Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

11. 4. Die Varianz einer Zufallsgröße

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Fassen wir alle Summanden zusammen, für die $X(\omega_k) = x_i$ gilt, so erhalten wir wegen $W(x_i) = \sum_{X(\omega_k) = x_i} P(\{\omega_k\})$ die Behauptung:

$$\mathscr{E}[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{X(\omega_k) = x_i} g(x_i) P(\{\omega_k\}) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(g(x_i) \cdot \sum_{X(\omega_k) = x_i} P(\{\omega_k\}) \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_i) W(x_i) .$$

Beispiel: Bei Kenntnis von W_Z errechnet man unmittelbar

$\mathscr{E}(Z) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$.

Mit Satz 178.1 erhält man *ohne* Kenntnis von W_Z

$$\mathscr{E}(Z) = \mathscr{E}(h(X)) = (1-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (2-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (3-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (4-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} +$$
$$+ (5-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + (6-3)^2 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{19}{6} .$$

11.4. Die Varianz einer Zufallsgröße

Eine Zufallsgröße wird durch ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion weitgehend beschrieben. Für viele Zwecke genügt es sogar, nur über Parameter, die das Aussehen der Wahrscheinlichkeitsfunktion kennzeichnen, Bescheid zu wissen. Ein solcher Parameter ist der Erwartungswert einer Zufallsgröße; er gibt ihren »mittleren Wert« an. Er sagt jedoch nichts darüber aus, wie die einzelnen Funktionswerte der Zufallsgröße um diesen mittleren Wert streuen. Man wird also versuchen, die »mittlere Abweichung« der Funktionswerte von ihrem Erwartungswert durch eine Maßzahl zu kennzeichnen. Dafür bietet sich $\mathscr{E}(X - \mu)$ an.
$Y := X - \mu$ ist eine neue Zufallsgröße »Abweichung vom Erwartungswert μ«. Für sie gilt unter Verwendung von Satz 178.1:

$$\mathscr{E}(X - \mu) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) W(x_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i) - \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} W(x_i) =$$
$$= \mathscr{E}X - \mu \cdot 1 = \mu - \mu = 0 .$$

Das Ergebnis sollte nicht überraschen!
$\mathscr{E}(X - \mu)$ ist also ein untaugliches Maß. Da ja nur die Größe der Abweichungen und nicht ihre Richtung interessiert, könnte man $\mathscr{E}(|X - \mu|)$ als Maß wählen. Wegen der Unhandlichkeit des Absolutbetrags wählt man jedoch statt dessen $\mathscr{E}[(X - \mu)^2]$ als Abweichungsmaß. Das Quadrat sorgt dafür, daß die Richtung der Abweichung keine Rolle spielt. Darüber hinaus fallen Abweichungen um so stärker ins Gewicht, je größer sie sind. Es gibt selbstverständlich auch noch andere Funktionen der Abweichung $X - \mu$, die als Maß für das »Streuen der Werte der Zufallsgröße« verwendet werden könnten. Die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert μ, also $\mathscr{E}[(X - \mu)^2]$ hat sich jedoch als besonders brauchbar erwiesen.

Definition 180.1: μ sei der Erwartungswert der Zufallsgröße X. Als **Varianz** $\operatorname{Var} X$ der Zufallsgröße X definiert man den Erwartungswert der quadratischen Abweichungen von μ, also

$$\operatorname{Var} X := \mathscr{E}[(X-\mu)^2] = \mathscr{E}[(X-\mathscr{E}X)^2].$$

Wegen Satz 178.1 kann $\operatorname{Var} X$, ohne die Verteilung von $(X-\mathscr{E}X)^2$ zu kennen, über die Wahrscheinlichkeitsverteilung W von X berechnet werden:

$$\boxed{\operatorname{Var} X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 W(x_i)}$$

Bemerkungen:

1. Statt $\operatorname{Var} X$ schreibt man auch $\operatorname{Var}(X)$, vor allem dann, wenn Mißverständnisse zu befürchten sind. Var ist nämlich eine Funktion, die »Varianz«, durch die der Zufallsgröße X eine nicht-negative reelle Zahl $\operatorname{Var} X$ zugeordnet wird. Man müßte also zwischen der Funktion Var und dem Funktionswert $\operatorname{Var} X$, dem Varianzwert, unterscheiden. Praktisch geschieht dies fast nie.
2. Andere Bezeichnungen für die Varianz sind *mittleres Abweichungsquadrat, Dispersion, zentrales Moment 2. Ordnung* oder auch *Streuungsquadrat.*
3. Die Zahl $\operatorname{Var} X$ kann auch physikalisch gedeutet werden. Denkt man sich auf einem masselosen Stab an den Stellen x_i die Massen $W(x_i)$ angebracht, so stellt $\operatorname{Var} X$ das Trägheitsmoment des Stabes in bezug auf den Massenschwerpunkt μ dar.

Beispiel 1: Wir berechnen die Varianz der Zufallsgröße $X :=$ Gewinn beim chuck-a-luck (siehe Seite 165ff.): Mit $\mathscr{E}X = -\frac{17}{216}$ gilt

$$\operatorname{Var} X = (-1+\tfrac{17}{216})^2 \cdot \tfrac{125}{216} + (1+\tfrac{17}{216})^2 \cdot \tfrac{75}{216} + (2+\tfrac{17}{216})^2 \cdot \tfrac{15}{216} + (3+\tfrac{17}{216})^2 \cdot \tfrac{1}{216} =$$

$$= \frac{199^2 \cdot 125 + 233^2 \cdot 75 + 449^2 \cdot 15 + 665^2 \cdot 1}{216^3} = \frac{12488040}{10077696} \approx 1{,}24.$$

Diese Berechnung war sehr mühsam. Wir werden später in **12.4.2.** sehen, wie man sie etwas vereinfachen kann. Unter Umständen kann die Rechnung aber schon durch eine tabellarische Anordnung übersichtlicher werden. Wir zeigen dies für die Varianz der Zufallsgröße »Größere der beiden gezogenen Zahlen« aus Beispiel 4 von Seite 174:

x	1	2	3	
$W(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	
$xW(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\Rightarrow \mu = \frac{14}{6}$
$x-\mu$	$-\frac{8}{6}$	$-\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	
$(x-\mu)^2$	$\frac{64}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{16}{36}$	
$(x-\mu)^2 W(x)$	$\frac{64}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{48}{216}$	$\Rightarrow \operatorname{Var} X = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$

Die Werte der Zufallsgröße X waren Maßzahlen der Größe »Gewinn«, die in DM gemessen wird. Dementsprechend ist $\operatorname{Var} X$ als Maßzahl einer Größe zu verstehen, die in $(\mathrm{DM})^2$ gemessen wird. Das ist äußerst unanschaulich! Eine etwas anschaulichere Maßzahl erhält man, wenn man die Quadratwurzel aus dem Varianzwert zieht. Die so erhaltene Zahl σ heißt *Standardabweichung*. Sie wird in der Interpretation wieder in DM gemessen, also in derselben Einheit wie die Werte der Zufallsgröße und der Erwartungswert.

Allgemein legt man fest

> **Definition 181.1:** Als **Standardabweichung** der Zufallsgröße X bezeichnet man die Zahl $\sigma(X) := \sqrt{\operatorname{Var} X}$.

Auf Grund dieser Definition wird die Varianz Var oft auch mit σ^2 bezeichnet. Sind keine Mißverständnisse zu befürchten, dann schreibt man kurz σ statt $\sigma(X)$. In graphischen Darstellungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung W einer Zufallsgröße X trägt man gerne σ vom Erwartungswert μ aus nach beiden Richtungen ab. Figur 181.1 zeigt dies für die Zufallsgröße Gewinn X beim chuck-a-luck. Es ergibt sich $\sigma(X)$ zu $\sigma = \sqrt{\operatorname{Var} X} \approx \sqrt{1{,}24} \approx 1{,}11$.

Die Standardabweichung σ läßt sich bei Glücksspielen als Maß für das Risiko auffassen; dazu

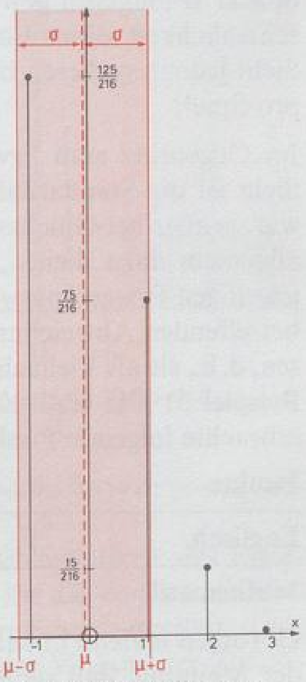

Fig. 181.1 Stabdiagramm zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße »Gewinn beim chuck-a-luck« mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ

Beispiel 2: Spieler A und Spieler B leisten beim Roulett (siehe Seite 22f.) einen Einsatz von jeweils 10 DM.

Spieler A

setzt auf »plein«, z. B. auf die 17.

Spieler B

setzt auf »rouge«.

Für die Zufallsgrößen Gewinn G_A und G_B erhalten wir dann folgende Aussagen:

g	-10	350
$W_{G_A}(g)$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$\mathscr{E} G_A = \frac{-360+350}{37} = -\frac{10}{37};$$

$$\operatorname{Var} G_A = (-10+\tfrac{10}{37})^2 \cdot \tfrac{36}{37} + (350+\tfrac{10}{37})^2 \cdot \tfrac{1}{37} = \frac{172\,627\,200}{50\,653};$$

$$\sigma_{G_A} \approx 58{,}378.$$

g	-10	10
$W_{G_B}(g)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$$\mathscr{E} G_B = \frac{-190+180}{37} = -\frac{10}{37};$$

$$\operatorname{Var} G_B = (-10+\tfrac{10}{37})^2 \cdot \tfrac{19}{37} + (10+\tfrac{10}{37})^2 \cdot \tfrac{18}{37} = \frac{5\,061\,600}{50\,653};$$

$$\sigma_{G_B} \approx 9{,}996.$$

Die Standardabweichung des Gewinns von Spieler A ist wesentlich größer als die Standardabweichung des Gewinns von Spieler B, wie man auch erwartet hat. Spieler A gewinnt nämlich zwar mit kleiner Wahrscheinlichkeit sehr viel im Vergleich zum Einsatz, verliert aber mit großer Wahrscheinlichkeit seinen Einsatz. Spieler B hingegen gewinnt und verliert mit etwa gleicher, relativ großer Wahrscheinlichkeit seinen Einsatz. A geht also ein größeres Risiko ein als B. Auf lange Sicht jedoch verlieren beide Spieler dasselbe, nämlich im Mittel $\frac{1}{37}$ des Einsatzes pro Spiel!

Im Gegensatz zum Erwartungswert $\mathscr{E}X$ als mittlerem Wert von X auf lange Sicht ist die Standardabweichung $\sigma(X)$ nicht so leicht anschaulich greifbar. So wie sie aber bei Glücksspielen als Maß für das Risiko verwendet wurde, kann sie allgemein dazu dienen, Abweichungen verschiedener Zufallsgrößen von ihrem jeweiligen Erwartungswert miteinander zu vergleichen. Es ist dazu nur nötig, die betreffenden Abweichungen mittels der jeweiligen Standardabweichung zu messen, d. h., sie als Vielfache des jeweiligen σ darzustellen. Zur Verdeutlichung diene

Beispiel 3: Die erste Klausur in den Grundkursen Englisch bzw. Mathematik erbrachte folgende Punkteverteilung:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Englisch	–	1	–	–	–	–	2	1	7	3	–	1	–	–	1	–
Mathematik	3	–	–	–	–	2	2	1	1	3	4	–	–	2	–	2

Dorothea erzielte in Mathematik 13 Punkte, in Englisch 11 Punkte. Sie ist nun der Meinung, daß sie in Mathematik relativ zu ihren Mitschülern besser abgeschnitten habe als zu ihren Mitschülern im Grundkurs Englisch; denn beide Arbeiten hatten den gleichen Durchschnitt von 8 Punkten, und sie liegt in Englisch nur 3 Punkte, in Mathematik jedoch 5 Punkte über diesem Durchschnitt.

Der Mathematiklehrer muß aber Dorotheas Euphorie dämpfen. Dorothea hat nämlich die Streuungen der Leistungen des jeweiligen Kurses um den Durchschnitt nicht berücksichtigt. Ein vernünftiges Abweichungsmaß sollte nämlich die Streuungen der Zufallsgröße in Rechnung stellen: Eine Abweichung um eine Einheit nach oben z. B. ist bei einer Zufallsgröße mit kleiner Streuung mehr wert als bei einer Zufallsgröße mit großer Streuung.

Die Standardabweichung der Zufallsgröße »Punktezahl in Mathematik« ergibt sich zu $\sigma_M = \sqrt{19{,}3} \approx 4{,}39$, die Standardabweichung von »Punktezahl in Englisch« zu $\sigma_E = \sqrt{6{,}625} \approx 2{,}57$. Die 5 Mathematikpunkte über dem Durchschnitt entsprechen also einer Abweichung von $\frac{5}{\sqrt{19{,}3}} \cdot \sigma_M = 1{,}138\,\sigma_M$, die 3 Englischpunkte über dem Durchschnitt hingegen einer Abweichung von $\frac{3}{\sqrt{6{,}625}} \cdot \sigma_E = 1{,}166\,\sigma_E$.

Somit hat Dorothea im Vergleich zum Kurs in Englisch tatsächlich besser abgeschnitten!

Merke: Will man Abweichungen vom Mittelwert bei verschiedenen Zufallsgrößen miteinander vergleichen, so ist es sinnvoll, diese Abweichungen als Vielfache der jeweiligen Standardabweichungen anzugeben.