Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

12. 3. Verknüpfung von Zufallsgrößen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

so ergäben sich folgende Tabellen:

$W_{G,R^*}(g, r^*) = $
$= P(G = g \wedge R^* = r^*)$

g \ r^*	1	2	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0,4
1	0,36	0,24	0,6
$W_{R^*}(r^*)$	0,6	0,4	1

$W_G(g) \cdot W_{R^*}(r^*) = $
$= P(G = g) \cdot P(R^* = r^*)$

g \ r^*	1	2	$W_G(g)$
0	0,24	0,16	0,4
1	0,36	0,24	0,6
$W_{R^*}(r^*)$	0,6	0,4	1

Diese Tabellen stimmen überein; also sind Geschlecht G und Religionszugehörigkeit R^* stochastisch unabhängige Zufallsgrößen.

Fazit: Durch geeignete Definition von Zufallsgrößen kann man das Ergebnis einer Untersuchung beeinflussen. Man sollte daher bei Veröffentlichungen von statistischen Untersuchungen nicht nur auf die Ergebnisse achten, sondern auch auf die Art, wie sie gewonnen wurden!

12.3. Verknüpfung von Zufallsgrößen

Zufallsgrößen sind reellwertige Funktionen auf Ω. Daher lassen sich Zufallsgrößen wie Funktionen verknüpfen. Wir beschränken uns hier auf Summe und Produkt zweier Zufallsgrößen und erinnern an die in der Analysis übliche

> **Definition 202.1:** Sind X und Y zwei Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so gilt:
>
> $$(X + Y)(\omega) := X(\omega) + Y(\omega) \qquad \text{und} \qquad (X \cdot Y)(\omega) := X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe bzw. des Produkts zweier Zufallsgrößen kann man aus ihrer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P(X + Y = s) &= \\ &= \sum_{x_i + y_j = s} P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \\ &= \sum_{x_i + y_j = s} W_{X,Y}(x_i, y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} W_{X,Y}(x_i, s - x_i)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \cdot Y = k) &= \\ &= \sum_{x_i y_j = k} P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \\ &= \sum_{x_i y_j = k} W_{X,Y}(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Zur Summe zweier Zufallsgrößen bringen wir folgendes

Beispiel: Beim Wurf zweier L-Würfel hat man zwei Zufallsgrößen X und Y, nämlich die Augenzahlen des 1. bzw. 2. Würfels über dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P); dabei besteht Ω aus den 36 Paaren $(a_1 | a_2)$ mit $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und P ist eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω. Für die Zufallsgrößen X und Y gilt dabei

$X(\omega) = X((a_1 | a_2)) = a_1$ und

$Y(\omega) = Y((a_1 | a_2)) = a_2$.

Ihre Summe $X + Y$ ist eine neue Zufallsgröße Z über (Ω, P). Dabei ist

$Z(\omega) = (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Figur 203.1 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Die Wertetabelle von Z sieht folgendermaßen aus:

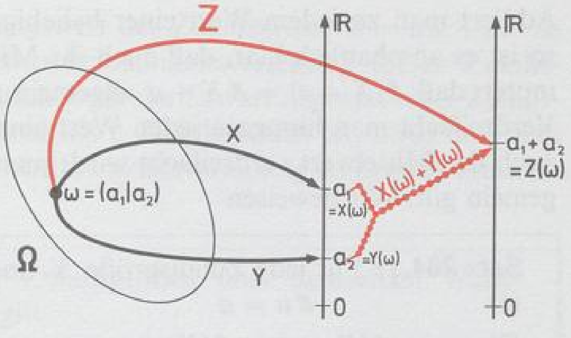

Fig. 203.1
Zur Summe zweier Zufallsgrößen
$Z(\omega) = (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$

a_1 \ a_2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion W_Z von Z ergibt sich gemäß

$$W_Z(z) = \sum_{x_i + y_j = z} W_{X,Y}(x_i, y_j); \quad \text{so ist z.B.}$$

$$\begin{aligned} W_Z(10) &= \sum_{x_i + y_j = 10} W_{X,Y}(x_i, y_j) = \\ &= W_{X,Y}(4{,}6) + W_{X,Y}(5{,}5) + W_{X,Y}(6{,}4) = \\ &= \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} = \\ &= \tfrac{3}{36}. \end{aligned}$$

Man erhält:

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$W_Z(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Erstaunlicherweise ist Z nicht gleichmäßig verteilt, obwohl die Summanden X und Y gleichmäßig verteilt sind (vgl. Figuren 173.1 und 173.2).

12.4. Sätze über Maßzahlen

Für Erwartung und Varianz lassen sich einige einfache Sätze leicht beweisen, durch die deren Berechnung in vielen Fällen erleichtert wird.

12.4.1. Sätze über die Erwartung

Der Erwartungswert einer konstanten Zufallsgröße a ist als ihr Mittelwert natürlich die Konstante selber, d.h., $\mathscr{E}a = a$.