$
0	0,00128
1	0,01674
2	0,09094
3	0,27797
4	0,55302
5	0,80056
6	0,93953
7	0,98817
8	0,99859
9	0,99991
10	1,00000
11	1,00000
12	1,00000
13	1

Tab. 175.2 $b \mapsto F(b)$. Die Werte für $b = 10$, 11 und 12 sind Rundungswerte, wohingegen $F(13)$ exakt 1 ist.

Wahrscheinlichkeiten dieser Art kann Theodor, statt umständlich zu summieren, leichter mit Hilfe seiner Tabelle 175.2 »$b \mapsto F(b)$« berechnen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P(3 < X \leqq 8) &= \sum_{3 < x_i \leqq 8} W(x_i) = \\ &= \sum_{x_i \leqq 8} W(x_i) - \sum_{x_i \leqq 3} W(x_i) = \\ &= P(X \leqq 8) - P(X \leqq 3) = \\ &= F(8) - F(3). \end{aligned}$$

Allgemein erhält man

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a).$$

Die Summation vieler Summanden reduziert sich also bei Verwendung der Funktion F auf die Bildung der Differenz zweier Tabellenwerte dieser Funktion.

So wie im vorstehenden Beispiel sind bei vielen Zufallsgrößen Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen der Form »$a < X \leqq b$« von Bedeutung. Man wird daher, ergänzend zur Wahrscheinlichkeitsfunktion W einer Zufallsgröße X, auf ganz $\mathbb{R}$ eine weitere Funktion F definieren, die die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse »$X \leqq b$« liefert. Man nennt F kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X und legt sie folgendermaßen allgemein fest:

Definition 176.1: Die Funktion

$$F: x \mapsto P(X \leqq x), \; D_F = \mathbb{R}$$

heißt **kumulative Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße X.

Die Beifügung »kumulativ«* weist darauf hin, daß der Wert $F(x)$ durch Aufhäufen, d.h. durch Summieren der Wahrscheinlichkeiten für alle Werte x_i, die höchstens so groß wie x sind, gewonnen wird. Manche Autoren unterdrücken die Beifügung »kumulativ« und nennen F kurz »Verteilungsfunktion der Zufallsgröße«.
Zur Berechnung der Werte der kumulativen Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße merken wir uns

Satz 176.1: Hat die Zufallsgröße X die Wertemenge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, so berechnet man $F(x)$ gemäß

$$F(x) = \sum_{x_i \leqq x} W(x_i).$$

Funktionsterm und Graph einer kumulativen Verteilungsfunktion veranschaulicht das einfache
Beispiel: X sei eine Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung W gemäß

x	$-1{,}5$	$-0{,}5$	$0{,}5$	2
$W(x)$	$0{,}4$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}3$

Figur 170.1a) zeigt den Graphen von W. Für die kumulative Verteilungsfunktion F dieser Zufallsgröße X ergibt sich

* cumulatus = aufgehäuft, aufgetürmt, aufgeschichtet.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x < -1{,}5 \\ 0{,}4 & \text{für} \quad -1{,}5 \leqq x < -0{,}5 \\ 0{,}6 & \text{für} \quad -0{,}5 \leqq x < 0{,}5 \\ 0{,}7 & \text{für} \quad 0{,}5 \leqq x < 2 \\ 1 & \text{für} \quad 2 \leqq x < +\infty . \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion F ist in Figur 177.1 dargestellt. Sie zeigt besonders anschaulich, wie durch »Aufhäufen« der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $W(x_i)$ der Graph von F entsteht.

Die erste graphische Darstellung einer kumulativen Verteilungsfunktion, und zwar von relativen Häufigkeiten, stammt von *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (1768 bis 1830) aus dem Jahre 1821.

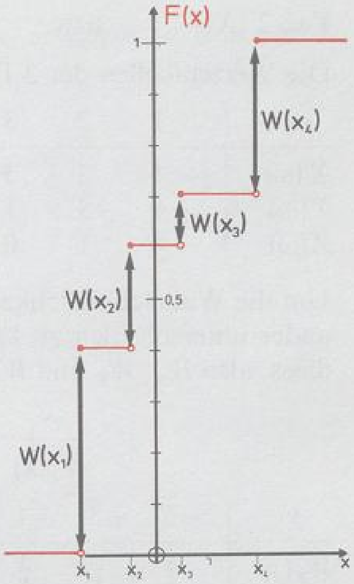

Fig. 177.1 Kumulative Verteilungsfunktion F zur Wahrscheinlichkeitsfunktion W von Figur 170.1.

Abschließend stellen wir einige Eigenschaften von kumulativen Verteilungsfunktionen zusammen, die sich unmittelbar aus Definition 176.1 ergeben.

Satz 177.1:
Ist F kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X, so gilt

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

3) F ist monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

4) F ist rechtsseitig stetig*, d.h., $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} F(x) = F(x_0)$.

5) Nimmt die Zufallsgröße X einen Wert x_i mit der Wahrscheinlichkeit $W(x_i) \neq 0$ an, so springt der Graph von F bei x_i um $W(x_i)$ nach oben; F ist also bei x_i unstetig.

6) $P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a)$.

11.3. Funktionen einer Zufallsgröße

Beispiel: Beim einfachen Würfelwurf werden folgende Gewinnpläne vereinbart:
Plan 1: Von der doppelten Augenzahl wird 7 subtrahiert; die so erhaltene Zahl stellt den Gewinn in DM dar.
Plan 2: Von der Augenzahl wird 3 subtrahiert und das Ergebnis quadriert. Die so erhaltene Zahl stellt den Gewinn in DM dar.
Bezeichnen wir die Zufallsgröße »Augenzahl« mit X, so lassen sich die durch die beiden Gewinnpläne definierten Zufallsgrößen »Gewinn Y« bzw. »Gewinn Z« mit Hilfe von X folgendermaßen ausdrücken:

* Merke: V e rteilungsfunktion – r e chtsseitig stetig.