UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

12. 5. Das arithmetische Mittel von Zufallsgrößen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

Visual Library

Die $W_{X,Y}$-Tabelle ist eine Produkttafel der Randwahrscheinlichkeiten, also sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen.
Für das Produkt $X \cdot Y$ gilt:

$x \cdot y$	0	1
$W_{X \cdot Y}(x \cdot y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathscr{E}(X \cdot Y) = \frac{1}{4} = \mathscr{E}X \cdot \mathscr{E}Y.$

$\operatorname{Var}(X \cdot Y) = \mathscr{E}[(X \cdot Y)^2] - [\mathscr{E}(X \cdot Y)]^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$

Dagegen ist $\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

12.4.3. Zusammenfassung

In den beiden vorausgehenden Abschnitten **12.4.1.** und **12.4.2.** wurde eine Reihe von Sätzen über Erwartung und Varianz von Zufallsgrößen bewiesen, die wir in der folgenden Tabelle übersichtlich zusammenstellen wollen. Dabei geben wir zusätzlich die entsprechenden Sätze für die Standardabweichung σ an.

$a, b \in \mathbb{R}$		
Erwartung $\mathscr{E}$	Varianz Var	Standardabweichung σ
$\mathscr{E}a = a$ $\mathscr{E}(X+a) = \mathscr{E}X + a$ $\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$ $\mathscr{E}(X+Y) = \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y$ $\mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}X_i$ $\mathscr{E}$ ist eine lineare Funktion, d. h., $\mathscr{E}(aX + bY) = a\mathscr{E}X + b\mathscr{E}Y$	$\operatorname{Var} a = 0$ $\operatorname{Var}(X+a) = \operatorname{Var} X$ $\operatorname{Var}(aX) = a^2 \operatorname{Var} X$	$\sigma(a) = 0$ $\sigma(X+a) = \sigma(X)$ $\sigma(aX) = \lvert a \rvert \cdot \sigma(X)$
X und Y stochastisch unabhängig $\Rightarrow$		
$\mathscr{E}(X \cdot Y) = \mathscr{E}X \cdot \mathscr{E}Y$	$\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$	$\sigma(X+Y) = \sqrt{\operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y}$ bzw. $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$
	Alle X_i paarweise stochastisch unabhängig $\Rightarrow$	
	$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i$	$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i}$ bzw. $\sigma_{\Sigma X_i}^2 = \Sigma \sigma_{X_i}^2$

12.5. Das arithmetische Mittel von Zufallsgrößen

Bei der Messung einer Größe geht heute jedermann von der Vorstellung aus, daß das arithmetische Mittel aus n Einzelmessungen »genauer« ist als eine Einzel-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

messung*. Jede Einzelmessung ist eine Zufallsgröße X_i, deren Werte die möglichen Meßwerte sind. Wenn sich die Versuchsbedingungen von Messung zu Messung nicht ändern, dann sind die Zufallsgrößen X_i gleichverteilt und stochastisch unabhängig. Sie haben alle den gleichen Erwartungswert μ – das ist der angestrebte Meßwert – und die gleiche Standardabweichung σ – ein Maß für die Genauigkeit der Einzelmessung. Das arithmetische Mittel

$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

dieser Zufallsgrößen X_i ist dann wieder eine Zufallsgröße**. Ihr Erwartungswert $\mathscr{E}\bar{X}$ und ihre Varianz $\operatorname{Var}\bar{X}$ lassen sich unter Verwendung der Eigenschaften der Funktionen $\mathscr{E}$ und Var aus μ und σ wie folgt berechnen.

$$\mathscr{E}\bar{X} = \mathscr{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}X_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu;$$

$$\operatorname{Var}\bar{X} = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}X_i = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{n}{n^2} \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2,$$

also

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Das arithmetische Mittel $\bar{X}$ zielt also auf denselben Meßwert μ wie jede Einzelmessung X_i; die Genauigkeit der Messung verbessert sich um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Will man also z. B. die Genauigkeit verzehnfachen, d.h., einen Meßwert auf eine Dezimalstelle genauer angeben, so sind mit derselben Versuchsanordnung 100mal soviel Messungen nötig wie zur Bestimmung des zu verbessernden Wertes.
Die obige Rechnung zeigt, daß nicht alle genannten Voraussetzungen über die Zufallsgrößen X_i benötigt werden. Eine genauere Betrachtung der durchgeführten Berechnung gestattet die Formulierung folgender Sätze:

Satz 212.1: Haben n Zufallsgrößen den Erwartungswert μ, dann hat ihr arithmetisches Mittel denselben Erwartungswert.

Satz 212.2: Das $\sqrt{n}$-Gesetz.
Haben n paarweise unabhängige Zufallsgrößen dieselbe Standardabweichung σ, dann hat ihr arithmetisches Mittel die Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

* Obgleich das arithmetische Mittel neben 7 anderen Mitteln bereits den *Pythagoreern* bekannt war, entstand das Vorgehen, das arithmetische Mittel als besten Schätzwert für eine zu messende Größe zu nehmen, erst in der 2. Hälfte des 16. Jh.s in Westeuropa bei der Untersuchung des Erdmagnetismus. Die Astronomie übernahm sehr bald dieses Verfahren. Berühmt wurde es durch seine Anwendung bei der Bestimmung der Erdabplattung 1736/37 durch *Maupertuis* (1698–1759).

** $\bar{X}$ wird gelesen »X quer«. – Oft schreibt man auch genauer $\bar{X}_n$, um auf die Anzahl der beteiligten Zufallsgrößen hinzuweisen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN