Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

licher zu erkennen. Setzen wir nämlich $a =: t\sigma$ (mit $t > 0$) und beachten $\operatorname{Var} X = \sigma^2$, so erhalten wir

$$P(|X-\mu| \geqq t\sigma) \leqq \frac{1}{t^2} \qquad \text{bzw.} \qquad P(|X-\mu| < t\sigma) \geqq 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Für $t \leqq 1$ liefert die *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung keine interessante Aussage. Setzt man jedoch für t die Werte 2, 3 oder 4 ein, so erhält man die für jede Zufallsgröße (mit endlichen μ und $\operatorname{Var} X$)* gültigen Abschätzungen

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geqq \tfrac{3}{4} \;= 75\%$$
$$P(|X-\mu| < 3\sigma) \geqq \tfrac{8}{9} \;> 88{,}8\%$$
$$P(|X-\mu| < 4\sigma) \geqq \tfrac{15}{16} = 93{,}75\%,$$

die in Figur 185.1 symbolisch wiedergegeben sind. Die erste dieser Abschätzungen besagt beispielsweise, daß die Werte jeder Zufallsgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75% innerhalb des 2σ-Bereichs um den Erwartungswert liegen. Das *Tschebyschow*-Risiko, diesen 2σ-Bereich zu verfehlen, beträgt 25%.

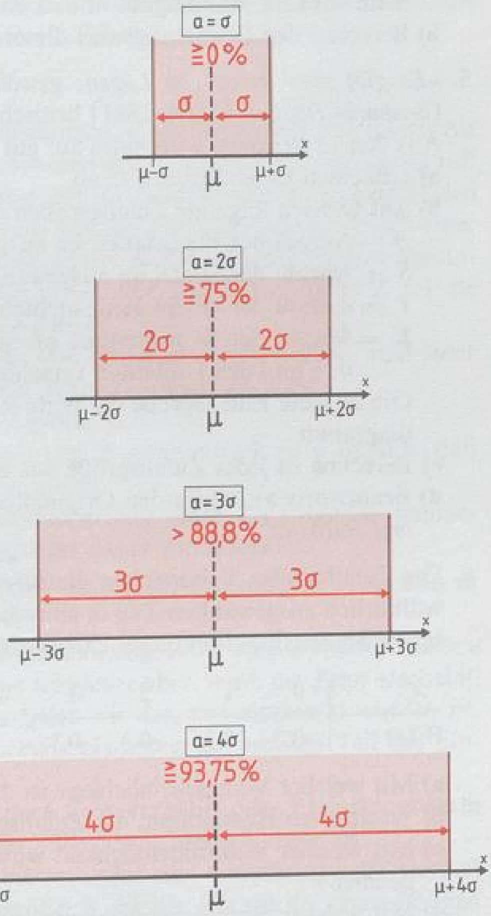

Fig. 185.1 Man trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens
- 0% in den σ-Bereich (trivial!)
- 75% in den 2σ-Bereich
- $88\frac{8}{9}\%$ in den 3σ-Bereich
- 93,75% in den 4σ-Bereich

Aufgaben

Zu 11.1.

1. Das chuck-a-luck werde folgendermaßen abgewandelt:
   a) Kein Einsatz; Auszahlung = Anzahl der Sechsen in DM,
   b) Einsatz 10 DM; Auszahlung z^4 DM, wobei z = Anzahl der Sechsen.
   Bestimme in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße Gewinn X und berechne ihren Erwartungswert.
2. Ein **Glücksspiel** heiße **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns null ist.
   Ändere beim chuck-a-luck die Auszahlung
   a) beim Ergebnis 666, **b)** beim Verlust so ab, daß das Spiel fair wird.

* Die beim *Petersburger Problem* (Aufgabe 189/**23**) aufgetretene Zufallsgröße »Auszahlung« erfüllt z. B. nicht diese Voraussetzungen.

WERDENDEN ELTERN
sieht Hellseher das Geschlecht des Babys voraus. Bei Nichteintreffen Geld zurück

3. a) Berechne das zu erwartende Einkommen des Hellsehers, wenn er zum Hellsehen eine Laplace-Münze verwendet und für eine Vorhersage a DM verlangt. Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt sei 0,514. 100 Personen schicken pro Monat einen Auftrag.

b) Kann der Hellseher sein Einkommen verbessern, ohne besser hellsehen zu müssen?

4. a) Zeichne für die Zufallsgröße »Augenzahl« beim einfachen Wurf eines Astragalus (siehe Seite 46f.) ein Stabdiagramm und ein Histogramm zur Breite 1.

b) Berechne den Erwartungswert dieser Zufallsgröße.

5. »*Es gibt drei Arten von Lügen: gewöhnliche Lügen, infame Lügen und die Statistik.*« (*Benjamin Disraeli* [1804–1881] britischer Staatsmann)
Aus den 13 Wörtern wird eines auf gut Glück ausgewählt.

a) Gib einen Ergebnisraum Ω an.

b) Auf Ω seien folgende Zufallsgrößen definiert:
$B :=$ Anzahl der Buchstaben im ausgewählten Wort,
$S :=$ Anzahl der Silben im ausgewählten Wort,
$I :=$ Anzahl der »i« im ausgesuchten Wort,
$K :=$ Anzahl der Konsonanten im ausgewählten Wort; dabei sollen alle von a, e, i, o, u und den Umlauten verschiedenen Buchstaben als Konsonanten gelten.
Gib zu jeder Zufallsgröße die Wahrscheinlichkeitsfunktion an und zeichne je ein Stabdiagramm.

c) Berechne zu jeder Zufallsgröße aus **b)** den Erwartungswert und deute ihn.

d) Beantworte **a)** – **c)** für den Originalton "*There are three kinds of lies: lies, damned lies, and statistics*".

6. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Stunden, die ein Fernsehgerät an einem willkürlich ausgewählten Tag in einer bestimmten Familie in Betrieb ist. Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsgröße gelte folgende Tabelle:

x	0	1	2	3	4	$\geqq 5$
$W(x)$	0,2	0,25	0,3	0,1		0

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Gerät 4 Stunden in Betrieb?

b) Zeichne ein Histogramm der Zufallsgröße X.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird höchstens, mindestens, genau 3 Stunden ferngesehen?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mehr als 1 Stunde, aber höchstens 3 Stunden ferngesehen?

e) Bestimme die Mindestanzahl der Stunden, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,5 täglich ferngesehen wird.

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau (mindestens) 2 Stunden ferngesehen wird unter der Voraussetzung, daß überhaupt ferngesehen wird?

g) Berechne den Erwartungswert von X und deute ihn.

7. In einer Schublade befinden sich 4 schwarze und 6 braune Socken. Man zieht einen Socken nach dem anderen heraus, bis man zwei gleichfarbige hat.

a) $S :=$ Anzahl der gezogenen Socken
Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion von S und zeichne ein Histogramm.

b) Berechne den Erwartungswert von S.

8. Es werde mit zwei Laplace-Würfeln gewürfelt. Bei 4 DM Einsatz gelte folgender Auszahlungsplan:

Augensumme	Auszahlung in DM
gerade Primzahl	9
ungerade Primzahl	5
gerade Nicht-Primzahl	3
ungerade Nicht-Primzahl	0

a) Stelle eine Wertetabelle für die Zufallsgröße $G :=$ »Gewinn« auf.
b) Stelle die Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von G auf und zeichne ihren Graphen (Abszisse $1 \triangleq 1\,\text{cm}$, Ordinate $1 \triangleq 7{,}2\,\text{cm}$).
c) Zeichne ein Histogramm.
d) Berechne den Erwartungswert von G.

9. *Das Morra-Spiel.* Zwei Spieler, die sich gegenübersitzen, schnellen jeweils gleichzeitig die rechte Hand vor und strecken dabei mindestens einen der 5 Finger aus. Gleichzeitig ruft jeder Spieler eine Zahl. Gewonnen hat derjenige, der die richtige Anzahl der von beiden Spielern ausgestreckten Finger gerufen hat. Meist wurden 5 Partien gespielt. Nach einer anderen Version griff der Gewinner einer Partie ab der Mitte eines Stabes eine Spannweite ab. Sieger war, wer zuerst das Stabende erreichte.* Die Zufallsgröße Z sei die Anzahl der von beiden Spielern ausgestreckten Finger.
a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z unter der Annahme, daß jeder Spieler jede Anzahl von Fingern mit gleicher Wahrscheinlichkeit zeigt.
b) Bestimme den Erwartungswert μ der Zufallsgröße Z.
c) Zeige, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Z symmetrisch zu μ ist, d. h., daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $P(Z = \mu + x) = P(Z = \mu - x)$.
d) Zeige allgemein: Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße symmetrisch zur Zahl a, dann ist a der Erwartungswert dieser Zufallsgröße.

10. *Christiaan Huygens* (1629–1695) behandelte 1657 in seinem *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* als Aufgabe XIII folgendes Problem:

»Ich spiele mit einem anderen unter folgender Bedingung: Einer wirft 2 Würfel in einem Wurf. Kommt die Sieben heraus, so gewinne ich; jener aber, wenn die Zehn erscheint; tritt jedoch irgend etwas anderes ein, dann teilen wir das, was eingesetzt worden ist, zu gleichen Teilen untereinander auf. Herauszubekommen ist, welcher Teil des Einsatzes jedem von uns bestimmt ist.«

Aus *Huygens*' Lösung ist ersichtlich, daß er nach dem Verhältnis der Erwartungswerte der Auszahlungen für die beiden Spieler sucht. – Bestimme dieses Verhältnis.

11. Ein Laplace-Würfel werde so oft geworfen, bis entweder eine 6 erscheint oder viermal nacheinander keine 6 erscheint. Die Zufallsgröße Z sei die Anzahl der dazu nötigen Würfe.
a) Stelle mit Hilfe der geworfenen Augenzahlen einen möglichst einfachen Ergebnisraum auf und gib seine Mächtigkeit an.
b) Gib die Ergebnismengen der Ereignisse $E_i := \{\omega \mid Z(\omega) = i\}$ an.
c) Gib die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Z an.
d) Berechne den Erwartungswert von Z.

* Das Morra-Spiel, das heute noch in Italien gespielt wird, ist sehr alt. *Ptolemaios Hephaistion* (1. Jh. n. Chr.) schreibt die Erfindung des Spiels der schönen *Helena* zu. Daß es bei diesem Spiel sehr auf die Ehrlichkeit der Spieler ankommt, zeigt ein altes Sprichwort, das *Cicero* (106–43) in *De officiis* (3,77) zitiert: »Wenn sie nämlich jemandens Ehrlichkeit und Gutartigkeit loben, dann sagen sie, er sei's wert, mit ihm im Dunkeln Fingerzeigen zu spielen.« Das Fingerzeigen – micare digitis – wurde bei den Römern so wie unser Knobeln sehr oft benützt, um Entscheidungen herbeizuführen. (Siehe z. B. *Sueton*, Aug. 13.) – *Pacioli* (um 1445–1517) erwähnt bei der Behandlung des problème des partis eine Morra mit 10 Fingern je Spieler. – Bei der heute üblichen Morra ist auch eine geschlossene Faust möglich; erstaunlicherweise zählt sie wie 1 Finger.

12. Eine Laplace-Münze wird so lange geworfen, bis eine der beiden Seiten
a) zum zweiten Mal, **b)** zum dritten Mal, **c)** zum n-ten Mal erscheint.
Gib einen Ergebnisraum an. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße »Anzahl der dazu nötigen Würfe« und berechne ihren Erwartungswert. (Im Fall **c)** genügt die Summendarstellung.)

•13. Aus den 32 Karten eines Schafkopfspiels* erhält jeder Spieler 8 Karten. Die höchsten Trümpfe sind die 4 »Ober« (= »Damen«). Wir betrachten folgende Zufallsgrößen:
$X :=$ »Anzahl der Ober im Blatt des Spielers A«,
$Y :=$ »Anzahl der Herzkarten im Blatt des Spielers A«.
a) Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der beiden Zufallsgrößen auf.
b) Berechne die Erwartungswerte von X und Y.

14. In einer Urne liegen vier Kugeln. Sie tragen die Zahlen 1, 2, 3 bzw. 4.
a) Es dürfen k Kugeln $(1 \leqq k \leqq 4)$ ohne Zurücklegen herausgenommen werden. Die Summe der auf den Kugeln stehenden Zahlen wird als Gewinn in DM ausbezahlt. Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsgrößen »Gewinn bei Entnahme von k Kugeln« auf.
b) Löse dieselbe Aufgabe für den Fall $k = 2$, aber mit Zurücklegen.
c) Berechne jeweils die Erwartungswerte.

15. Eine Zufallsgröße nehme genau 3 ganzzahlige Werte an, davon den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 und den Wert 100 mit der Wahrscheinlichkeit $0 < p < 0{,}5$. Wo muß der dritte Wert liegen, damit der Erwartungswert näher bei 100 als beim wahrscheinlichsten Wert liegt?

16. Beim Würfelspiel »Pentagramm« wird mit 3 Würfeln gespielt. Fällt eine Fünf, so erhält der Spieler 5 DM, bei 2 Fünfen erhält er 10 DM und bei 3 Fünfen 30 DM. Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße »Auszahlung« bei diesem Spiel.

17. Beim Würfelspiel »Die böse Drei« wird mit 2 Würfeln gespielt. Der Spieler leistet vor dem Wurf einen Einsatz von 3 DM. Tritt nun beim Wurf die Augenzahl Drei nicht auf, so erhält der Spieler die Augensumme in DM ausbezahlt. Tritt hingegen die Drei mindestens einmal auf, so hat er die Augensumme in DM zu zahlen. Ist das Spiel fair?

18. n Briefe werden unbesehen in n adressierte Umschläge gesteckt. X sei die Anzahl der Briefe, die richtig stecken. Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion und den Erwartungswert von X für **a)** $n = 3$, **•b)** $n = 4$.

19. Eine Lotterie laufe folgendermaßen ab: Man zahlt einen Einsatz von 10 DM und zieht eine Kugel aus einer Urne, die 4 rote und 6 schwarze Kugeln enthält. Je nach der gezogenen Farbe zieht man aus einer roten bzw. schwarzen Urne wieder eine Kugel. Die Zahl auf dieser Kugel ist die Auszahlung in DM.
Die rote Urne enthält Kugeln mit den Zahlen 20, 20, 10, 10 und 0. Die schwarze Urne enthält Kugeln mit den Zahlen 100, 10, 0 und 0.
a) Gib die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße Gewinn an.
b) Zeichne ein Stabdiagramm. **c)** Berechne den Erwartungswert.

20. Theodor und Dorothea setzen je 10 DM ein und vereinbaren folgendes Glücksspiel: In drei Urnen liegen verschiedene Anzahlen von weißen oder schwarzen Kugeln:
U_1: 3w, 5s U_2: 4w, 3s U_3: 4w, 3s
Theodor zieht eine Kugel aus U_1 und legt sie in U_2, mischt U_2 und zieht dann eine Kugel aus U_2; diese legt er in U_3, mischt und zieht schließlich aus dieser Urne eine Kugel. Ist sie schwarz, so erhält Dorothea das Geld auf dem Tisch, andernfalls Theodor.

* Schafkopf ist eines der ältesten deutschen Kartenspiele, das 4 Spieler mit deutschen oder französischen Karten spielen. Der Name rührt davon her, daß ursprünglich beim Ankreiden der gewonnenen Partien 8 Striche zum Bild eines Schafkopfes zusammengefügt wurden.

a) Wer ist im Vorteil? Berechne dazu den Erwartungswert der Zufallsgröße »Gewinn von Theodor«.
b) Wie können die Einsätze gewählt werden, damit das Spiel fair ist?

21. **a)** Theodor bietet Dorothea folgendes Spiel an: Dorothea soll 20 DM auf den Tisch legen und zweimal das Glücksrad von Figur 189.1 drehen. Zeigt der Zeiger auf 2, so verdoppelt Theodor den gerade auf dem Tisch liegenden Betrag. Weist der Zeiger auf $\frac{1}{2}$, so halbiert er ihn. Dorothea erhält schließlich den Betrag, der auf dem Tisch liegt, nachdem das Rad zweimal gedreht worden ist. Berechne den Erwartungswert des Gewinns von Dorothea.

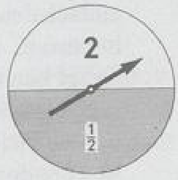

Fig. 189.1

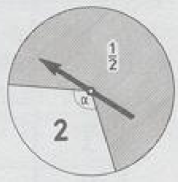

Fig. 189.2

b) Wie groß muß der Winkel α in Figur 189.2 gewählt werden, damit das Spiel fair ist?
c) $\mathscr{E}_\alpha(X)$ sei der Erwartungswert des Gewinns X von Dorothea in Abhängigkeit vom Winkel α. Zeichne den Graphen von $\alpha \mapsto \mathscr{E}_\alpha(X)$; $D = [0; 2\pi]$.
d) Bestimme die Extremwerte der Funktion $\alpha \mapsto \mathscr{E}_\alpha(X)$.

22. **a)** Theodor setzt beim Roulett 10 DM auf »pair«. Die Zufallsgröße G sei sein Gewinn. Berechne ihren Erwartungswert.
b) Dorothea hat sich ein sicheres System zum Gewinnen ausgedacht. Sie setzt 10 DM auf »pair«. Gewinnt sie, so hört sie auf. Verliert sie jedoch, so verdoppelt sie den Einsatz und setzt wieder auf »pair«.
1) Wie oft kann sie maximal spielen, wenn sie 1000 DM bei sich hat?
2) Wie groß ist der Erwartungswert ihres Gewinns bei diesem Spielsystem?
3) Wie groß ist der Erwartungswert ihres Gewinns, wenn ihr beliebig viel Geld zur Verfügung steht?

23. *Das Petersburger Problem* von *Nikolaus I. Bernoulli* (1687–1759)*: Theodor wirft eine Laplace-Münze so oft, bis Adler erscheint. Dorothea muß 2^i DM an Theodor bezahlen, wenn Adler zum ersten Mal beim i-ten Wurf erscheint.
a) Welchen Einsatz muß Theodor vor Spielbeginn an Dorothea leisten, damit das Spiel fair ist, falls
1) nach höchstens 10 Würfen abgebrochen wird; dabei muß Dorothea 2^{11} DM bezahlen, wenn 10mal Zahl fällt;
2) die Wurfzahl unbegrenzt ist.
b) Die Lösung von **2** zeigt, daß Dorothea mit der Annahme des Spiels eine Verpflichtung eingegangen ist, die sie nicht erfüllen kann. *Siméon-Denis Poisson* (1781–1840)** hat daher folgende Variante des Petersburger Spiels vorgeschlagen. Dorothea besitzt ein Kapital K. Sie zahlt nach der Spielregel von *Nikolaus Bernoulli*, solange es ihr möglich ist. Übersteigt ihre Zahlungsverpflichtung jedoch ihr Kapital, so händigt sie dieses an Theodor aus. Welchen Einsatz muß Theodor bei dieser Variante leisten, damit das Spiel fair ist? Gib die Einsätze für $K = 32$ DM, 1024 DM, 10^6 DM und 10^9 DM an.

* *Geronimo Cardano* (1501–1576) beschäftigt sich mit dieser Aufgabe bereits im Kapitel LXI/17 seiner *Practica arithmeticae generalis* (1539). *Nikolaus I. Bernoulli* stellt das Problem im Brief vom 9. 9. 1713 an *Montmort* (1678–1719), der diesen in der 2. Auflage seines *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (1713) abdruckt. *Gabriel Cramer* (1704–1752) schickt am 21. 5. 1728 einen Lösungsvorschlag an *Nikolaus*, den wiederum *Daniel Bernoulli* (1700–1782) als Anhang zu seiner eigenen Lösung *Specimen Theoriae novae de mensura sortis* abdruckt, die 1738 in Bd. 5 der *Petersburger Commentarien* zu den Jahren 1730/31 erscheint. So kommt das Problem zu seinem Namen.

** Siehe Seite 421.

•**24.** Eines der beliebtesten Glücksspiele in Las Vegas (USA) ist Keno, eine Art Zahlenlotto*. Kenoscheine findet man in jedem Hotelzimmer und auf jedem Restauranttisch. Etwa alle 5 Minuten findet eine Ausspielung statt, bei der 20 der 80 Zahlen gezogen werden. In der einfachsten Form des Keno kreuzt der Spieler auf dem Schein (Bild) mindestens eine, höchstens aber 15 der 80 Zahlen an; der Mindesteinsatz beträgt 1 \$. Die Auszahlung hängt von der Anzahl der richtig angekreuzten Zahlen ab und ist proportional zum Einsatz bis höchstens 25 000 \$. Es sei nun ein Einsatz von 1 \$ angenommen.

a) Wie viele verschiedene Ausspielungen sind beim Keno möglich?

b) Theodor möchte bis zu 8 Zahlen ankreuzen und vergleicht die in einem Casino angebotenen Spielpläne: Berechne jeweils den Erwartungswert der Zufallsgröße Gewinn.

Spiel-typ	Anzahl der angekreuzten Zahlen	Anzahl der richtigen Zahlen	Aus-zahlung in \$
I	1	1	3
II	2	2	12
III	3	2	1
		3	42
IV	4	2	1
		3	4
		4	112
V	5	3	2
		4	20
		5	480
VI	6	3	1
		4	4
		5	88
		6	1 500
VII	7	4	2
		5	24
		6	360
		7	5 000
VIII	8	5	9
		6	90
		7	1 500
		8	19 000

c) Theodor stellt fest, daß in verschiedenen Casinos von Las Vegas für den Spieltyp VIII verschiedene Spielpläne angeboten werden. Für welches der angegebenen Casinos wird er sich wohl entscheiden? Oder geht er lieber ins Casino der Aufgabe **b)**?

Anzahl der richtigen Zahlen	Auszahlung in \$ in Casino A	B	C	D	E
5	9	5,30	8	8	8
6	85	70	75	84	80
7	1 650	2 000	1 490	1 640	1 800
8	18 000	25 000	16 000	17 850	25 000

25. Von einem gut gemischten Bridgespiel wird eine Karte nach der anderen aufgedeckt. Der erste schwarze König erscheint an k-ter Stelle.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsgröße $S :=$ Stelle des ersten schwarzen Königs.

b) Berechne den Erwartungswert dieser Zufallsgröße und deute ihn.

26. Ein Gerät enthält 3 Bauteile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Bauteil Nr. k innerhalb eines Jahres ausfällt, beträgt $0{,}1 \cdot (k+1)$, unabhängig vom Ausfallen der anderen Bauteile. Bestimme den Erwartungswert der Zufallsgröße Anzahl der während eines Jahres funktionierenden Bauteile.

•27. In einem Weinkeller wurde in genau einem der n Fässer der Wein vom entlassenen Kellermeister aus Rache vergiftet. Zur Ermittlung des vergifteten Fasses geht man folgendermaßen vor. Man teilt die Fässer in 2 möglichst gleich große Gruppen auf; dann zapft man aus jedem Faß einer der beiden Gruppen eine Probe in ein Gefäß ab und untersucht diese Mischung auf Giftigkeit. Man setzt das Verfahren mit der Gruppe, die das Gift enthält, in gleicher Weise fort, bis das Giftfaß entdeckt ist. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der dazu nötigen Gifttests. Bestimme ihren Erwartungswert

a) falls $n = 8$, **b)** falls $n = 11$, **c)** allgemein.

•28. In der Informationstheorie wird jedem Zeichen aus einem Zeichenvorrat als *syntaktischer Informationsgehalt* der binäre Logarithmus aus dem reziproken Wert der Auftretenswahrscheinlichkeit dieses Zeichens zugeordnet. Dadurch ist eine Zufallsgröße auf der Menge der Zeichen definiert. Den Erwartungswert dieser Zufallsgröße nannte 1948 *Claude Elwood Shannon* (1916–2001) *Entropie* der Nachrichtenquelle. Berechne die Entropie H für folgende Quelle:

Zeichen	a	b	c	d	e
Auftretenswahrscheinlichkeit	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Wie läßt sich die Entropie interpretieren?

29. *Jakob Bernoulli* (1655–1705) behandelt zum Abschluß des 3. Teils seiner *Ars Conjectandi* das Spiel mit den blinden Würfeln (*De alea tesserarum caecarum*)**.

a) »Problem XXIII: Blinde Würfel nennt man die sechs, bei unseren Jahrmarktsgauklern häufig zu findenden Würfel, welche zwar die Gestalt gewöhnlicher Würfel, aber auf fünf Seitenflächen keine Augen haben. Auf der sechsten Seitenfläche trägt der erste Würfel ein Auge, der zweite zwei Augen, ..., der sechste sechs Augen, so daß die Summe aller Augen auf den sechs Würfeln gleich 21 ist. Solche Würfel legen jene Schwindler, welche die Jahrmarktsbesucher prellen wollen, zusammen mit einer Liste auf, in welcher die für alle Augenzahlen von 1 bis 21 zu gewinnenden Geldpreise verzeichnet sind, wie dies z. B. auch die weiter unten folgende Tafel zeigt. Wer nun sein Glück versuchen will, zahlt dem Glückshafenmann einen Pfennig und wirft dann jene sechs Würfel auf das Spielbrett; wirft er eine bestimmte Anzahl Augen, so erhält er den ausgesetzten Preis, wirft er aber kein Auge, so ist sein Einsatz verloren.«

Augensumme	0	1–8	9–13	14–16	17	18	19	20	21
Preis in Pf	0	1	2	3	4	5	12	45	90

Man berechne die Hoffnungen der Spieler unter der Annahme, daß die blinden Würfel L-Würfel sind.

* Keno entstand vor über 2000 Jahren in China. Verbreitung im Westen der USA erfuhr er durch die im 19. Jh. beim Eisenbahnbau beschäftigten Chinesen.

** *Geronimo Cardano* (1501–1576) betrachtet diese Aufgabe in Cap. XXXII seines *Liber de ludo aleae*, ohne sie lösen zu können. Es gelingt ihm jedoch, den Erwartungswert der Augensumme richtig zu bestimmen – was wir erst in Aufgabe 216/**27** angehen wollen.

b) »Ich sah einst einen Marktschreier, der den Umstehenden, um sie anzulocken, die nachstehende Vergünstigung anbot:
Problem XXIV: Der Spielbudenbesitzer verpflichtet sich, dem Spieler nach 5 Spielen alle seine der Reihe nach eingesetzten Pfennige zurückzugeben, wenn dieser fünfmal hintereinander kein Auge wirft. Welche Hoffnungen haben jetzt beide?«

•**c)** Zum Abschluß bemerkt *Bernoulli*, »daß ein Glückshafenmann einen noch größeren Gewinn [als in **a)**] für sich erzielen kann, wenn er sich verpflichtet, dem Spieler seinen gleich zu Beginn zu leistenden Einsatz von 2 Pf zurückzugeben, falls dieser zweimal hintereinander kein Auge wirft.«*

30. In einer Urne befinden sich 10 von 1 bis 10 numerierte Kugeln. Es werden der Urne 2 Kugeln entnommen. Die Zufallsgröße G sei die größte Nummer, die dabei gezogen wird. Berechne Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert von G, falls
a) mit Zurücklegen, **b)** ohne Zurücklegen gezogen wird.

•**31.** Aufgabe **30** soll nun verallgemeinert werden. In einer Urne befinden sich τ von 1 bis τ numerierte Kugeln. Es werden n Kugeln entnommen. Die Zufallsgröße G sei die größte Nummer, die dabei gezogen wird.
a) Ziehen mit Zurücklegen
1) Berechne allgemein den Erwartungswert der Zufallsgröße G.
2) Werte das Ergebnis von **1)** für $n = 1, 2, 3$ aus.
3) Gib unter Verwendung von $\int\limits_0^\tau x^k \mathrm{d}x$ eine Näherungsformel für $\mathscr{E}G$ an.
4) Berechne den Erwartungswert näherungsweise für $\tau = 100$ und $n = 1, 2, 3, 10, 100$.
b) Ziehen ohne Zurücklegen
1) Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße G unter Verwendung von $\sum\limits_{s=0}^{S} \binom{k+s}{k} = \binom{k+S+1}{k+1}$. (Beweis durch vollständige Induktion möglich.)
2) Berechne den Erwartungswert für $\tau = 100$ und $n = 1, 2, 3, 10, 100$.

•**32.** Berechne die mittlere Lebenserwartung M_0 eines Neugeborenen und M_x eines x-jährigen unter der Voraussetzung, daß die Todesfälle jeweils in der Mitte des Altersintervalles $[x; x+1[$ eintreten und daß ferner $l_{101} = 0$ ist. Wie groß ist also nach Tabelle 159.1 die mittlere Lebenserwartung
a) eines/einer 80jährigen,
b) eines neugeborenen, einjährigen bzw. zweijährigen Knaben,
c) eines neugeborenen, einjährigen bzw. zweijährigen Mädchens?
Was besagen diese Ergebnisse?

Zu 11.2.

33. Stelle die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße Gewinn beim chuck-a-luck auf und zeichne ihren Graphen.

34. **a)** Stelle die kumulativen Verteilungsfunktionen der Zufallsgrößen B, S, I und K aus Aufgabe 186/**5. b)** auf und zeichne jeweils ihren Graphen.
b) Berechne $F_B(4{,}2)$, $F_S(4{,}2)$, $F_I(4{,}2)$ und $F_K(4{,}2)$.

35. Stelle die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße
a) G aus Aufgabe 187/**8**, **b)** Z aus Aufgabe 187/**11** auf und zeichne ihre Graphen.

* Das aus dem 16. Jh. stammende neuniederländische *loterije = Glücksspiel* verdrängt im 18. Jh. das altheimische *Glückshafen*. Dieser ist vermutlich in Italien entstanden. Die früheste Nachricht von einem Glückshafen auf deutschem Boden stammt aus München aus dem Jahre 1467 anläßlich des Tiburtius-Schießens; Augsburg folgt 1470, Basel 1471, Erfurt 1477. Als Einrichtung zur Unterstützung der Armen findet man ihn auf dem Münchener Oktoberfest seit 1816, ausgenommen die Zeit von 1844 bis 1850. Seit 1947 übernimmt das Bayerische Rote Kreuz die Ausrichtung.

36. Bestimme die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X aus Aufgabe 186/**6** und zeichne ihren Graphen.

37. Die kumulative Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße sei wie folgt definiert:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & & -\infty < x < 0 \\ 0{,}17 & & 0 \leqq x < 1 \\ 0{,}23 & \text{falls} & 1 \leqq x < 2 \\ 0{,}58 & & 2 \leqq x < 3 \\ 1 & & 3 \leqq x < +\infty \end{cases}$$

Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsgröße auf.

38. Beweise: $W(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

•39. Für zwei reelle Zahlen $a < b$ werden für die Zufallsgröße X folgende Ereignisse betrachtet:

a) Der Wert der Zufallsgröße ist höchstens a,
- ist größer als a,
- ist kleiner als a,
- ist mindestens a.

b) Der Wert der Zufallsgröße ist größer als a, aber höchstens b;
- ist mindestens a, aber höchstens b;
- ist mindestens a, aber kleiner als b;
- ist größer als a, aber kleiner als b.

Stelle in jedem Fall eine Formel für die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse auf unter Verwendung der kumulativen Verteilungsfunktion und/oder der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

c) Wie vereinfachen sich diese Formeln, wenn $a = x_i$ und $b = x_k$ ist, wobei x_i und x_k Werte der Zufallsgröße X sind?

•40. Eine Laplace-Münze werde so oft geworfen, bis entweder Adler erscheint oder fünfmal nacheinander kein Adler erscheint. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der dazu nötigen Würfe.

a) Zeichne die kumulative Verteilungsfunktion von X. (Einheit auf der Hochwertachse $\hat{=}$ 8 cm.)

b) Zeichne die Graphen folgender auf $\mathbb{R}$ definierter Funktionen:

$g\colon x \mapsto P(X < x) \qquad h\colon x \mapsto P(X \geqq x) \qquad k\colon x \mapsto P(X > x)$

c) Wie kann man die Funktionsterme $g(x)$, $h(x)$ und $k(x)$ aus **b)** durch $F(x)$ und $W(x)$ ausdrücken, wenn F die kumulative Verteilungsfunktion aus **a)** und W die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X sind?

••41. Jede Zahl x, für die sowohl $P(X \leqq x) \geqq p$ als auch $P(X \geqq x) \geqq 1 - p$ gilt, heißt **Quantil** p**-ter Ordnung** der Zufallsgröße X. (Siehe Figur 193.1.) Einige Quantile werden besonders häufig verwendet und haben daher eigene Namen*, und zwar
Median für $p = \frac{1}{2}$,
erstes oder **unteres Quartil** für $p = \frac{1}{4}$ und
drittes oder **oberes Quartil** für $p = \frac{3}{4}$.

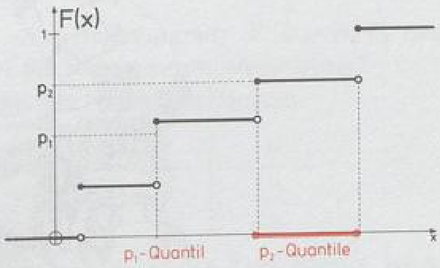

Fig. 193.1 Quantile der Ordnung p_1 bzw. p_2.

* lat.: *quantus?* = wie groß? – *quarta* = der 4. Teil – *medianus* = in der Mitte liegend.
Den Ausdruck »Median« prägte 1843 *Antoine Augustin Cournot* (1801–1877), »Quartil« führte 1879 *Donald McAlister* (1854–1934) ein, die Verallgemeinerung »Quantil« 1940 *Maurice George Kendall* (1907–1983). 1885 bildete *Francis Galton* (1822–1911) die **Percentile** zu $p = 0{,}01$.

a) Berechne zur Zufallsgröße X aus Aufgabe **40** die Mediane, die ersten Quartile, die dritten Quartile und die Quantile der Ordnung 90%.
b) Für welche p-Werte ist die Zahl 2 bzw. die Zahl 2,5 ein Quantil p-ter Ordnung?

Zu 11.3.

42. Die Zufallsgröße X sei die Augenzahl beim Wurf eines Laplace-Würfels. Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen und die Erwartungswerte folgender Zufallsgrößen:
$A := X + 1 \quad B := 2X \quad C := 2X + 1 \quad D := (X - 3{,}5)^2 \quad Z := e^X$

43. Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Adler beim 4fachen Wurf einer Laplace-Münze. Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen und die Erwartungswerte folgender Zufallsgrößen:
$A := X - 2 \quad B := |X - 2| \quad C := (X - 2)^2$
$D := (X - 2)^3 \quad E := \sin \frac{1}{2}\pi X \quad F := \sin \pi X$

Zu 11.4.

44. Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Augenzahl«
a) beim Wurf mit einem Laplace-Würfel,
b) beim Wurf mit einem Astragalus (siehe Seite 46f.).

•45. Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Augensumme« beim Wurf zweier Laplace-Würfel.

•46. a) Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Anzahl der ausgestreckten Finger« beim Morraspiel (siehe Aufgabe 187/9).
b) Zeichne in ein Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße den Erwartungswert und die Standardabweichung ein.

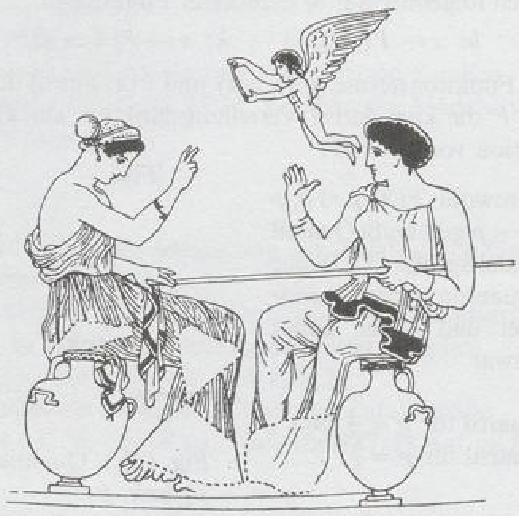

Fig. 194.1 Zwei junge Frauen beim Morra-Spiel – Rotfigurige attische Hydria aus Nola, um 420 v. Chr. – Slg. ex Czartoryski, Warschau, Nationalmuseum

47. Berechne jeweils Erwartungswert und Varianz für die Zufallsgröße »Augenzahl eines *Efron*-Würfels« aus Aufgabe 160/**26**.

48. Berechne jeweils Erwartungswert und Varianz für die Zufallsgröße »Sektorzahl« eines Glücksrads nach *D. Morgenstern* aus Aufgabe 161/**27**.

49. Berechne die Standardabweichungen der Zufallsgrößen X und Y von Aufgabe 188/**13**.

50. Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Auszahlung« von Aufgabe 188/**16**.

•**51.** Berechne die Standardabweichung der Zufallsgröße »Auszahlung« von Aufgabe 188/**17**.

52. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Note« beim würfelnden Lehrer (Aufgabe 67/**13**).

53. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Spieldauer« des Wurfpfeilspiels (engl. darts) aus Aufgabe 67/**12. a**).

54. **a)** Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Spieldauer« des Spiels »Ziehen einer schwarzen Kugel« aus Aufgabe 67/**10**.

b) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Spieldauer unter der Bedingung, daß Berta siegt«.

55. Die Zufallsgröße X nimmt die Werte 0 und 1 mit den Wahrscheinlichkeiten q bzw. p an. Zeige, daß $\mathscr{E}X = p$ und $\operatorname{Var} X = pq$ ist.

•**56.** Eine Zufallsgröße nehme die Werte $1, 2, \dots, n$ an und sei gleichmäßig verteilt. Berechne Erwartungswert und Varianzwert dieser Zufallsgröße.

57. Bei 2 Parallelklassen ergaben sich bei einer Prüfung folgende Notenverteilungen:

Note	1	2	3	4	5	6
Klasse a	0	4	7	5	3	1
Klasse b	1	3	5	7	4	0

a) Zeichne die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsgrößen $X_i :=$ »Note eines beliebig aus Klasse i ausgewählten Schülers«, $i = \text{a, b}$.

b) Zeige, daß die Erwartungs- und Varianzwerte der beiden Zufallsgrößen übereinstimmen, obwohl die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen verschieden sind.

58. Bei Plattenspielern kommt es darauf an, daß die Drehzahl möglichst konstant bleibt. Die Antriebsmotoren zweier Firmen A und B werden getestet. Dabei werden die Abweichungen vom Sollwert in 4 Stufen angegeben. Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer solchen Abweichung gilt:

Abweichungsgrad	0	1	2	3
Firma A	0,70	0,20	0,06	0,04
Firma B	0,76	0,04	0,20	0

Berechne den Erwartungswert der Zufallsgröße »Abweichungsgrad« X_i $(i = \text{A, B})$ und die Standardabweichungen. Welche Firma liefert die besseren Antriebsmotoren?

59. Zwei Schulaufgaben ergaben in zwei Klassen folgende Notenverteilungen:

Note	1	2	3	4	5	6	μ
Schülerzahl Klasse 1	5	2	5	5	2	1	3,0
Schülerzahl Klasse 2	1	2	13	10	8	6	4,0

Schüler A hat in Klasse 1 die Note 2 erhalten, Schüler B in Klasse 2 die Note 3. Beide liegen also um 1 Notenstufe über ihrem Klassenmittel. Welcher Schüler hat relativ zu seiner Klasse besser abgeschnitten?

60. In einer Schulaufgabe erreicht ein Schüler 32 Punkte in Algebra und 27 Punkte in Geometrie. Durchschnittlich wurden in Algebra 26 Punkte, in Geometrie 22 Punkte erreicht. In welchem Fach war der Schüler besser, wenn die zugehörigen Standardabweichungen 5,8 bzw. 4,5 betrugen?

Zu 11.5.

61. Beim Wurf einer L-Münze werde vereinbart: Fällt Zahl, so verfällt der Einsatz von 1 DM. Fällt Wappen, so werden 2 DM ausgezahlt.

a) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße Gewinn.

b) Zeige, daß in der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* (Satz 184.1) für $a = 1$ hier das Gleichheitszeichen gilt; d.h., daß das *Tschebyschow*-Risiko hier gleich dem wahren Risiko ist.

c) Berechne $P(|X - \mu| \geqq a)$ für $a = 0{,}5$ und $a = 2$.
Vergleiche damit die jeweilige Abschätzung dieser Wahrscheinlichkeit durch die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*.

62. In einer Urne liegen vier Kugeln, die mit den Zahlen 0, 1, 2 und 3 beschriftet sind. Man zieht zwei Kugeln zugleich. Die Zufallsgröße X sei die größere der beiden gezogenen Zahlen. Berechne $P(|X - \mu| \geqq a)$ und untersuche die Genauigkeit der *Tschebyschow*-Abschätzung für

a) $a = 1$, **b)** $a = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, **c)** $a = 3$, **d)** $a = 10$.

63. X sei die Augensumme beim Wurf zweier L-Würfel. Bestimme $P(|X - \mu| < a)$ für $a = 2$, $a = \sigma$, $a = 2\sigma$ und $a = 3\sigma$ und vergleiche dazu jeweils die Abschätzung durch die *Tschebyschow*-Ungleichung.

64. Für die Zufallsgröße X gelte $\operatorname{Var} X = 2$. Wie groß muß a gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsgröße Werte annimmt, die sich um weniger als a vom Erwartungswert unterscheiden, mindestens

a) 50%, **b)** 90%, **c)** 95%, **d)** 99% beträgt?

65. Als *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung wird für nicht-konstante Zufallsgrößen X manchmal auch die Abschätzung

$$P(|X - \mu| > a) < \frac{\operatorname{Var} X}{a^2}$$

bezeichnet.

a) Beweise diese Form der Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*.

b) Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $P(|X - \mu| \leqq a)$?

66. Eine Zufallsgröße X besitzt die Verteilung

x	$-t$	0	t
$W(x)$	$\frac{1}{2t^2}$	$1 - \frac{1}{t^2}$	$\frac{1}{2t^2}$

Berechne $\mathscr{E}X$ und $\operatorname{Var} X$ und zeige, daß für $a = t\sigma$ die *Bienaymé-Tschebyschow*-Ungleichung zu einer Gleichung wird.

67. Beweise: Ist Y eine nicht negative Zufallsgröße mit endlichem Erwartungswert, und ist $k > 0$, dann gilt $P(Y \geqq k) \leqq \dfrac{\mathscr{E}(Y)}{k}$.

Welche Abschätzung ergibt sich für $P(Y > k)$?

68. Beweise die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* mit Hilfe des Satzes von Aufgabe **67**.