Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

12. 4. 1. Sätze über die Erwartung

$X(\omega) = X((a_1 \mid a_2)) = a_1$ und

$Y(\omega) = Y((a_1 \mid a_2)) = a_2$.

Ihre Summe $X + Y$ ist eine neue Zufallsgröße Z über (Ω, P). Dabei ist
$Z(\omega) = (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.
Figur 203.1 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Die Wertetabelle von Z sieht folgendermaßen aus:

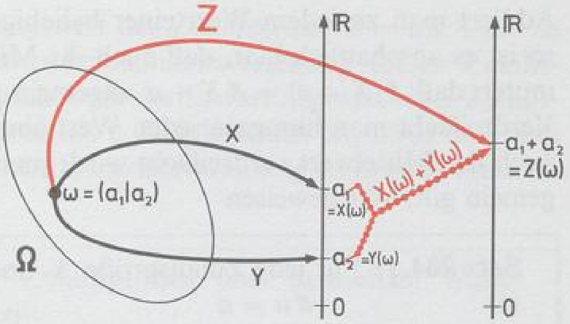

Fig. 203.1
Zur Summe zweier Zufallsgrößen
$Z(\omega) = (X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$

$a_1 \backslash a_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion W_Z von Z ergibt sich gemäß

$$W_Z(z) = \sum_{x_i + y_j = z} W_{X,Y}(x_i, y_j); \quad \text{so ist z.B.}$$

$$\begin{aligned} W_Z(10) &= \sum_{x_i + y_j = 10} W_{X,Y}(x_i, y_j) = \\ &= W_{X,Y}(4{,}6) + W_{X,Y}(5{,}5) + W_{X,Y}(6{,}4) = \\ &= \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{36} = \\ &= \tfrac{3}{36}. \end{aligned}$$

Man erhält:

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$W_Z(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Erstaunlicherweise ist Z nicht gleichmäßig verteilt, obwohl die Summanden X und Y gleichmäßig verteilt sind (vgl. Figuren 173.1 und 173.2).

12.4. Sätze über Maßzahlen

Für Erwartung und Varianz lassen sich einige einfache Sätze leicht beweisen, durch die deren Berechnung in vielen Fällen erleichtert wird.

12.4.1. Sätze über die Erwartung

Der Erwartungswert einer konstanten Zufallsgröße a ist als ihr Mittelwert natürlich die Konstante selber, d.h., $\mathscr{E} a = a$.

Addiert man zu jedem Wert einer beliebigen Zufallsgröße X die Konstante 3, so ist es anschaulich klar, daß auch ihr Mittelwert $\mathscr{E}X$ um 3 wächst; man vermutet, daß $\mathscr{E}(X+a) = \mathscr{E}X + a$ allgemein gilt.
Verdreifacht man hingegen jeden Wert einer Zufallsgröße X, so ist es klar, daß auch der Mittelwert verdreifacht wird; man vermutet, daß $\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$ allgemein gilt. Wir beweisen

Satz 204.1: Für jede Zufallsgröße X und jede Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt:
(1) $\mathscr{E}a = a$
(2) $\mathscr{E}(X+a) = \mathscr{E}(X) + a$
(3) $\mathscr{E}(aX) = a \cdot \mathscr{E}X$

Beweis:
(1). $\mathscr{E}a = a \cdot W(a) = a \cdot 1 = a$.
(2). Mit $g(X) := X + a$ gilt nach Satz 178.1

$$\mathscr{E}(X+a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a) W(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i) + a \sum_{i=1}^{n} W(x_i) = \mathscr{E}X + a \cdot 1 = $$
$$= \mathscr{E}X + a.$$

(3). Mit $g(X) := aX$ gilt nach Satz 178.1

$$\mathscr{E}(aX) = \sum_{i=1}^{n} a x_i W(x_i) = a \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i) = a \cdot \mathscr{E}X.$$

Der Mittelwert der Summe zweier Zufallsgrößen müßte wohl die Summe der beiden Mittelwerte sein, wie Beispiel 1 und Beispiel 2 von Seite 173 für die Zufallsgröße »Augensumme zweier L-Würfel« vermuten lassen. Daß dies auch allgemein gilt, ist die Aussage von

Satz 204.2: Sind X und Y Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann gilt

$$\mathscr{E}(X+Y) = \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y$$

Beweis:
Nach der Bemerkung **6** von Seite 172 gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X+Y)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} [X(\omega) + Y(\omega)] \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\ &= \mathscr{E}X + \mathscr{E}Y.\end{aligned}$$

Aus Satz 204.1 und Satz 204.2 folgt sofort, daß die Erwartung eine lineare Funktion ist:

$$\boxed{\mathscr{E}(aX + bY) = a\mathscr{E}X + b\mathscr{E}Y}$$

Diese Formel gestattet, den Erwartungswert der Zufallsgröße $Z := aX + bY$ zu berechnen, ohne daß man die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße Z kennt! Darüber hinaus läßt sich sogar der Erwartungswert einer Zufallsgröße berechnen, die Summe von mehr als 2 Zufallsgrößen ist, ohne daß man ihre (meist recht komplizierte) Wahrscheinlichkeitsverteilung zu kennen braucht. Es gilt nämlich

Satz 205.1: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), dann gilt

$$\mathscr{E}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n) = a_1 \mathscr{E} X_1 + a_2 \mathscr{E} X_2 + \ldots + a_n \mathscr{E} X_n,$$

kurz

$$\mathscr{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathscr{E} X_i.$$

Beweis:
Wir verwenden das Beweisverfahren von Satz 204.2.

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\Big) &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n)(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} [a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) + \ldots + a_n X_n(\omega)] \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} [a_1 X_1(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + a_2 X_2(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \ldots + a_n X_n(\omega) \cdot P(\{\omega\})] = \\
&= a_1 \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \ldots + a_n \sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \\
&= a_1 \mathscr{E} X_1 + a_2 \mathscr{E} X_2 + \ldots + a_n \mathscr{E} X_n.
\end{aligned}$$

Merkregel: Erwartungswert einer Summe = Summe der Erwartungswerte

Man könnte nun vermuten, daß ein ähnlicher Satz auch für das Produkt von Zufallsgrößen gilt. Beispiel 1 und Beispiel 3 von Seite 173f. zeigen aber, daß dem nicht so ist, weil dort $\mathscr{E} X = 3{,}5$, dagegen
$\mathscr{E}(X \cdot X) = \mathscr{E}(X^2) = 15\frac{1}{6} \neq 3{,}5^2 = (\mathscr{E} X)^2$ ist.
Erfreulicherweise gilt aber wenigstens

Satz 205.2: Sind X und Y stochastisch *unabhängige* Zufallsgrößen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P), so gilt

$$\mathscr{E}(X \cdot Y) = \mathscr{E} X \cdot \mathscr{E} Y.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(X \cdot Y) &= x_1 y_1 W_{X,Y}(x_1, y_1) + x_1 y_2 W_{X,Y}(x_1, y_2) + \ldots + x_n y_m W_{X,Y}(x_n, y_m) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j W_{X,Y}(x_i, y_j).
\end{aligned}$$

Diese Doppelsumme läßt sich wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von X und Y nach Definition 200.1 umformen zu

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(X\cdot Y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i\cdot y_j)\cdot W_X(x_i)\cdot W_Y(y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i W_X(x_i)\cdot\sum_{j=1}^{m} y_j W_Y(y_j) = \\ &= \mathscr{E}X\cdot\mathscr{E}Y.\end{aligned}$$

Satz 205.2 läßt sich nicht umkehren! Die Zufallsgrößen sind nämlich nicht notwendig unabhängig, wenn das Produkt der Erwartungswerte gleich dem Erwartungswert des Produkts ist. Wir zeigen dies an folgendem

Beispiel: Die Zufallsgrößen X und Y besitzen die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$x \backslash y$	0	1	2	$W_X(x)$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$W_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

Damit gilt für das Produkt $X\cdot Y$:

xy	0	2	4
$W_{X\cdot Y}(xy)$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Für die Erwartungswerte ergibt sich:

$\mathscr{E}X = 0\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 1;$

$\mathscr{E}Y = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1;$

$\mathscr{E}(X\cdot Y) = 0\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot 0 + 4\cdot\frac{1}{4} = 1.$

Offenbar gilt $\mathscr{E}X\cdot\mathscr{E}Y = \mathscr{E}(X\cdot Y)$. Die Zufallsgrößen X und Y sind jedoch nicht unabhängig; es gilt nämlich

$P(X=0) = \frac{1}{2};\quad P(Y=0) = \frac{1}{4};\qquad$ aber $\qquad P(X=0 \wedge Y=0) = 0 \neq \frac{1}{8}.$

Wie schon erwähnt, können wir mit Hilfe der letzten Sätze die Berechnung von Erwartungswerten oft wesentlich vereinfachen. So erhält man leichter als im Beispiel 2 von Seite 173 den Erwartungswert der Zufallsgröße »Augensumme« beim Doppelwurf nach Satz 204.2 zu $3{,}5 + 3{,}5 = 7$. X bzw. Y sind dabei die Augenzahlen des 1. bzw. 2. Wurfs. Es gilt also $X((a|b)) = a$ bzw. $Y((a|b)) = b$. Entsprechend erhält man für den Erwartungswert der Zufallsgröße »Augenprodukt« beim Doppelwurf nach Satz 205.2 den Wert $3{,}5\cdot 3{,}5 = 12{,}25$. Dieser Wert unterscheidet sich vom Erwartungswert $15\frac{1}{6}$ des Quadrats der Augenzahl beim einfachen Würfelwurf (siehe Beispiel 3, Seite 174). Die Zufallsgrößen X = Augenzahl beim 1. Wurf und Y = Augenzahl beim 2. Wurf sind nämlich unabhängig, während die Zufallsgröße X natürlich von sich selber abhängig ist.

12.4.2. Sätze über die Varianz

Auf Seite 181 haben wir angekündigt, daß die Berechnung der Varianz einer Zufallsgröße oftmals einfacher durchgeführt werden kann als durch direkte Be-