Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

11. 5. Die Ungleichung von Bienaymé-Tschebyschow

11.5. Die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*

Wenn eine Zufallsgröße X den Erwartungswert μ hat, dann vermutet man, daß bei einer Ausführung des zugrundeliegenden Zufallsexperiments sich Werte der Zufallsgröße ergeben, die in der Nähe des Erwartungswertes μ liegen. Zur Untersuchung dieser Vermutung denken wir uns ein Intervall der Breite $2a$ (mit $a > 0$) symmetrisch um den Erwartungswert μ gelegt und fragen nach der Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsgröße X um mindestens a neben den Erwartungswert trifft. Anders ausgedrückt: Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße X Werte außerhalb des Intervalls $]\mu - a; \mu + a[$ annimmt.

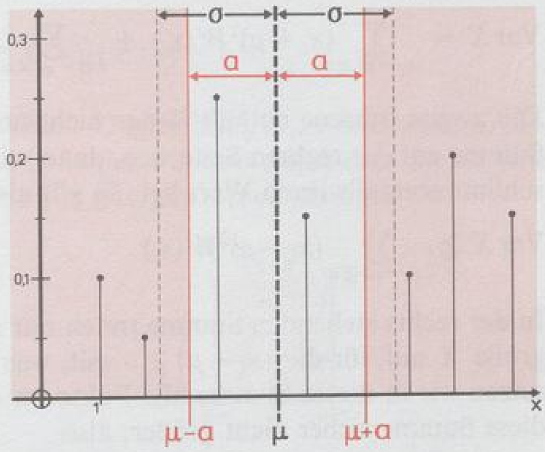

Fig. 183.1 Der rot unterlegte Teil veranschaulicht $P(|X - \mu| \geqq a)$.

Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $|X - \mu| \geqq a$ untersuchen. (Siehe auch Figur 183.1) Da die Varianz ein Maß für die Streuung der Werte der Zufallsgröße X um ihren Erwartungswert μ ist, liegt es nahe, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit von der Varianz der Zufallsgröße abhängen wird. Bei Zufallsgrößen mit großem Varianzwert müßte die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geqq a)$ bei gleichem a auch groß sein. Vergrößert man hingegen a, so müßte diese gesuchte Wahrscheinlichkeit bei festem X abnehmen. Es ist offensichtlich, daß diese Wahrscheinlichkeit von der jeweils vorliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße abhängt. Bei der Herleitung eines allgemeinen schwachen Gesetzes der großen Zahlen (siehe **14.7.**) bewies 1866 der russische Mathematiker *Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow* (1821 bis 1894)* eine Ungleichung, die die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geqq a)$ *unabhängig* von der vorliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung W_X abzuschätzen ermöglicht. Die Ungleichung und ihr Beweis finden sich bereits 1853 in einer Arbeit des französischen Statistikers *Irénée-Jules Bienaymé* (1796–1878)**.

Um nun die nach diesen beiden Mathematikern benannte Abschätzung unserer gesuchten Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geqq a)$ zu gewinnen, betrachten wir die Definitionsgleichung der Varianz der Zufallsgröße X, nämlich

$$\operatorname{Var} X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 W(x_i),$$

* Чебышев (Betonung auf der letzten Silbe). Die Arbeit erschien 1867 unter dem Titel *Des valeurs moyennes.* – Siehe Seite 425.
** Siehe Seite 399.

und zerlegen die rechts stehende Summe in zwei Teile, deren einer all diejenigen x_i enthält, die von μ mindestens a entfernt sind:

$$\operatorname{Var} X = \sum_{|x_i - \mu| \geqq a} (x_i - \mu)^2 W(x_i) + \sum_{|x_i - \mu| < a} (x_i - \mu)^2 W(x_i).$$

Die zweite Summe enthält lauter nicht-negative Summanden. Lassen wir diese Summe auf der rechten Seite weg, dann wird die rechte Seite kleiner oder behält schlimmstenfalls ihren Wert bei. Es gilt also

$$\operatorname{Var} X \geqq \sum_{|x_i - \mu| \geqq a} (x_i - \mu)^2 W(x_i).$$

In der rechts stehenden Summe treten nur mehr diejenigen Werte x_i der Zufallsgröße X auf, für die $|x_i - \mu| \geqq a$ gilt, was mit $(x_i - \mu)^2 \geqq a^2$ äquivalent ist. Ersetzen wir in dieser Summe alle Faktoren $(x_i - \mu)^2$ durch a^2, dann machen wir diese Summe sicher nicht größer; also

$$\operatorname{Var} X \geqq \sum_{|x_i - \mu| \geqq a} a^2 W(x_i) = a^2 \cdot \sum_{|x_i - \mu| \geqq a} W(x_i) = a^2 P(|X - \mu| \geqq a).$$

Da $a > 0$ war, gewinnen wir die Abschätzung der gesuchten Wahrscheinlichkeit durch Division mit a^2. Die eingangs vermutete Abhängigkeit von $\operatorname{Var} X$ und a zeigt

> **Satz 184.1: Die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*.**
> Besitzt eine Zufallsgröße X einen endlichen Erwartungswert μ und einen endlichen Varianzwert, dann gilt für jedes reelle $a > 0$:
>
> $$P(|X - \mu| \geqq a) \leqq \frac{\operatorname{Var} X}{a^2}$$

Aus der obigen Ungleichung erhält man sofort eine ihr äquivalente Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit, in das gegebene Intervall $]\mu - a; \mu + a[$ hineinzutreffen; es gilt nämlich

$$P(|X - \mu| < a) = 1 - P(|X - \mu| \geqq a), \quad \text{d.h.}$$

$$\boxed{P(|X - \mu| < a) \geqq 1 - \frac{\operatorname{Var} X}{a^2}}$$

Die Zahl $r_T := \dfrac{\operatorname{Var} X}{a^2}$ heißt manchmal auch ***Tschebyschow*-Risiko**. Sie ist eine obere Schranke für das **wahre Risiko** $P(|X - \mu| \geqq a)$, mit der Zufallsgröße X ihren Erwartungswert μ um mindestens a zu verfehlen.
Die gefundene Abschätzung kann je nach Verteilung der Zufallsgröße sehr genau oder sehr grob sein. (Vgl. Aufgabe 196/**61** und 196/**66**.) Sie wird sogar trivial, wenn $\operatorname{Var} X \geqq a^2$, weil dann die betreffende Wahrscheinlichkeit durch eine Zahl abgeschätzt wird, die mindestens 1 ist.
Die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* gibt uns die Möglichkeit, die Bedeutung der Standardabweichung σ als Streuungsmaß einer Zufallsgröße deut-

licher zu erkennen. Setzen wir nämlich $a =: t\sigma$ (mit $t > 0$) und beachten $\operatorname{Var} X = \sigma^2$, so erhalten wir

$$P(|X - \mu| \geqq t\sigma) \leqq \frac{1}{t^2} \quad \text{bzw.} \quad P(|X - \mu| < t\sigma) \geqq 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Für $t \leqq 1$ liefert die *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung keine interessante Aussage. Setzt man jedoch für t die Werte 2, 3 oder 4 ein, so erhält man die für jede Zufallsgröße (mit endlichen μ und $\operatorname{Var} X$)* gültigen Abschätzungen

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) \geqq \tfrac{3}{4} \ = 75\%$$
$$P(|X - \mu| < 3\sigma) \geqq \tfrac{8}{9} \ > 88{,}8\%$$
$$P(|X - \mu| < 4\sigma) \geqq \tfrac{15}{16} = 93{,}75\%,$$

die in Figur 185.1 symbolisch wiedergegeben sind. Die erste dieser Abschätzungen besagt beispielsweise, daß die Werte jeder Zufallsgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% innerhalb des 2σ-Bereichs um den Erwartungswert liegen. Das *Tschebyschow*-Risiko, diesen 2σ-Bereich zu verfehlen, beträgt 25%.

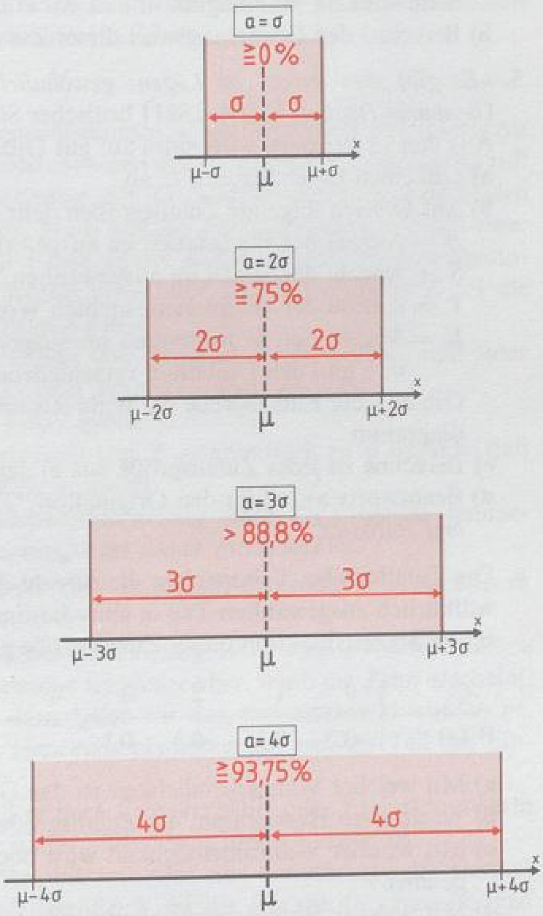

Fig. 185.1 Man trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens
- 0% in den σ-Bereich (trivial!)
- 75% in den 2σ-Bereich
- $88\frac{8}{9}\%$ in den 3σ-Bereich
- 93,75% in den 4σ-Bereich

Aufgaben

Zu 11.1.

1. Das chuck-a-luck werde folgendermaßen abgewandelt:
   a) Kein Einsatz; Auszahlung = Anzahl der Sechsen in DM,
   b) Einsatz 10 DM; Auszahlung z^4 DM, wobei z = Anzahl der Sechsen.
   Bestimme in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße Gewinn X und berechne ihren Erwartungswert.
2. Ein **Glücksspiel** heiße **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns null ist.
   Ändere beim chuck-a-luck die Auszahlung
   a) beim Ergebnis 666, **b)** beim Verlust so ab, daß das Spiel fair wird.

* Die beim *Petersburger Problem* (Aufgabe 189/**23**) aufgetretene Zufallsgröße »Auszahlung« erfüllt z. B. nicht diese Voraussetzungen.