Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

11. 3. Funktionen einer Zufallsgröße

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x < -1{,}5 \\ 0{,}4 & \text{für} \quad -1{,}5 \leqq x < -0{,}5 \\ 0{,}6 & \text{für} \quad -0{,}5 \leqq x < 0{,}5 \\ 0{,}7 & \text{für} \quad 0{,}5 \leqq x < 2 \\ 1 & \text{für} \quad 2 \leqq x < +\infty\,. \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion F ist in Figur 177.1 dargestellt. Sie zeigt besonders anschaulich, wie durch »Aufhäufen« der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $W(x_i)$ der Graph von F entsteht.

Die erste graphische Darstellung einer kumulativen Verteilungsfunktion, und zwar von relativen Häufigkeiten, stammt von *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (1768 bis 1830) aus dem Jahre 1821.

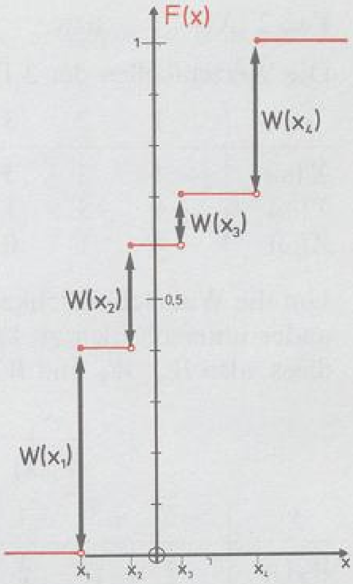

Fig. 177.1 Kumulative Verteilungsfunktion F zur Wahrscheinlichkeitsfunktion W von Figur 170.1.

Abschließend stellen wir einige Eigenschaften von kumulativen Verteilungsfunktionen zusammen, die sich unmittelbar aus Definition 176.1 ergeben.

Satz 177.1:
Ist F kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X, so gilt

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

3) F ist monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

4) F ist rechtsseitig stetig*, d.h., $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} F(x) = F(x_0)$.

5) Nimmt die Zufallsgröße X einen Wert x_i mit der Wahrscheinlichkeit $W(x_i) \neq 0$ an, so springt der Graph von F bei x_i um $W(x_i)$ nach oben; F ist also bei x_i unstetig.

6) $P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a)$.

11.3. Funktionen einer Zufallsgröße

Beispiel: Beim einfachen Würfelwurf werden folgende Gewinnpläne vereinbart:
Plan 1: Von der doppelten Augenzahl wird 7 subtrahiert; die so erhaltene Zahl stellt den Gewinn in DM dar.
Plan 2: Von der Augenzahl wird 3 subtrahiert und das Ergebnis quadriert. Die so erhaltene Zahl stellt den Gewinn in DM dar.
Bezeichnen wir die Zufallsgröße »Augenzahl« mit X, so lassen sich die durch die beiden Gewinnpläne definierten Zufallsgrößen »Gewinn Y« bzw. »Gewinn Z« mit Hilfe von X folgendermaßen ausdrücken:

* Merke: V e rteilungsfunktion – r e chtsseitig stetig.

$Y := 2 \cdot X - 7$ bzw. $Z := (X-3)^2$.

Die Wertetabellen der 3 Funktionen X, Y und Z lauten:

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$Y(\omega)$	-5	-3	-1	1	3	5
$Z(\omega)$	4	1	0	1	4	9

Um die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsgrößen X, Y und Z voneinander unterscheiden zu können, kennzeichnen wir sie durch entsprechende Indizes, also W_X, W_Y und W_Z. Für sie ergeben sich folgende Wertetabellen:

x	1	2	3	4	5	6
$W_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

y	-5	-3	-1	1	3	5
$W_Y(y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

z	0	1	4	9
$W_Z(z)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Wir ersehen aus den obigen Tabellen, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung W_X der Zufallsgröße X gleichmäßig ist, d.h., alle ihre Werte haben die gleiche Wahrscheinlichkeit. Auch $Y = 2X - 7$ ist eine gleichmäßig verteilte Zufallsgröße, wohingegen $Z = (X-3)^2$ nicht mehr gleichmäßig verteilt ist!

Die Zufallsgrößen Y und Z können wir mathematisch als Verkettung der reellwertigen Funktion X mit den Funktionen $g: x \mapsto 2x - 7$ bzw. $h: x \mapsto (x-3)^2$ auffassen; es gilt nämlich $Y = g \circ X$ und $Z = h \circ X$.
Allgemein kann man sagen: Da jede Zufallsgröße X eine reellwertige Funktion ist, läßt sie sich mit einer beliebigen reellen Funktion g, deren Definitionsmenge die Wertemenge von X enthält, verketten. Das Ergebnis der Verkettung ist eine neue Zufallsgröße Y; für sie gilt
$Y(\omega) = (g \circ X)(\omega) := g(X(\omega))$.
Als Verkettungsfunktionen können natürlich auch transzendente Funktionen wie sin, exp und ln auftreten.

Zur Berechnung des Erwartungswerts der Zufallsgröße $Y := g \circ X$ ist es nicht nötig, die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y zu kennen. Es gilt nämlich

Satz 178.1: Besitzt die Zufallsgröße X die Wertemenge $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung W, so gilt für den Erwartungswert der Zufallsgröße $g \circ X$:

$$\mathscr{E}[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) W(x_i)$$

Beweis: Das X zugrundeliegende Zufallsexperiment habe die Ergebnisse $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$. Dann gilt auf Grund von Bemerkung 6 (Seite 172):

$$\mathscr{E}[g(X)] = \sum_{k=1}^{N} g(X(\omega_k)) P(\{\omega_k\}).$$

Fassen wir alle Summanden zusammen, für die $X(\omega_k) = x_i$ gilt, so erhalten wir wegen $W(x_i) = \sum_{X(\omega_k)=x_i} P(\{\omega_k\})$ die Behauptung:

$$\mathscr{E}[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{X(\omega_k)=x_i} g(x_i) P(\{\omega_k\}) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(g(x_i) \cdot \sum_{X(\omega_k)=x_i} P(\{\omega_k\}) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_i) W(x_i).$$

Beispiel: Bei Kenntnis von W_Z errechnet man unmittelbar

$\mathscr{E}(Z) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$.

Mit Satz 178.1 erhält man *ohne* Kenntnis von W_Z

$$\mathscr{E}(Z) = \mathscr{E}(h(X)) = (1-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (2-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (3-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (4-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} +$$
$$+ (5-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (6-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{19}{6}.$$

11.4. Die Varianz einer Zufallsgröße

Eine Zufallsgröße wird durch ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion weitgehend beschrieben. Für viele Zwecke genügt es sogar, nur über Parameter, die das Aussehen der Wahrscheinlichkeitsfunktion kennzeichnen, Bescheid zu wissen. Ein solcher Parameter ist der Erwartungswert einer Zufallsgröße; er gibt ihren »mittleren Wert« an. Er sagt jedoch nichts darüber aus, wie die einzelnen Funktionswerte der Zufallsgröße um diesen mittleren Wert streuen. Man wird also versuchen, die »mittlere Abweichung« der Funktionswerte von ihrem Erwartungswert durch eine Maßzahl zu kennzeichnen. Dafür bietet sich $\mathscr{E}(X - \mu)$ an.
$Y := X - \mu$ ist eine neue Zufallsgröße »Abweichung vom Erwartungswert μ«. Für sie gilt unter Verwendung von Satz 178.1:

$$\mathscr{E}(X-\mu) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) W(x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i) - \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} W(x_i) =$$
$$= \mathscr{E}X - \mu \cdot 1 = \mu - \mu = 0.$$

Das Ergebnis sollte nicht überraschen!
$\mathscr{E}(X - \mu)$ ist also ein untaugliches Maß. Da ja nur die Größe der Abweichungen und nicht ihre Richtung interessiert, könnte man $\mathscr{E}(|X - \mu|)$ als Maß wählen. Wegen der Unhandlichkeit des Absolutbetrags wählt man jedoch statt dessen $\mathscr{E}[(X - \mu)^2]$ als Abweichungsmaß. Das Quadrat sorgt dafür, daß die Richtung der Abweichung keine Rolle spielt. Darüber hinaus fallen Abweichungen um so stärker ins Gewicht, je größer sie sind. Es gibt selbstverständlich auch noch andere Funktionen der Abweichung $X - \mu$, die als Maß für das »Streuen der Werte der Zufallsgröße« verwendet werden könnten. Die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert μ, also $\mathscr{E}[(X - \mu)^2]$ hat sich jedoch als besonders brauchbar erwiesen.