Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

14. 5. Erwartungswert und Varianz einer binomial verteilten Zufallsgröße

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

14.5. Erwartungswert und Varianz einer binomial verteilten Zufallsgröße

Es sei X eine nach $B(n; p)$ verteilte Zufallsgröße. Ihr Erwartungswert $\mathscr{E}(X)$ berechnet sich nach Definition 172.1 gemäß

$$\mathscr{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot B(n; p; k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Die Berechnung dieses Summenwerts ist sehr mühsam. Liebhabern tüfteliger Umformungen sei Aufgabe 266/**45** empfohlen! Wie so oft in der Mathematik hilft eine gute Idee uns auch hier, viel Arbeit zu ersparen. Sie besteht in der Einführung von n neuen Zufallsgrößen

$X_i :=$ »Anzahl der Treffer an der Stelle i der *Bernoulli*-Kette der Länge n«.

Die Zufallsgröße X_i besitzt die Wahrscheinlichkeitsverteilung W_i:

x	0	1
$W_i(x)$	q	p

Die X_i sind somit gleichverteilt, und zwar binomial nach $B(1; p)$. Also sind auch ihre Erwartungswerte gleich, nämlich

$\mathscr{E}(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$

Die Anzahl X der Treffer der gegebenen *Bernoulli*-Kette ist aber die Summe der Treffer X_i an den Stellen i, aufsummiert von 1 bis n. Also

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Nach Satz 205.1 erhält man daher sofort

$$\mathscr{E}X = \mathscr{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Dieselbe gute Idee hilft uns auch, $\operatorname{Var} X$ auf einfache Weise zu berechnen. Zunächst gilt $\mathscr{E}(X_i^2) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$ und damit

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} X_i &= \mathscr{E}(X_i^2) - (\mathscr{E}X_i)^2 = \\ &= p - p^2 = \\ &= p(1-p) = \\ &= pq. \end{aligned}$$

Aus der zugrundeliegenden *Bernoulli*-Kette ergibt sich, daß die X_i stochastisch unabhängig sind. Damit läßt sich Satz 209.1 auf $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ anwenden, und man erhält

$$\operatorname{Var} X = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

Wir fassen zusammen in

> **Satz 241.1:** Eine nach $B(n; p)$ verteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mathscr{E}X = np$ und die Varianz $\operatorname{Var} X = npq$.
> Die Standardabweichung $\sigma(X)$ hat den Wert $\sqrt{npq}$.

14.6. Eigenschaften der Binomialverteilung

Jede Binomialverteilung $B(n; p)$ wird durch die beiden Zahlen n (Länge der *Bernoulli*-Kette = Anzahl der Einzelversuche) und p (Trefferwahrscheinlichkeit beim Einzelversuch) festgelegt. Einen ersten Überblick über diese Abhängigkeiten geben die Histogramme der Figuren 242.1 und 243.1.

In Figur 242.1 stimmen alle Verteilungen in der Länge $n = 16$ überein. Wir machen folgende Beobachtungen:

1. Die Maximumstelle, d.h. die Stelle größter Wahrscheinlichkeit, rückt mit wachsendem p nach rechts.
2. Der Erwartungswert μ wächst mit p monoton.
3. $B(16; p)$ liegt symmetrisch zur Verteilung $B(16; 1-p)$ bezüglich der Achse $x = 8$.
4. Von $p = 0{,}1$ bis $p = 0{,}5$ werden die Verteilungen breiter, danach (wegen der Symmetrie) wieder schmäler, d.h., die Standardabweichung σ nimmt bis zu einem Maximum bei $p = \frac{1}{2}$ monoton zu und dann wieder monoton ab.
5. Von $p = 0{,}1$ bis $p = 0{,}5$ werden die Verteilungen niedriger, danach (wegen der Symmetrie) wieder höher, d.h., das Maximum von $p \mapsto B(16; p)$ nimmt mit wachsendem p bis $p = \frac{1}{2}$ ab, dann wieder zu.
6. $B(16; \frac{1}{2})$ ist symmetrisch bezüglich der Achse $x = 8$. Je näher p bei $\frac{1}{2}$ liegt, um so »symmetrischer« ist die Verteilung.

In Figur 243.1 stimmen alle Verteilungen im Parameter $p = \frac{1}{5}$ überein. Wir machen folgende Beobachtungen:

7. Die Maximumstelle, d.h. die Stelle größter Wahrscheinlichkeit, rückt mit wachsendem n nach rechts.
8. Der Erwartungswert μ wächst mit n monoton.
9. Die Verteilungen werden mit wachsendem n immer breiter, d.h., die Standardabweichung σ wächst mit n monoton.
10. Die Verteilungen werden mit wachsendem n immer niedriger, d.h., das Maximum von $n \mapsto B(n; \frac{1}{5})$ fällt monoton mit n.
11. Die Verteilungen werden mit wachsendem n immer »symmetrischer«.
12. $B(4; \frac{1}{5})$, $B(9; \frac{1}{5})$ und $B(64; \frac{1}{5})$ nehmen ihr Maximum zweimal, und zwar an benachbarten Stellen k an.