Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

14. 4. Veranschaulichung von Binomialverteilungen durch Experimente

Symmetriegesetz für kumulative binomiale Verteilungsfunktionen:

$$F_p^n(k) = 1 - F_{1-p}^n(n-k-1), \qquad \text{falls } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Die Symmetriebeziehung für $k \notin \{0, 1, \dots, n\}$ ist ohne praktische Bedeutung. Tabelle 237.1 zeigt uns einen Ausschnitt aus den *Stochastik-Tabellen*, an Hand dessen wir die Tafelbenutzung erklären wollen. Suchen wir z.B. den Wert $F_{5/6}^8(6)$, so könnten wir dafür $1 - F_{1/6}^8(8-6-1) = 1 - F_{1/6}^8(1)$ schreiben, $F_{1/6}^8(1)$ mit Hilfe des grauen Eingangs zu 0,60468 bestimmen und schließlich $F_{5/6}^8(6) = 1 - 0{,}60468 = 0{,}39532$ errechnen. Benutzen wir hingegen für p den roten Eingang unten, so müssen wir die rechts stehenden rot unterlegten k-Werte nehmen. Wir lesen zu $p = \frac{5}{6}$ und $k = 6$ unmittelbar den Wert 0,60468 ab; die Subtraktion dieses Wertes von 1 bleibt uns leider nicht erspart. Andererseits benötigt man bei vielen Aufgaben gerade den Wert $1 - F_p^n(k)$, den man für $p \geqq \frac{1}{2}$ dann direkt mit Hilfe des roten Eingangs aus der Tabelle entnehmen kann. Sucht man z.B. für $n = 8$ und $p = \frac{5}{6}$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \geqq 4) = 1 - P(X \leqq 3) = 1 - F_{5/6}^8(3)$, so liest man diesen Wert in Tabelle 237.1 mit Hilfe des roten Eingangs direkt ab zu $P(X \geqq 4) = 0{,}99539$.

n	$k \setminus p$	$\frac{1}{6}$	
8	0	23257	7
	1	60468	6
	2	86515	5
	3	96934	4
	4	99539	3
	5	99956	2
	6	99998	1
	7		0
n		$\frac{5}{6}$	$p \setminus k$

$F_p^n(k) = 1 - \text{Tafelwert}$

Tab. 237.1 Die ersten 5 Dezimalstellen (gerundet) der kumulativen Verteilungsfunktionen $F_{1/6}^8$ und $F_{5/6}^8$.
Man beachte, daß sich die grau unterlegten k-Werte mit den rot unterlegten k-Werten nur zu $n-1$ ergänzen!

14.4. Veranschaulichung von Binomialverteilungen durch Experimente

Beispiel 1: Wir wollen die Werte von $B(10; \frac{1}{2})$ experimentell durch relative Häufigkeiten angenähert herstellen. Dazu müssen wir z.B. den 10fach-Wurf einer Laplace-Münze sehr oft ausführen und zählen, wie oft wir dabei 0 Adler, 1 Adler, ..., 10 Adler erhalten. Wir werten Tabelle 11.1 demgemäß aus: Je 2 untereinanderstehende Fünfergruppen werden als ein Ergebnis eines 10fach-Wurfes aufgefaßt. Es ergibt sich folgende Häufigkeitsverteilung:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl des Auftretens von k Adlern	0	0	4	10	14	23	16	10	2	1	0
Häufigkeit	0	0	0,0500	0,1250	0,1750	0,2875	0,2000	0,1250	0,0250	0,0125	0
$B(10; \frac{1}{2}; k)$	0,0010	0,0098	0,0439	0,1172	0,2051	0,2461	0,2051	0,1172	0,0439	0,0098	0,0010

Unter den relativen Häufigkeiten sind die »Idealwerte« $B(10; \frac{1}{2}; k)$ eingetragen. Die Abweichungen zwischen Ideal und Wirklichkeit sind nicht allzu groß. Wir schreiben sie dem Zufall zu. Ob dies berechtigt ist, wäre mit den Methoden der *mathematischen Statistik* zu klären.
Mit einem von *Francis Galton* (1822–1911)* angegebenen Gerät kann man angenähert eine Binomialverteilung sogar unmittelbar mechanisch erzeugen. Wir besprechen dazu

Beispiel 2: Wir stellen uns eine schachbrettartig angelegte Stadt vor (Figur 238.1). Im Punkte 0 befindet sich eine Kneipe. Ein Betrunkener versucht, nach Hause zu gehen. An jeder Kreuzung geht er mit der Wahrscheinlichkeit p nach rechts und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ nach links.
Der Irrweg endet zufallsbestimmt an der Kreuzung Nummer k in der n-ten Zeile. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes k betrachten wir folgendes Schema:

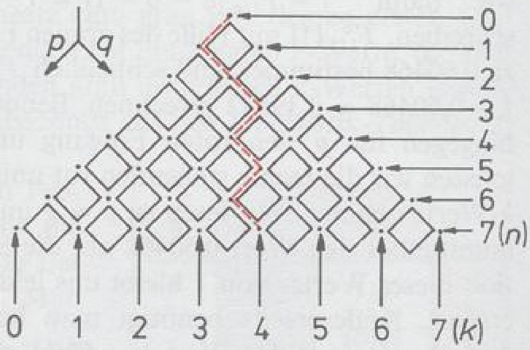
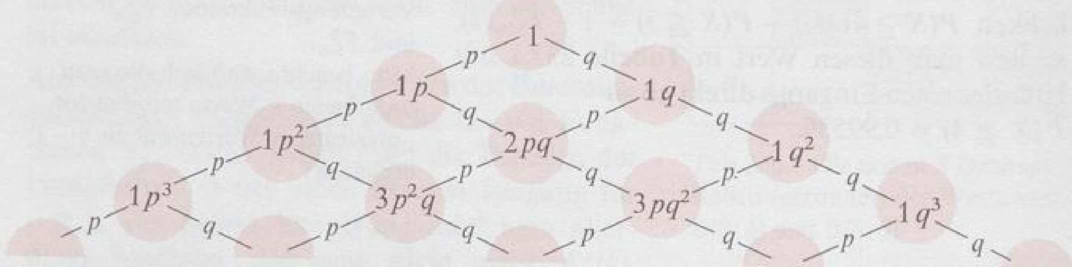


Fig. 238.1 Stadtplan für den Irrweg



An jedem Kreuzungspunkt steht jeweils die Wahrscheinlichkeit, ihn zu erreichen. Ein Kreuzungspunkt kann nur von den beiden darüberliegenden Kreuzungspunkten aus erreicht werden. Die Anzahl der Wege, die zu ihm führen, ist also gleich der Summe der Möglichkeiten, die beiden darüber liegenden Punkte zu erreichen. Man erhält so die Anordnung des *Pascal-Stifel*schen Dreiecks. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit zu $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = B(n; p; k)$.

Die Zufallsgröße »Nummer der Kreuzung in der n-ten Zeile« ist also binomial nach $B(n; p)$ verteilt.
Für $p = q = \frac{1}{2}$ läßt sich nun der Zufallsweg des Betrunkenen mit einem *Galton-Brett* realisieren.

Auf einem vertikal aufgestellten Brett wird ein Quadratgitter durch Nägel erzeugt (vgl. Figur 239.1). Die durch einen Trichter senkrecht auf den ersten Nagel fallenden Kugeln werden mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nach rechts oder links abgelenkt.

* Siehe Seite 407.

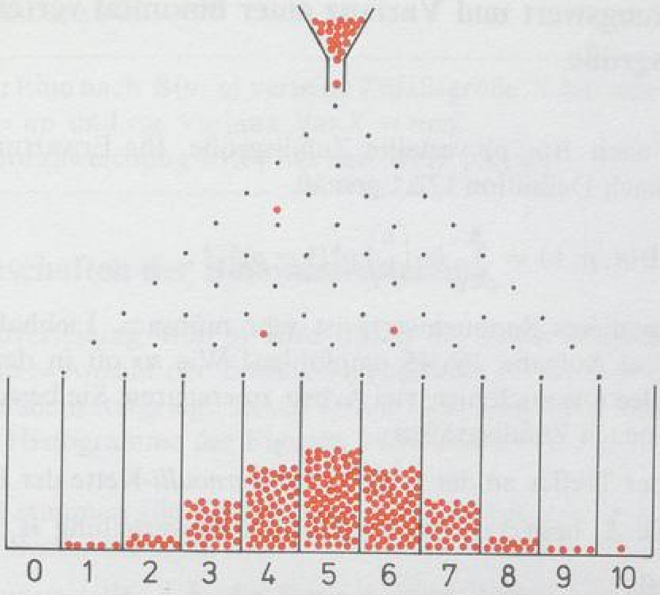


Fig. 239.1 *Galton*-Brett. Das Brett heißt auch *Quincunx*. Faßt man nämlich jeweils 5 Nägel zusammen, so entsteht eine Anordnung der Form ⁙, die von den Römern quincunx genannt wurde.

Falls der Abstand der Nägel in einem günstigen Verhältnis zum Kugeldurchmesser steht, treffen die Kugeln wieder senkrecht auf die Nägel der nächsten Reihe. In den Fächern sammeln sich die Kugeln dann so an, daß ihre Verteilung der Binomialverteilung $B(n; \frac{1}{2})$ entspricht. Einen Eindruck von den wirklichen Verhältnissen gibt Bild 239.2. Durch eine seitliche Neigung kann auch $p \neq \frac{1}{2}$ realisiert werden.

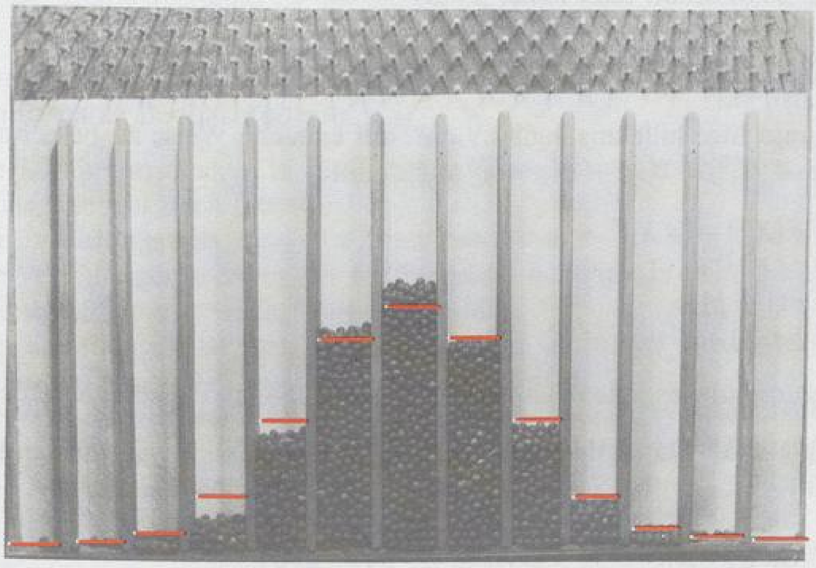


Bild 239.2 Versuch am *Galton*-Brett. (Die roten Linien geben die Idealwerte an.)