Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

12. 4. Sätze über Maßzahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

$X(\omega) = X((a_1 | a_2)) = a_1$ und

$Y(\omega) = Y((a_1 | a_2)) = a_2$.

Ihre Summe $X + Y$ ist eine neue Zufallsgröße Z über (Ω, P). Dabei ist

$Z(\omega) = (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Figur 203.1 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Die Wertetabelle von Z sieht folgendermaßen aus:

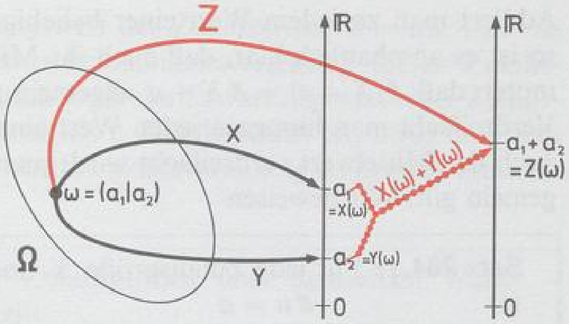

Fig. 203.1
Zur Summe zweier Zufallsgrößen
$Z(\omega) = (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$

$a_1 \backslash a_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion W_Z von Z ergibt sich gemäß

$$W_Z(z) = \sum_{x_i + y_j = z} W_{X,Y}(x_i, y_j); \quad \text{so ist z.B.}$$

$$\begin{aligned} W_Z(10) &= \sum_{x_i + y_j = 10} W_{X,Y}(x_i, y_j) = \\ &= W_{X,Y}(4{,}6) + W_{X,Y}(5{,}5) + W_{X,Y}(6{,}4) = \\ &= \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} = \\ &= \tfrac{3}{36}. \end{aligned}$$

Man erhält:

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$W_Z(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Erstaunlicherweise ist Z nicht gleichmäßig verteilt, obwohl die Summanden X und Y gleichmäßig verteilt sind (vgl. Figuren 173.1 und 173.2).

12.4. Sätze über Maßzahlen

Für Erwartung und Varianz lassen sich einige einfache Sätze leicht beweisen, durch die deren Berechnung in vielen Fällen erleichtert wird.

12.4.1. Sätze über die Erwartung

Der Erwartungswert einer konstanten Zufallsgröße a ist als ihr Mittelwert natürlich die Konstante selber, d.h., $\mathscr{E}a = a$.

Addiert man zu jedem Wert einer beliebigen Zufallsgröße X die Konstante 3, so ist es anschaulich klar, daß auch ihr Mittelwert $\mathscr{E}X$ um 3 wächst; man vermutet, daß $\mathscr{E}(X+a) = \mathscr{E}X + a$ allgemein gilt.
Verdreifacht man hingegen jeden Wert einer Zufallsgröße X, so ist es klar, daß auch der Mittelwert verdreifacht wird; man vermutet, daß $\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$ allgemein gilt. Wir beweisen

Satz 204.1: Für jede Zufallsgröße X und jede Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt:
(1) $\mathscr{E}a = a$
(2) $\mathscr{E}(X+a) = \mathscr{E}(X) + a$
(3) $\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$

Beweis:
(1). $\mathscr{E}a = a \cdot W(a) = a \cdot 1 = a$.
(2). Mit $g(X) := X + a$ gilt nach Satz 178.1

$$\mathscr{E}(X+a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a)W(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i) + a \sum_{i=1}^{n} W(x_i) = \mathscr{E}X + a \cdot 1 = $$
$$= \mathscr{E}X + a.$$

(3). Mit $g(X) := aX$ gilt nach Satz 178.1

$$\mathscr{E}(aX) = \sum_{i=1}^{n} a x_i W(x_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i) = a \cdot \mathscr{E}X.$$

Der Mittelwert der Summe zweier Zufallsgrößen müßte wohl die Summe der beiden Mittelwerte sein, wie Beispiel 1 und Beispiel 2 von Seite 173 für die Zufallsgröße »Augensumme zweier L-Würfel« vermuten lassen. Daß dies auch allgemein gilt, ist die Aussage von

Satz 204.2: Sind X und Y Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann gilt

$$\mathscr{E}(X+Y) = \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y$$

Beweis:
Nach der Bemerkung **6** von Seite 172 gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} [X(\omega) + Y(\omega)] \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y.\end{aligned}$$

Aus Satz 204.1 und Satz 204.2 folgt sofort, daß die Erwartung eine lineare Funktion ist:

$$\boxed{\mathscr{E}(aX + bY) = a\mathscr{E}X + b\mathscr{E}Y}$$

Diese Formel gestattet, den Erwartungswert der Zufallsgröße $Z := aX + bY$ zu berechnen, ohne daß man die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße Z kennt! Darüber hinaus läßt sich sogar der Erwartungswert einer Zufallsgröße berechnen, die Summe von mehr als 2 Zufallsgrößen ist, ohne daß man ihre (meist recht komplizierte) Wahrscheinlichkeitsverteilung zu kennen braucht. Es gilt nämlich

Satz 205.1: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann gilt

$$\mathscr{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n) = a_1 \mathscr{E} X_1 + a_2 \mathscr{E} X_2 + \ldots + a_n \mathscr{E} X_n,$$

kurz

$$\mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathscr{E} X_i.$$

Beweis:
Wir verwenden das Beweisverfahren von Satz 204.2.

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} [a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) + \ldots + a_n X_n(\omega)] \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} [a_1 X_1(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + a_2 X_2(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \ldots + a_n X_n(\omega) \cdot P(\{\omega\})] = \\
&= a_1 \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \ldots + a_n \sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= a_1 \mathscr{E} X_1 + a_2 \mathscr{E} X_2 + \ldots + a_n \mathscr{E} X_n.
\end{aligned}$$

Merkregel: Erwartungswert einer Summe = Summe der Erwartungswerte

Man könnte nun vermuten, daß ein ähnlicher Satz auch für das Produkt von Zufallsgrößen gilt. Beispiel 1 und Beispiel 3 von Seite 173f. zeigen aber, daß dem nicht so ist, weil dort $\mathscr{E} X = 3{,}5$, dagegen
$\mathscr{E}(X \cdot X) = \mathscr{E}(X^2) = 15\frac{1}{6} \neq 3{,}5^2 = (\mathscr{E} X)^2$ ist.
Erfreulicherweise gilt aber wenigstens

Satz 205.2: Sind X und Y stochastisch *unabhängige* Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so gilt

$$\mathscr{E}(X \cdot Y) = \mathscr{E} X \cdot \mathscr{E} Y.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(X \cdot Y) &= x_1 y_1 W_{X,Y}(x_1, y_1) + x_1 y_2 W_{X,Y}(x_1, y_2) + \ldots + x_n y_m W_{X,Y}(x_n, y_m) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j W_{X,Y}(x_i, y_j).
\end{aligned}$$

Diese Doppelsumme läßt sich wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von X und Y nach Definition 200.1 umformen zu

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X\cdot Y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i\cdot y_j)\cdot W_X(x_i)\cdot W_Y(y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i W_X(x_i)\cdot\sum_{j=1}^{m} y_j W_Y(y_j) = \\ &= \mathscr{E}X\cdot\mathscr{E}Y.\end{aligned}$$

Satz 205.2 läßt sich nicht umkehren! Die Zufallsgrößen sind nämlich nicht notwendig unabhängig, wenn das Produkt der Erwartungswerte gleich dem Erwartungswert des Produkts ist. Wir zeigen dies an folgendem

Beispiel: Die Zufallsgrößen X und Y besitzen die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x \ y	0	1	2	$W_X(x)$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$W_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

Damit gilt für das Produkt $X\cdot Y$:

xy	0	2	4
$W_{X\cdot Y}(xy)$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Für die Erwartungswerte ergibt sich:

$\mathscr{E}X = 0\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=1;$

$\mathscr{E}Y = 0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1;$

$\mathscr{E}(X\cdot Y) = 0\cdot\frac{3}{4}+2\cdot 0+4\cdot\frac{1}{4}=1.$

Offenbar gilt $\mathscr{E}X\cdot\mathscr{E}Y=\mathscr{E}(X\cdot Y)$. Die Zufallsgrößen X und Y sind jedoch nicht unabhängig; es gilt nämlich

$P(X=0)=\frac{1}{2};\quad P(Y=0)=\frac{1}{4};\qquad$ aber $\qquad P(X=0\wedge Y=0)=0 \neq \frac{1}{8}.$

Wie schon erwähnt, können wir mit Hilfe der letzten Sätze die Berechnung von Erwartungswerten oft wesentlich vereinfachen. So erhält man leichter als im Beispiel 2 von Seite 173 den Erwartungswert der Zufallsgröße »Augensumme« beim Doppelwurf nach Satz 204.2 zu $3{,}5+3{,}5=7$. X bzw. Y sind dabei die Augenzahlen des 1. bzw. 2. Wurfs. Es gilt also $X((a|b))=a$ bzw. $Y((a|b))=b$. Entsprechend erhält man für den Erwartungswert der Zufallsgröße »Augenprodukt« beim Doppelwurf nach Satz 205.2 den Wert $3{,}5\cdot 3{,}5=12{,}25$. Dieser Wert unterscheidet sich vom Erwartungswert $15\frac{1}{6}$ des Quadrats der Augenzahl beim einfachen Würfelwurf (siehe Beispiel 3, Seite 174). Die Zufallsgrößen X = Augenzahl beim 1. Wurf und Y = Augenzahl beim 2. Wurf sind nämlich unabhängig, während die Zufallsgröße X natürlich von sich selber abhängig ist.

12.4.2. Sätze über die Varianz

Auf Seite 181 haben wir angekündigt, daß die Berechnung der Varianz einer Zufallsgröße oftmals einfacher durchgeführt werden kann als durch direkte Berechnung gemäß ihrer Definition (Definition 180.1). Mit Hilfe der Sätze aus **12.4.1.** über die Erwartung können wir die dazu nötige Formel herleiten.

Die Varianz einer Zufallsgröße X ist definiert als Erwartung des Abweichungsquadrates $(X - \mathscr{E}X)^2$, d.h. als $\mathscr{E}((X-\mu)^2)$. Was ergibt sich, wenn wir allgemein die Erwartung eines beliebigen Abweichungsquadrats $(X-a)^2$ berechnen?

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}[(X-a)^2] &= \mathscr{E}([(X-\mu)+(\mu-a)]^2) = \\
&= \mathscr{E}[(X-\mu)^2+(\mu-a)^2+2(X-\mu)(\mu-a)] = \\
&= \mathscr{E}[(X-\mu)^2]+\mathscr{E}[(\mu-a)^2]+2\mathscr{E}[(X-\mu)(\mu-a)] = \\
&= \mathscr{E}[(X-\mu)^2]+(\mu-a)^2+2(\mathscr{E}X-\mu)(\mu-a) = \\
&= \operatorname{Var}X+(\mu-a)^2.
\end{aligned}$$

Aus der gewonnenen Gleichung $\mathscr{E}[(X-a)^2] = \operatorname{Var}X + (\mu-a)^2$ läßt sich eine interessante Minimaleigenschaft des Erwartungswerts μ ablesen. Da nämlich der 2. Summand nie negativ wird und den Wert 0 nur für $a = \mu$ annimmt, gilt offenbar, daß das mittlere Abweichungsquadrat einer Zufallsgröße von einer Zahl a dann am kleinsten wird, wenn diese Zahl a gleich dem Erwartungswert μ der Zufallsgröße ist. Das Streuungsmaß »Varianz« ist also dem Erwartungswert einer Zufallsgröße besonders gut angepaßt!

Durch Umstellen gewinnt man aus der letzten Gleichung

Satz 207.1: Verschiebungssatz.

$$\operatorname{Var}X = \mathscr{E}[(X-a)^2] - (\mathscr{E}X - a)^2$$

Für den Fall $a = 0$ liefert Satz 207.1 die versprochene einfache Berechnungsmöglichkeit für die Varianz einer Zufallsgröße. Es gilt dann nämlich

Satz 207.2: $\operatorname{Var}X = \mathscr{E}(X^2) - (\mathscr{E}X)^2 = \mathscr{E}(X^2) - \mu^2$

Die Berechnung von $\operatorname{Var}X$ nach Satz 207.2 ist meist dann günstig, wenn X ganzzahlige Werte annimmt, $\mathscr{E}X$ jedoch nicht ganzzahlig ist. So ist es beim chuck-a-luck, für das wir nochmals $\operatorname{Var}X$ berechnen; man vergleiche damit die Berechnung auf Seite 181.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}X &= 1 \cdot \tfrac{200}{216} + 4 \cdot \tfrac{15}{216} + 9 \cdot \tfrac{1}{216} - (-\tfrac{17}{216})^2 = \\
&= \frac{269 \cdot 216 - 289}{216^2} = \\
&= \frac{57\,815}{46\,656} \approx \\
&\approx 1{,}24.
\end{aligned}$$

Die Sätze 204.1 bis 205.2 zeigten einige wichtige Eigenschaften der Erwartung auf. Welche analogen Eigenschaften gelten für die Varianz?
Eine konstante Zufallsgröße nimmt einen einzigen Wert a an, der auch ihr Mittelwert ist. Die Abweichungen davon sind also 0; daher ist auch das mittlere Abweichungsquadrat 0.

Addiert man zu jedem Wert einer Zufallsgröße X die Konstante 3, so wird der Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion von X (bzw. das Stabdiagramm oder das Histogramm) um 3 nach rechts verschoben. Es ist anschaulich klar, daß in der verschobenen Verteilung das mittlere Abweichungsquadrat bezüglich des verschobenen Erwartungswertes $\mu + 3$ genauso groß ist wie das mittlere Abweichungsquadrat in der ursprünglichen Verteilung bezüglich des ursprünglichen Erwartungswertes μ. Man vermutet, daß $\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X$ allgemein gilt. Verdreifacht man hingegen jeden Wert einer Zufallsgröße X, so ist klar, daß auch jede Abweichung verdreifacht wird. Damit wird jedes Abweichungsquadrat verneunfacht, also auch das mittlere Abweichungsquadrat. Man vermutet, daß $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$ allgemein gilt.
Wir beweisen

Satz 208.1: Für jede Zufallsgröße X und jede Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt:
(1) $\operatorname{Var} a = 0$
(2) $\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X$
(3) $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$

Beweis: Mit Hilfe von Satz 204.1 erhält man

(1) $$\operatorname{Var} a = \mathscr{E}[(a - \mathscr{E} a)^2] = \mathscr{E}[(a - a)^2] = \mathscr{E} 0 = 0.$$

(2) $$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X + a) &= \mathscr{E}([(X + a) - \mathscr{E}(X + a)]^2) = \\ &= \mathscr{E}([X + a - \mathscr{E} X - a]^2) = \\ &= \mathscr{E}([X - \mathscr{E} X]^2) = \\ &= \operatorname{Var} X.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\operatorname{Var}(aX) &= \mathscr{E}([aX - \mathscr{E}(aX)]^2) = \\ &= \mathscr{E}([aX - a\mathscr{E} X]^2) = \\ &= \mathscr{E}(a^2 [X - \mathscr{E} X]^2) = \\ &= a^2 \mathscr{E}([X - \mathscr{E} X]^2) = \\ &= a^2 \cdot \operatorname{Var} X.\end{aligned}$$

Satz 208.1 zeigt einerseits, daß die Varianz im Gegensatz zur Erwartung keine lineare Funktion sein kann, andererseits, daß $\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} a$ gilt. Man könnte also vermuten, daß wenigstens der Varianzwert einer Summe von Zufallsgrößen gleich der Summe der Varianzwerte dieser Zufallsgrößen ist. Unter der einschränkenden Bedingung der Unabhängigkeit gilt tatsächlich

Satz 208.2: Sind X und Y stochastisch *unabhängige* Zufallsgrößen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann gilt
$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y.$$

Beweis: Wir setzen $\mu := \mathscr{E} X$ und $\nu := \mathscr{E} Y$ und berechnen damit unter Verwendung der Sätze 204.1 und 204.2:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X+Y) &= \mathscr{E}([(X+Y)-\mathscr{E}(X+Y)]^2) = \\ &= \mathscr{E}([X+Y-\mu-\nu]^2) = \\ &= \mathscr{E}([(X-\mu)+(Y-\nu)]^2) = \\ &= \mathscr{E}[(X-\mu)^2+(Y-\nu)^2+2(X-\mu)(Y-\nu)] = \\ &= \mathscr{E}[(X-\mu)^2]+\mathscr{E}[(Y-\nu)^2]+2\mathscr{E}[(X-\mu)(Y-\nu)] = \\ &= \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y+2\mathscr{E}[(X-\mu)(Y-\nu)].\end{aligned}$$

Aus Aufgabe 214/**15** folgt, daß mit X und Y auch $X-\mu$ und $Y-\nu$ stochastisch unabhängig sind. Wir können also auf den letzten Summanden Satz 205.2 anwenden und erhalten

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y+2\mathscr{E}(X-\mu)\cdot\mathscr{E}(Y-\nu),$$

woraus man, wieder unter Benützung von Satz 204.1,

$$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y+2(\mathscr{E}X-\mu)\cdot(\mathscr{E}Y-\nu)$$

erhält. Da die beiden Faktoren des letzten Summanden den Wert 0 haben, ist die Behauptung bewiesen.

Satz 208.2 wird mit Vorteil angewendet, wenn es gelingt, eine Zufallsgröße als Summe von zwei unabhängigen einfacheren Zufallsgrößen darzustellen. Dann läßt sich nämlich ihre Varianz aus der Varianz der Summanden berechnen, ohne daß man die meist komplizierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe zu kennen braucht. So kann man z. B. die Varianz der »Augensumme beim Doppelwurf« als Summe der Varianzen der unabhängigen Zufallsgrößen »Augenzahl beim i-ten Wurf« ($i = 1, 2$) einfacher als durch Rückgriff auf ihre Definition (vgl. Aufgabe 194/**45**) berechnen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\textit{Augensumme}) &= \operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}X+\operatorname{Var}Y = 2\cdot\operatorname{Var}X = \\ &= 2\cdot\mathscr{E}[(X-3{,}5)^2] = \\ &= 2\cdot\tfrac{1}{6}\cdot(2{,}5^2+1{,}5^2+0{,}5^2+0{,}5^2+1{,}5^2+2{,}5^2) = \\ &= \tfrac{2}{3}\cdot(6{,}25+2{,}25+0{,}25) = \\ &= \tfrac{35}{6}.\end{aligned}$$

Die Behauptung von Satz 208.2 läßt sich auf mehr als 2 Zufallsgrößen erweitern. Als Voraussetzung genügt dabei aber schon die paarweise Unabhängigkeit der auftretenden Summanden. 1853 bewies *Irénée-Jules Bienaymé* (1796–1878)

Satz 209.1: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ stochastisch *paarweise unabhängige* Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann ist die Varianz der Summe dieser Zufallsgrößen gleich der Summe ihrer Varianzen:

$$\operatorname{Var}(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \operatorname{Var}X_1+\operatorname{Var}X_2+\ldots+\operatorname{Var}X_n,$$

kurz: $$\operatorname{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}X_i.$$

Beweis: Unter Verwendung von $\mu_i := \mathscr{E} X_i$ ergibt sich mit Satz 204.1 und Satz 205.1

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \mathscr{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]^2\right) = \\
&= \mathscr{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i\right]^2\right) = \\
&= \mathscr{E}\left(\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)\right]^2\right) = \\
&= \mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} (X_i - \mu_i) \cdot (X_j - \mu_j)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}[(X_i - \mu_i)^2] + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} \mathscr{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)].
\end{aligned}$$

Aus Aufgabe 214/**15** folgt, daß mit den X_i auch die Zufallsgrößen $X_i - \mu_i$ paarweise unabhängig sind. Nach Satz 205.2 läßt sich der 2. Term umformen, und man erhält

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} \mathscr{E}(X_i - \mu_i) \cdot \mathscr{E}(X_j - \mu_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i + 2 \cdot \sum_{i<j}^{n} (\mathscr{E} X_i - \mu_i) \cdot (\mathscr{E} X_j - \mu_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i.
\end{aligned}$$

Für die Aussage von Satz 205.2 über den Erwartungswert des Produkts zweier Zufallsgrößen mußte die Unabhängigkeit dieser Zufallsgrößen vorausgesetzt werden. Die komplizierte Maßzahl Varianzwert benötigt diese Voraussetzung bereits beim Satz über die Summe (Satz 208.2). Die Unabhängigkeit reicht als Voraussetzung nicht mehr aus, wenn man einen zu Satz 205.2 analogen Satz über die Varianz des Produkts zweier Zufallsgrößen aufstellen will; dies zeigt das folgende

Beispiel: Eine L-Münze werde zweimal geworfen. Die Zufallsgrößen X und Y beschreiben die Ausfälle des 1. bzw. des 2. Wurfs. Dabei werde eine 1 notiert, falls Adler fällt, sonst eine 0. Dann gilt:

x	0	1
$W_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

y	0	1
$W_Y(y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\mathscr{E} X = \mathscr{E} Y = \frac{1}{2}$.

$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y = \frac{1}{4}$.

Für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $W_{X,Y}$ erhält man:

$y \backslash x$	0	1	$W_Y(y)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$W_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Die $W_{X,Y}$-Tabelle ist eine Produkttafel der Randwahrscheinlichkeiten, also sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen.
Für das Produkt $X \cdot Y$ gilt:

$x \cdot y$	0	1
$W_{X \cdot Y}(x \cdot y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathscr{E}(X \cdot Y) = \frac{1}{4} = \mathscr{E}X \cdot \mathscr{E}Y$.

$\operatorname{Var}(X \cdot Y) = \mathscr{E}[(X \cdot Y)^2] - [\mathscr{E}(X \cdot Y)]^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

Dagegen ist $\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

12.4.3. Zusammenfassung

In den beiden vorausgehenden Abschnitten **12.4.1.** und **12.4.2.** wurde eine Reihe von Sätzen über Erwartung und Varianz von Zufallsgrößen bewiesen, die wir in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammenstellen wollen. Dabei geben wir zusätzlich die entsprechenden Sätze für die Standardabweichung σ an.

<table>
<tr><td colspan="3">$a, b \in \mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Erwartung $\mathscr{E}$</td><td>Varianz Var</td><td>Standardabweichung σ</td></tr>
<tr><td>$\mathscr{E}a = a$
$\mathscr{E}(X + a) = \mathscr{E}X + a$
$\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$
$\mathscr{E}(X + Y) = \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y$
$\mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}X_i$
$\mathscr{E}$ ist eine lineare Funktion, d. h.,
$\mathscr{E}(aX + bY) = a\mathscr{E}X + b\mathscr{E}Y$</td><td>$\operatorname{Var} a = 0$
$\operatorname{Var}(X + a) = \operatorname{Var} X$
$\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$</td><td>$\sigma(a) = 0$
$\sigma(X + a) = \sigma(X)$
$\sigma(aX) = |a| \cdot \sigma(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">**X und Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow$**</td></tr>
<tr><td>$\mathscr{E}(X \cdot Y) = \mathscr{E}X \cdot \mathscr{E}Y$</td><td>$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$</td><td>$\sigma(X + Y) = \sqrt{\operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y}$
bzw.
$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">**Alle X_i paarweise stochastisch unabhängig $\Rightarrow$**</td></tr>
<tr><td></td><td>$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i$</td><td>$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i}$
bzw.
$\sigma_{\Sigma X_i}^2 = \Sigma \sigma_{X_i}^2$</td></tr>
</table>

12.5. Das arithmetische Mittel von Zufallsgrößen

Bei der Messung einer Größe geht heute jedermann von der Vorstellung aus, daß das arithmetische Mittel aus n Einzelmessungen »genauer« ist als eine Einzel-