Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

12. 1. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

12. Mehrere Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum

12.1. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wir betrachten zwei verschiedene* Zufallsgrößen X und Y über (Ω, P) mit ihren Wahrscheinlichkeitsfunktionen W_X und W_Y.

Beispiel 1: Für einen einfachen Würfelwurf sollen folgende Gewinnpläne gelten

a) Zufallsgröße X: Fällt eine gerade Zahl, so gewinnt der Spieler eine Mark; andernfalls verliert er eine Mark.

b) Zufallsgröße Y: Fällt eine Primzahl, so gewinnt der Spieler eine Mark; andernfalls verliert er eine Mark.

Die Wertetabellen der Zufallsgrößen X bzw. Y haben folgendes Aussehen:

ω	1	2	3	4	5	6
$x = X(\omega)$	-1	1	-1	1	-1	1
$y = Y(\omega)$	-1	1	1	-1	1	-1

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktionen W_X bzw. W_Y ergibt sich somit:

x	-1	$+1$
$W_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	-1	$+1$
$W_Y(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Trotz $X \neq Y$ gilt also hier $W_X = W_Y$. X und Y sind demnach »gleichverteilt«. Man definiert nämlich

> **Definition 198.1:** Zwei Zufallsgrößen X und Y über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) heißen **gleichverteilt** oder auch **identisch verteilt**, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen W_X und W_Y übereinstimmen. X und Y heißen dann **Kopien** voneinander.

Beispiel 1 zeigt uns, daß aus der Gleichheit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht auf die Gleichheit der Zufallsgrößen geschlossen werden darf.

Wir wollen uns nun einem Experiment zuwenden, bei dem zwei Zufallsgrößen gleichzeitig betrachtet werden.

Beispiel 2: In einer Klasse von 25 Schülern sind 10 Mädchen. 15 Schüler sind katholisch und 8 Schüler evangelisch. 6 der Mädchen sind katholisch, der Rest der Mädchen evangelisch.
Ein Schüler ω werde beliebig ausgewählt. Wir definieren die Zufallsgrößen »Geschlecht« G und »Religionszugehörigkeit« R folgendermaßen:

$$G(\omega) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Mädchen} \\ 1, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Jungen} \end{cases}$$

* Zwei Zufallsgrößen heißen **gleich**, wenn sie als Funktionen gleich sind, d.h., wenn ihre Wertetabellen übereinstimmen.

$$R(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Katholiken} \\ 2, & \text{falls} \quad \omega \in \text{Menge der Protestanten} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von G und R ergeben sich zu:

g	0	1
$W_G(g)$	0,40	0,60

r	1	2	3
$W_R(r)$	0,60	0,32	0,08

Zur Erstellung einer Schulstatistik wird sowohl nach Geschlecht als auch nach Religionszugehörigkeit gefragt. Diese Fragestellung bedingt eine gleichzeitige Betrachtung beider Zufallsgrößen.

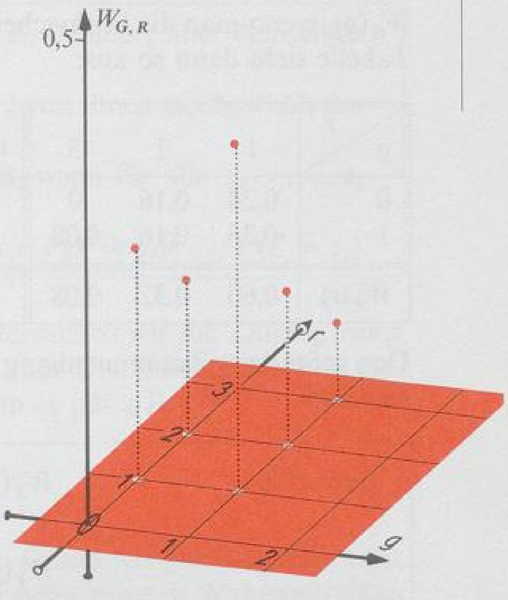

Fig. 199.1 Graphische Darstellung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $W_{G,R}$

Um solche Fragestellungen modellmäßig erfassen zu können, definiert man die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsgrößen X und Y. Dazu betrachtet man das Ereignis, daß X den Wert x und gleichzeitig Y den Wert y annimmt, d.h. das Ereignis $\{\omega \mid X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}$, das wir analog zu früher kurz »$X = x \wedge Y = y$« schreiben. Mit dieser Bezeichnung legen wir fest:

Definition 199.1: Sind X und Y zwei Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so heißt

$$W_{X,Y}\colon (x \mid y) \mapsto P(X = x \wedge Y = y)$$

die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion** oder die **gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsgrößen X und Y.

In unserem Beispiel ergibt sich für $W_{G,R}(g, r) = P(G = g \wedge R = r)$ folgende Wertetabelle:

g \ r	1	2	3
0	0,24	0,16	0
1	0,36	0,16	0,08

Figur 199.1 zeigt den Graphen von $W_{G,R}$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.
Addiert man in der obigen Wertetabelle für $W_{G,R}$ die Wahrscheinlichkeiten einer Spalte r, so erhält man als Summe den Wert $W_R(r)$. Andererseits erhält man

$W_G(g)$, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der Zeile g addiert. Die vollständige Tabelle sieht dann so aus:

g \ r	1	2	3	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0	0,4
1	0,36	0,16	0,08	0,6
$W_R(r)$	0,60	0,32	0,08	1

Der gefundene Zusammenhang zwischen W_G, W_R und $W_{G,R}$ gilt offenbar allgemein:

Satz 200.1:
$$W_X(x_i) = \sum_{j=1}^{m} W_{X,Y}(x_i, y_j)$$
$$W_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{n} W_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Die Summation erstreckt sich dabei über alle y_j aus dem Wertebereich von Y bzw. über alle x_i aus dem Wertebereich von X.

Bemerkung: Auf Grund von Satz 200.1 nennt man die einfachen Wahrscheinlichkeitsfunktionen W_X und W_Y manchmal in diesem Zusammenhang auch **Rand**- oder **Marginalwahrscheinlichkeitsverteilungen.**

12.2. Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

In Kapitel **10.** wurde die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen definiert und untersucht. Wir nannten die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, wenn der Produktsatz $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt. Nun erzeugt jede Zufallsgröße X mittels der Aussagen »$X = x_i$« eine Menge von Ereignissen. Es liegt daher nahe, die stochastische Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen X und Y dadurch zu definieren, daß man für jedes mögliche Paar von Ereignissen »$X = x_i$« und »$Y = y_j$« die stochastische Unabhängigkeit fordert:

Definition 200.1: Zwei Zufallsgrößen X und Y, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) definiert sind, heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für alle x_i, y_j gilt:

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

oder kürzer: $W_{X,Y}(x_i, y_j) = W_X(x_i) \cdot W_Y(y_j)$

Bei mehr als zwei Zufallsgrößen unterscheidet man wie bei Ereignissen zwischen paarweiser Unabhängigkeit und Unabhängigkeit in ihrer Gesamtheit gemäß