Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

Aufgaben

1. a) Beim Werfen mit einem Würfel sei »Es fällt die Fünf« der Treffer. Gib das Ergebnis-10-Tupel der *Bernoulli*-Kette an, das sich ergibt, wenn man die ersten 10 Würfe aus Tabelle 10.1 als Versuchsausgänge ansieht. Berechne die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens, wenn
   1) die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Seite 42 angenommen wird,
   2) mit einem L-Würfel gespielt würde.

   b) Betrachte die Würfe 11–20, 21–30, ..., 91–100 aus Tabelle 10.1 und gib die daraus resultierenden Ergebnis-10-Tupel der *Bernoulli*-Kette an.

   c) Löse a) für »Es fällt eine ungerade Augenzahl« als Treffer.

   d) Löse a) für »Es fällt eine Augenzahl zwischen 2 und 5« als Treffer.

2. In einer Urne liegen eine rote und drei schwarze Kugeln. Man zieht dreimal je eine Kugel. Treffer A_i sei das Ziehen der roten Kugel beim i-ten Zug. Offenbar ist sowohl beim Ziehen mit Zurücklegen wie auch beim Ziehen ohne Zurücklegen $P(A_i) = \frac{1}{4}$ für $i = 1, 2, 3$. (Siehe 125/**102**) Eine *Bernoulli*-Kette liegt jedoch nur beim Ziehen mit Zurücklegen vor.

   a) Begründe die letzte Behauptung, indem du mit Hilfe eines Baums die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen erstellst.

   b) Zeige, daß beim Ziehen ohne Zurücklegen A_1 und A_2 stochastisch abhängig sind.

3. a) *Gerolamo Cardano* (1501–1576) behauptet zu Beginn von Kapitel XV seines *Liber de ludo aleae* (um 1564), daß sich bei einer fairen Wette die Einsätze wie $1:(n^2-1)$ verhalten müßten, wenn man darauf wetten wollte, bei n Würfen mit zwei Würfeln jedesmal eine gerade Augensumme zu erhalten. Was meinst du dazu?

   b) Gegen Ende desselben Kapitels kommt *Cardano* zur Erkenntnis, daß sich bei n aufeinander folgenden Versuchen die Einsätze wie $a^n:(b^n-a^n)$ verhalten müssen, wenn a die Anzahl der günstigen Fälle und b die Anzahl aller möglichen Fälle im Einzelversuch bedeuten. Als abschließendes Beispiel führt er aus, daß sich die Einsätze wie $753\,571 : 9\,324\,125 \approx 1:12$ verhalten müssen, wenn man fair darauf wetten wollte, daß bei 3 aufeinanderfolgenden Würfen mit 3 L-Würfeln jedesmal wenigstens ein Würfel die Eins zeigt. Weise die Richtigkeit beider Behauptungen nach.

4. Zur Entscheidung eines Problems werden 5 Experten befragt, die sich unabhängig voneinander äußern. Jeder Experte beurteilt das Problem mit 80% Sicherheit richtig.

   a) Stelle das Experiment als *Bernoulli*-Kette dar. Was bedeutet »Treffer beim i-ten Versuch«? Wie groß sind die Länge n und der Parameter p?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit
   1) urteilen genau der erste und der dritte Experte richtig,
   2) urteilen alle Experten richtig,
   3) erhält man kein richtiges Urteil,
   4) erhält man wenigstens ein richtiges Urteil?

   c) Wie viele Experten müßte man mindestens befragen, um mit mehr als 99% Sicherheit mindestens ein richtiges Urteil zu erhalten?

5. Eine Personenmenge (»Bevölkerung«, »Population«) bestehe zu 40% aus Frauen und zu 60% aus Männern. Es wird 5mal jemand ausgewählt und notiert, ob es ein Mann oder eine Frau ist. (Stichprobe vom Umfang 5, mit Zurücklegen.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
   a) keinen Mann, b) wenigstens 1 Mann, c) genau 1 Mann, d) nur Männer?

6. Wie viele Personen muß man aus der Bevölkerung von Aufgabe **5** mindestens auswählen, um dabei mit mindestens 99,9% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Mann zu erhalten?

7. Ein Gerät besteht aus 10 Bausteinen, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p ordnungsgemäß arbeiten. Fällt auch nur ein Baustein aus, so ist das Gerät gestört. Wie groß muß p sein, damit das Gerät mit 90% Sicherheit arbeitet?

8. Ein elektronisches Gerät besteht aus 13 Baugruppen. Fällt auch nur eine davon aus, ist es unbrauchbar. Man weiß, daß für jede Baugruppe die Wahrscheinlichkeit, während 1jährigen Betriebs auszufallen, 0,26% beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Gerät im Laufe eines Jahres repariert werden muß?

9. Eine Maschine erzeugt Metallteile, 5% davon sind unbrauchbar. Wie viele Teile muß man wenigstens nehmen, damit man mit mindestens 50% Wahrscheinlichkeit mindestens ein defektes dabei hat? (*Bernoulli*-Kette annehmen!)

10. Angenommen, man würde beim Überqueren einer gewissen Straßenkreuzung mit 0,5 Promille Wahrscheinlichkeit überfahren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt man 1 Jahr unverletzt, wenn man die Kreuzung täglich 2mal überquert?
Stelle das »Experiment« als *Bernoulli*-Kette dar. Was bedeutet »Treffer beim i-ten Versuch«? Welche Werte haben n und p?

11. Die Gewinnchance für einen Sechser beim Zahlenlotto »6 aus 49« ist $\approx \frac{1}{14\,\text{Mill.}}$ (Seite 94).
Wann hat man die größte Aussicht, wenigstens einen Sechser zu erhalten,
a) wenn man zu einer Ausspielung 1 Million Lottozettelfelder *verschieden* ausfüllt,
b) wenn man bei 10 Ausspielungen je 100 000 Lottozettelfelder *verschieden* ausfüllt,
c) wenn man zu einer Ausspielung 1 Million Lottozettelfelder *zufallsbestimmt* ausfüllt?
Wie groß sind jeweils Länge und Parameter der *Bernoulli*-Kette?
Bei welchem der Spielsysteme kann man 2 oder mehr Sechser bekommen?

12. Eine Stadt wird von 4 Kraftwerken versorgt. Es sind 2 Wasser- und 2 Dampfkraftwerke. Bei Gewitter besteht für jede der 4 zugehörigen Hochspannungsleitungen einzeln die Wahrscheinlichkeit p, daß sie sich wegen Blitzschlag automatisch abschaltet. Im Notfall können 2 Kraftwerke die Stadt gerade noch versorgen; es muß jedoch ein Dampfkraftwerk dabeisein.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bricht bei Gewitter die Stromversorgung der Stadt zusammen? Man zeichne diese Wahrscheinlichkeit als Funktion der »Abschaltewahrscheinlichkeit« p. Einheit = 10 cm. Man überzeuge sich durch Rechnung davon, daß die gezeichnete Funktion monoton steigt.
b) Man zeichne die entsprechende Funktion wie in **a)**, wenn die Stadt von 2 *beliebigen* Kraftwerken gerade noch versorgt werden kann.

13. Auf einer Straße kommen Lastwagen und Personenautos in regelloser Folge hintereinander. Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem beliebigen Augenblick gerade ein Lastauto vorbeifährt, sei p. Ich beginne in einem beliebigen Augenblick, Autos zu zählen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,
a) daß zuerst k Personenautos und dann ein Lastauto kommen,
b) daß die ersten k Autos keine Lastautos sind,
c) daß unter den ersten k Autos mindestens ein Lastauto ist,
d) daß in einer Gruppe von 5 Autos genau 3 Lastautos hintereinander fahren,
•**e)** daß in einer Gruppe von 5 Autos mindestens einmal genau 2 Lastautos hintereinander fahren?

•**14.** Man vergleiche die Ergebnisse der Aufgabe **13** mit der Erfahrung, wie sie die Tabellen 10.1 und 11.1 liefern. Man fasse jede Tabelle als Serie von 5fach-Würfen auf. In Tabelle 11.1 bedeute 0 = Lastauto oder (zweite Deutung) I = Lastauto (jeweils $p = \frac{1}{2}$). In Tabelle 10.1 bedeute 6 = Lastauto ($p = \frac{1}{6}$).
In den Teilen **a)** und **b)** der Aufgabe **13** setze man $k = 2$, in **c)** sei $k = 3$.

•**15.** 4 Kinder losen um 4 Äpfel, 2 große und 2 kleine. Sie werfen der Reihe nach eine Münze. Wer »Adler« wirft, erhält einen großen Apfel, wer »Zahl« wirft, einen kleinen, bis nur noch große oder nur noch kleine Äpfel da sind.

a) Ist das Verfahren gerecht, d.h., hat jedes die gleiche Aussicht, einen großen Apfel zu erhalten?

b) Ist es für je 2 von ihnen gleich wahrscheinlich, daß beide einen großen Apfel erhalten?

•**c)** Ist das Losverfahren gerecht, wenn es allgemein n große und n kleine Äpfel und $2n$ Kinder sind?

d) Man beurteile das Verfahren, wenn 3 Kinder um 1 großen und 2 kleine Äpfel losen.

16. Ein Computer drucke Wörter in einer zufälligen Reihenfolge aus. Jedes Wort, das den Buchstaben »i« enthält, heiße i-Wort. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausdruck eines i-Wortes betrage 0,4.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den ersten 5 ausgedruckten Wörtern mindestens 3 direkt aufeinanderfolgende Wörter i-Wörter sind?

b) Wie viele Wörter muß man mindestens ausdrucken lassen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein i-Wort zu erhalten?

c) Der Computer breche nun die Programmausführung nach dem dritten ausgedruckten i-Wort ab, spätestens aber nach dem sechsten Wort. X sei die Anzahl der ausgedruckten Wörter. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße X.

17. Eine L-Münze werde 5mal geworfen. Treffer sei das Auftreten von Adler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Ergebnis

a) mindestens 4mal nacheinander Treffer oder mindestens 4mal nacheinander Nieten,

b) mindestens 3mal nacheinander Treffer oder mindestens 3mal nacheinander Nieten enthalten?

18. Ein Trefferpaar seien zwei und nicht mehr aufeinanderfolgende Treffer. Ein L-Würfel werde 6mal geworfen; Treffer sei das Auftreten der Sechs. X sei die Zufallsgröße »Anzahl der Trefferpaare«. Bestimme ihren Erwartungswert und ihre Varianz.

Bei den folgenden »**Wartezeit-Aufgaben**« sei die Länge n der *Bernoulli*-Kette beliebig, aber jeweils hinreichend groß.

19. Ein Laplace-Würfel werde so lange geworfen, bis eine Sechs erscheint.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Sechs frühestens beim 4. Wurf auftritt?

b) Überprüfe das Resultat von **a)** an Tabelle 10.1. Fasse dabei die 80 Halbzeilen als 80 Anfänge von *Bernoulli*-Ketten auf.

20. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dem ersten Treffer genau k Nieten vorausgehen? Stelle die Wahrscheinlichkeiten für $p = \frac{1}{4}$ und $k = 0, \dots, 10$ graphisch dar.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der 1. Treffer erst beim k-ten Wurf oder noch später?

•**21.** Für eine *Bernoulli*-Kette der Länge n mit dem Parameter p werde die Zufallsgröße X folgendermaßen definiert: X nehme den Wert i an, wenn beim i-ten Versuch zum ersten Mal ein Treffer eintritt; X nehme den Wert 0 an, wenn kein Treffer eintritt.

a) Berechne $\mathscr{E}X$.

b) Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \mathscr{E}X$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert?

c) Nun sei $X :=$ Nummer der ersten Sechs beim Werfen eines L-Würfels. Bestimme $\mathscr{E}X$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \mathscr{E}X$ unter Verwendung der Ergebnisse aus **a)** und **b)**.

d) Überprüfe den errechneten Erwartungswert an Hand von Tabelle 10.1. Fasse dabei die 80 Halbzeilen als 80 *Bernoulli*-Ketten der Länge 15 auf.

e) Bekanntlich gilt bei genügend kleinem Δt für den radioaktiven Zerfall $\Delta N = -\lambda N \Delta t$. Dabei bedeutet N die Anzahl der zu Beginn des Intervalls Δt vorhandenen Atome, $-\Delta N$ die Anzahl der in der Zeit Δt zerfallenden Atome, λ die Zerfallskonstante. Wir betrachten nun folgende *Bernoulli*-Kette: Ein Versuch sei die Beobachtung eines bestimmten Atoms während der Zeit $\Delta t = 1$. Treffer sei das Zerfallen des Atoms. Gib den Parameter dieser *Bernoulli*-Kette an. Deute $\lim\limits_{n \to \infty} \mathscr{E}X$ von **b)** für diesen Fall.

•**22.** In einer unendlichen *Bernoulli*-Kette mit dem Parameter p definiert man eine Zufallsgröße $X :=$ »Nummer des Versuchs, bei dem zum ersten Mal ein Treffer eintritt«.

a) Bestimme die Verteilung $P(X = k)$. Man nennt sie **geometrische Verteilung**.

b) *Buffon* (1707–1788) berichtet in Abschnitt XVIII seines *Essai d'arithmétique morale* (1777), daß er zur Untersuchung des »Petersburger Problems« (Aufgabe 189/**23**) ein Kind 2048mal das Spiel spielen ließ. Dabei ergab sich, daß Adler zum ersten Mal

1061mal beim 1. Wurf,	494mal beim 2. Wurf,	232mal beim 3. Wurf,
137mal beim 4. Wurf,	56mal beim 5. Wurf,	29mal beim 6. Wurf,
25mal beim 7. Wurf,	8mal beim 8. Wurf,	6mal beim 9. Wurf

erschien. Vergleiche die relativen Häufigkeiten mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

••**c)** Zeige, daß für den Erwartungswert und die Varianz einer geometrisch verteilten Zufallsgröße gilt: $\mathscr{E}X = \frac{1}{p}$, $\operatorname{Var} X = \frac{q}{p^2}$.

Benütze dabei folgende Beziehung aus der Reihenlehre:

Für $|x| < 1$ gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Begründung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

d) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Nummer der ersten Sechs beim Werfen eines L-Würfels«. (Vgl. Aufgabe **21 c, d**).

e) Zeichne ein Stabdiagramm der Zufallsgröße aus **d)**. Trage darin μ und σ ein. ($10\% \mathrel{\hat=} 5\,\text{cm}$)

f) Es sei $Z :=$ »Anzahl der Nieten, die dem ersten Treffer vorausgehen«.

Zeige, daß $\mathscr{E}Z = \frac{q}{p}$ und $\operatorname{Var} Z = \frac{q}{p^2}$.

23. Zwei L-Münzen werden so lange geworfen, bis beide gleichzeitig Adler zeigen. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der dazu nötigen Würfe.

a) Gib einen gröberen Ergebnisraum an. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

b) Berechne $\mathscr{E}X$ und $\operatorname{Var} X$. (Siehe Aufgabe **22**.)

•**24.** Zwei L-Würfel werden beliebig oft geworfen und die Augensumme als Ergebnis notiert. Berechne die Erwartungswerte folgender Zufallsgrößen

$A :=$ Anzahl der Spiele, bis die Augensumme 6 erscheint,
$B :=$ Anzahl der Spiele, bis die Augensumme 7 erscheint,
$C :=$ Anzahl der Spiele, bis die Augensumme 8 erscheint,
$D :=$ Anzahl der Spiele, bis zweimal die Augensumme 7 erscheint,
•$E :=$ Anzahl der Spiele, bis die Augensummen 6 und 8 erscheinen.

Vergleiche die Ergebnisse mit denen von Aufgabe 112/**12 b**).

25. Ein Laplace-Würfel werde so lange geworfen, bis die zweite Sechs fällt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies beim 10. Wurf geschieht?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies *frühestens* beim 10. Wurf geschieht?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies *spätestens* beim 10. Wurf geschieht?

d) Überprüfe die in **b)** und **c)** errechneten Wahrscheinlichkeiten an Tabelle 10.1. Fasse dabei die 80 Halbzeilen als 80 Anfänge von *Bernoulli*-Ketten auf.

•**26.** In einer unendlichen *Bernoulli*-Kette mit dem Parameter p definiert man eine Zufallsgröße $X_m :=$ »Nummer des Versuchs, bei dem der m-te Treffer eintritt«.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_m. Sie heißt ***Pascal*-Verteilung**. Für $m = 1$ ergibt sich die geometrische Verteilung aus Aufgabe **22** als Sonderfall.

b) Stelle X_m durch die Zufallsgrößen Y_i dar; dabei bedeute Y_i die Anzahl der Nieten zwischen dem $(i-1)$-ten und i-ten Treffer $(i = 1, \dots, m)$.

c) Berechne unter Verwendung von **b)** Erwartungswert und Varianz von X_m.

d) Es sei $X_2 :=$ »Nummer desjenigen Wurfs eines L-Würfels, bei dem die zweite Sechs fällt«. Stelle die Verteilung von X_2 auf, berechne $\mathscr{E}X_2$ und $\operatorname{Var} X_2$ und zeichne schließlich ein Stabdiagramm. ($1\% \mathrel{\hat{=}} 1$ cm)

e) Überprüfe den errechneten Erwartungswert von X_2 an Hand von Tabelle 10.1. Fasse dabei die 40 Zeilen als 40 Anfänge von *Bernoulli*-Ketten auf.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint der m-te Treffer erst beim k-ten Versuch oder noch später?

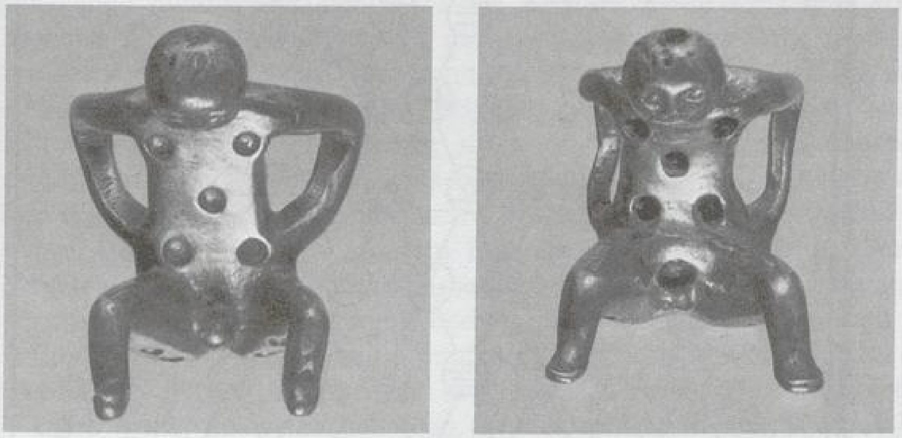

Bild 227.1 Mann und Frau als Würfel aus der römischen Antike. British Museum, London. – Vgl. Bild 46.2.