Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

11. 1. 1. Einführendes Beispiel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

11. Zufallsgrößen

11.1. Zufallsgrößen und ihr Erwartungswert

11.1.1. Einführendes Beispiel

Auf einem Rummelplatz wird in einer Glücksbude folgendes Spiel angeboten: Der Spieler leistet 1 DM Einsatz, darf eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ nennen und dann 3 Würfel werfen. Zeigt mindestens einer der Würfel seine Zahl, so erhält er vom Budenbesitzer den Einsatz zurück und außerdem für jeden Würfel, der diese Zahl zeigt, noch zusätzlich 1 DM. Erscheint seine Zahl nicht, so verfällt der Einsatz. (Ein solches Spiel ist in den USA unter dem Namen *chuck-a-luck** bekannt.) Wir erinnern an die Beziehung

GEWINN = AUSZAHLUNG minus EINSATZ.

Üblicherweise bezeichnet man negativen Gewinn als Verlust. Der Spieler kann also entweder 1 DM verlieren oder 1 DM bzw. 2 DM bzw. 3 DM gewinnen. Natürlich wird sich jeder Spieler dafür interessieren, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Ereignisse eintreten. Um diese Frage zu klären, müssen wir das zugrundeliegende Zufallsexperiment untersuchen. Es handelt sich um einen 3fachen Würfelwurf. Als Ergebnisraum Ω bietet sich die Menge aller Tripel abc an, wobei $1 \leqq a, b, c \leqq 6$ gilt. Ω enthält also $6^3 = 216$ Elemente. Jedem solchen Ergebnis ist durch die Spielregel eine der Gewinnzahlen $3, 2, 1, -1$ zugeordnet. Dadurch ist der Gewinn X als eine Funktion auf dem Ergebnisraum Ω definiert, nämlich $X: \omega \mapsto X(\omega)$; $D_X = \Omega$;
Wertemenge $= \{-1, 1, 2, 3\}$.

Da die Werte der Funktion X vom Zufall bestimmt werden, nennt man X eine **Zufallsgröße auf Ω**.**

Um die Wertetabelle dieser Funktion Gewinn X aufstellen zu können, nehmen wir an, daß der Spieler die Sechs als seine Glückszahl gewählt hat. Figur 165.1 veranschaulicht dann diese Funktion X, deren Wertetabelle folgendes Aussehen hat:

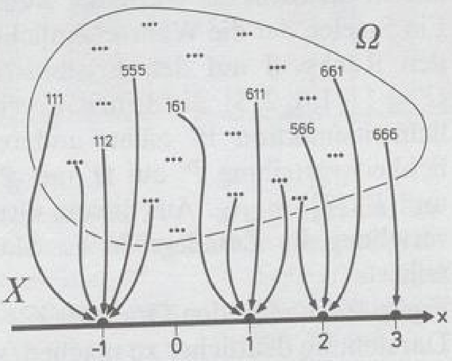

Fig. 165.1 Veranschaulichung der Zufallsgröße X beim chuck-a-luck

ω	666	665	664	…	655	654	…	555	554	…	111
$X(\omega)$	3	2	2	…	1	1	…	-1	-1	…	-1

* to chuck = werfen

** Im *Mémoire sur les Probabilités* (1780), veröffentlicht 1781 im Band für 1778 der *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, spricht *Laplace* von einer *quantité variable*; auf Grund seiner deterministischen Einstellung faßt er sie jedoch nicht als eine Größe auf, die vom Zufall abhängt, wie sie später von *Tschebyschow* (1821–1894) konzipiert wurde, der aber immer nur von einer *Größe* spricht. [Hinweis von *Ivo Schneider*:] Erst 1901 führte *Pawel Alexejewitsch Nekrassow* (*a* betont, Некрасов, 1853–1924) den Begriff *Zufallsgröße* bzw. *zufällige Variable* ein, den schließlich *Alexander Alexandrowitsch Tschuprow* (*o* betont, Чупров, 1874–1926) zum Grundpfeiler aller stochastischen Begriffsbildungen machte. Heute bezeichnet man mit Zufallsgröße die reellwertigen zufälligen Variablen.

Die Ereignisse, für die sich der Spieler interessiert, heißen »Der Gewinn X beträgt x DM«, d.h. »Die Zufallsgröße X nimmt den Wert x an« mit $x \in \{-1, 1, 2, 3\}$, was wir kurz schreiben wollen als »$X = x$«. Die zugehörige Ergebnismenge ist $\{\omega \mid X(\omega) = x\}$. In unserem Falle ergibt sich

»$X = 3$« = Menge aller Tripel aus Ω, die genau 3 Sechsen enthalten = $\{666\}$,
»$X = 2$« = Menge aller Tripel aus Ω, die genau 2 Sechsen enthalten =
= $\{661, 662, \ldots, 665, 616, \ldots, 566\}$,
»$X = 1$« = Menge aller Tripel aus Ω, die genau 1 Sechs enthalten =
= $\{611, 612, \ldots, 161, \ldots, 556\}$,
»$X = -1$« = Menge aller Tripel aus Ω, die keine Sechs enthalten =
= $\{111, 112, \ldots, 115, \ldots, 555\}$.

Da wir annehmen dürfen, daß mit Laplace-Würfeln gespielt wird, erhalten wir für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten die Werte

$$P(X = 3) = \tfrac{1}{216}, \quad P(X=2) = \tfrac{15}{216}, \quad P(X=1) = \tfrac{75}{216}, \quad P(X=-1) = \tfrac{125}{216},$$

was man übersichtlich in folgender Wertetabelle zusammenfassen kann:

Gewinn x	-1	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Durch diese Wertetabelle läßt sich auf ganz $\mathbb{R}$ eine Funktion W definieren, nämlich $W: x \mapsto P(X = x)$, $D_W = \mathbb{R}$, deren Wertemenge dem Intervall $[0; 1]$ angehört. Sie heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion W der Zufallsgröße X.**

Die so definierte Wahrscheinlichkeitsfunktion W hat meist den Wert 0, weil für alle x, die nicht als Werte der Zufallsgröße X auftreten, $W(x) = 0$ ist.

Ein Spieler, der die Wahrscheinlichkeiten für die Gewinnzahlen x kennt, braucht den Rückgriff auf den Ergebnisraum Ω der Tripel nicht mehr. Er könnte $\Omega' := \{-1, 1, 2, 3\}$ als seinen Ergebnisraum wählen. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion W nichts anderes als eine (nicht-gleichmäßige) Wahrscheinlichkeitsverteilung P' auf Ω' mit $P'(\{-1\}) = \frac{125}{216}$; $P'(\{1\}) = \frac{75}{216}$; $P'(\{2\}) = \frac{15}{216}$ und $P'(\{3\}) = \frac{1}{216}$. Aus diesem Grunde nennt man W auch **Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.** Man sagt, die Zufallsgröße X ist nach W verteilt.

Figur 167.1 zeigt den Graphen G_W der Wahrscheinlichkeitsfunktion W. Um die Darstellung deutlicher zu machen, wurden auf beiden Achsen verschiedene Maßstäbe gewählt; dennoch ist der optische Eindruck noch recht dürftig. Zur Verbesserung dieses Eindrucks wählt man in der Praxis andere Arten der Veranschaulichung; nämlich das Stabdiagramm und das Histogramm*.

Bei einem **Stabdiagramm** werden die Wahrscheinlichkeiten durch Längen dargestellt, indem man die Ordinaten von G_W als Stäbe zeichnet (Figur 167.2). Bei einem **Histogramm** werden die Wahrscheinlichkeiten durch Rechtecksflächen dargestellt. Man geht dabei folgendermaßen vor:

Über jeder Gewinnzahl wird symmetrisch ein Rechteck errichtet, dessen Flächenmaßzahl gleich der jeweiligen Wahrscheinlichkeit ist. Wählt man als Breite $\Delta x = 1$, so ist die Höhe des Rechtecks gerade die Wahrscheinlichkeit der Gewinnzahl

* ὁ ἱστός = das Gewebe. – Graphische Darstellungen führte 1786 *William Playfair* (1759–1823) in die Statistik ein. Er nannte sie *lineal Arithmetic*.

Fig. 167.1
Graph der Wahrscheinlichkeitsverteilung W für das chuck-a-luck.

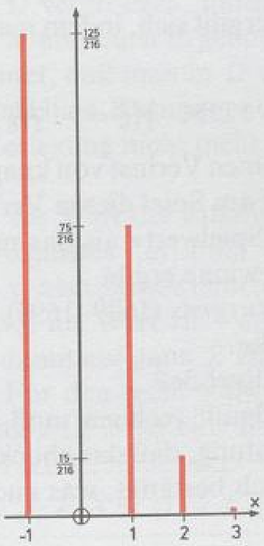

Fig. 167.2
Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung W für das chuck-a-luck

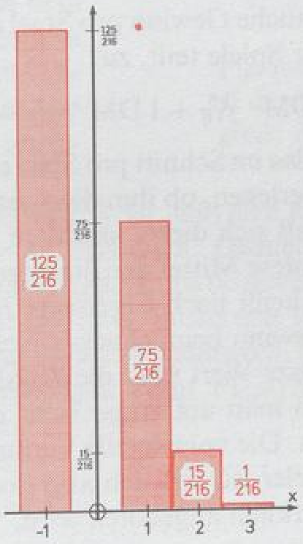

Fig. 167.3
Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung W für das chuck-a-luck mit $\Delta x = 1$

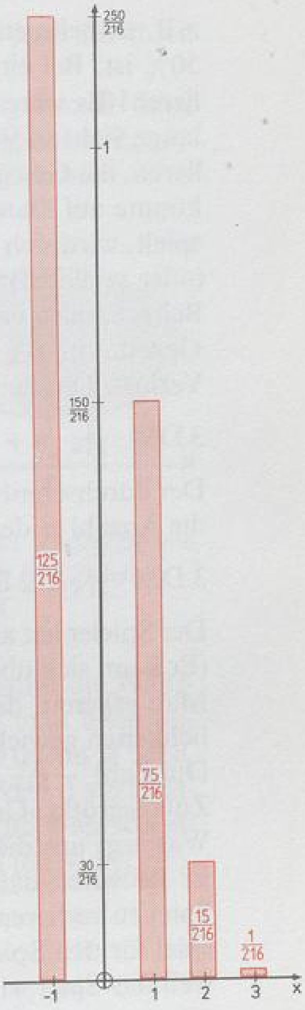

Fig. 167.4
Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung W für das chuck-a-luck mit $\Delta x = \frac{1}{2}$

(Figur 167.3). Wählt man als Breite $\Delta x = \frac{1}{2}$, so muß man als Rechteckshöhe das Doppelte der Wahrscheinlichkeit der Gewinnzahl wählen (Figur 167.4).
Wenn irgend möglich wird man die Breite immer $\Delta x = 1$ wählen. Manchmal muß man jedoch auf andere Breiten ausweichen, wenn man nämlich Überlappungen der Rechtecke vermeiden will. Das wäre z.B. der Fall, wenn statt der Gewinnzahl 2 die Gewinnzahl 2,5 aufgetreten wäre. Auf alle Fälle wird man jedoch die Rechtecksbreiten gleich groß wählen, um einen unmittelbaren Vergleich der Wahrscheinlichkeiten durchführen zu können.
Wahrscheinlichkeitsfunktion W, Stabdiagramm und Histogramme zeigen die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf die Gewinnzahlen. Man kann daraus

z. B. entnehmen, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust etwas größer als 50% ist. Bei einem einzigen Spiel muß man also damit rechnen, 1 DM zu verlieren! Es wäre jedoch vorschnell, daraus zu schließen, daß das Spiel auch auf lange Sicht zu Verlusten für den Spieler führen müsse. Man kann ja nur 1 DM verlieren, die Gewinne können jedoch 1 DM, 2 DM oder sogar 3 DM betragen. Das könnte auf Dauer einen Ausgleich schaffen. Ein Spieler, der dieses Spiel sehr oft spielt, wird sich dafür interessieren, wieviel Geld er im Mittel pro Spiel gewinnen (oder verlieren) wird. Dazu kann er folgende Überlegung anstellen.
Bei n Spielen erwartet er in $\frac{1}{216} \cdot n$ Fällen 3 DM Gewinn, in $\frac{15}{216} \cdot n$ Fällen 2 DM Gewinn, in $\frac{75}{216} \cdot n$ Fällen 1 DM Gewinn und schließlich in $\frac{125}{216} \cdot n$ Fällen 1 DM Verlust. Der zu erwartende Gesamtgewinn ergibt sich also zu

$$3\,\mathrm{DM} \cdot \tfrac{1}{216} \cdot n + 2\,\mathrm{DM} \cdot \tfrac{15}{216} \cdot n + 1\,\mathrm{DM} \cdot \tfrac{75}{216} \cdot n - 1\,\mathrm{DM} \cdot \tfrac{125}{216} \cdot n.$$

Der durchschnittliche Gewinn pro Spiel ergibt sich, indem man diesen Wert durch die Anzahl n der Spiele teilt, zu

$$3\,\mathrm{DM} \cdot \tfrac{1}{216} + 2\,\mathrm{DM} \cdot \tfrac{15}{216} + 1\,\mathrm{DM} \cdot \tfrac{75}{216} - 1\,\mathrm{DM} \cdot \tfrac{125}{216} = -\tfrac{17}{216}\,\mathrm{DM} \approx -0{,}08\,\mathrm{DM}.$$

Der Spieler hat also im Schnitt pro Spiel einen Verlust von knapp 8 Pf zu erwarten. (Er kann sich überlegen, ob ihm die Lust am Spiel diesen Verlust wert ist.)
Man erkennt, daß sich dieser »mittlere Spielwert« als das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Einzelgewinne ergibt.
Die Zahl $-\frac{17}{216}$ heißt nach *Christiaan Huygens* (1629–1695) **Erwartungswert** der Zufallsgröße »Gewinn beim chuck-a-luck«.
Was sagt uns dieser Wert über die Zufallsgröße?
Er bedeutet, daß man auf lange Sicht damit rechnen muß, etwa 0,08 DM pro Spiel zu verlieren. Die vorschnelle Vermutung, daß das chuck-a-luck ein Verlustspiel für den Spieler ist, hat sich also doch bestätigt, was auch zu erwarten war, weil das Spiel wirklich angeboten wird.

11.1.2. Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Wir wollen nun die im letzten Abschnitt eingeführten Begriffe allgemein definieren.

Definition 168.1: Es sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlichem Ergebnisraum Ω. Jede Funktion X, die den Ergebnisraum Ω in die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen abbildet, heißt **Zufallsgröße** X (auf Ω). Es gilt also:

$$X\colon \omega \mapsto X(\omega) \quad \text{mit} \quad D_X = \Omega \quad \text{und} \quad X(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Wir haben schon viele Zufallsgrößen* kennengelernt, ohne sie »Zufallsgröße« genannt zu haben. Wir erinnern an Augenzahl und Augensumme beim Würfeln oder an die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln beim Ziehen aus einer Urne. Ein weiteres Beispiel einer Zufallsgröße liefert jede Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf Ω vermöge der Zuordnung: $\omega \mapsto X(\omega)$ mit $X(\omega) = P(\{\omega\})$. Auch die relative Häufigkeit ist eine Zufallsgröße. Ein triviales Beispiel einer Zufallsgröße ist eine konstante Zufallsgröße, die für alle $\omega \in \Omega$ den konstanten Wert a

* Statt »Zufallsgröße« sagt man auch »Stochastik«, »zufällige Größe«, »Zufallsvariable« oder »aleatorische Größe«. Siehe auch Fußnote ** auf Seite 165.