# Stochastik

**Barth, Friedrich**

**München, [20]03**

14. 6. Eigenschaften der Binomialverteilung

Wir fassen zusammen in

> **Satz 241.1:** Eine nach $B(n; p)$ verteilte Zufallsgröße $X$ hat den Erwartungswert $\mathscr{E} X = np$ und die Varianz $\operatorname{Var} X = npq$.
> Die Standardabweichung $\sigma(X)$ hat den Wert $\sqrt{npq}$.

## 14.6. Eigenschaften der Binomialverteilung

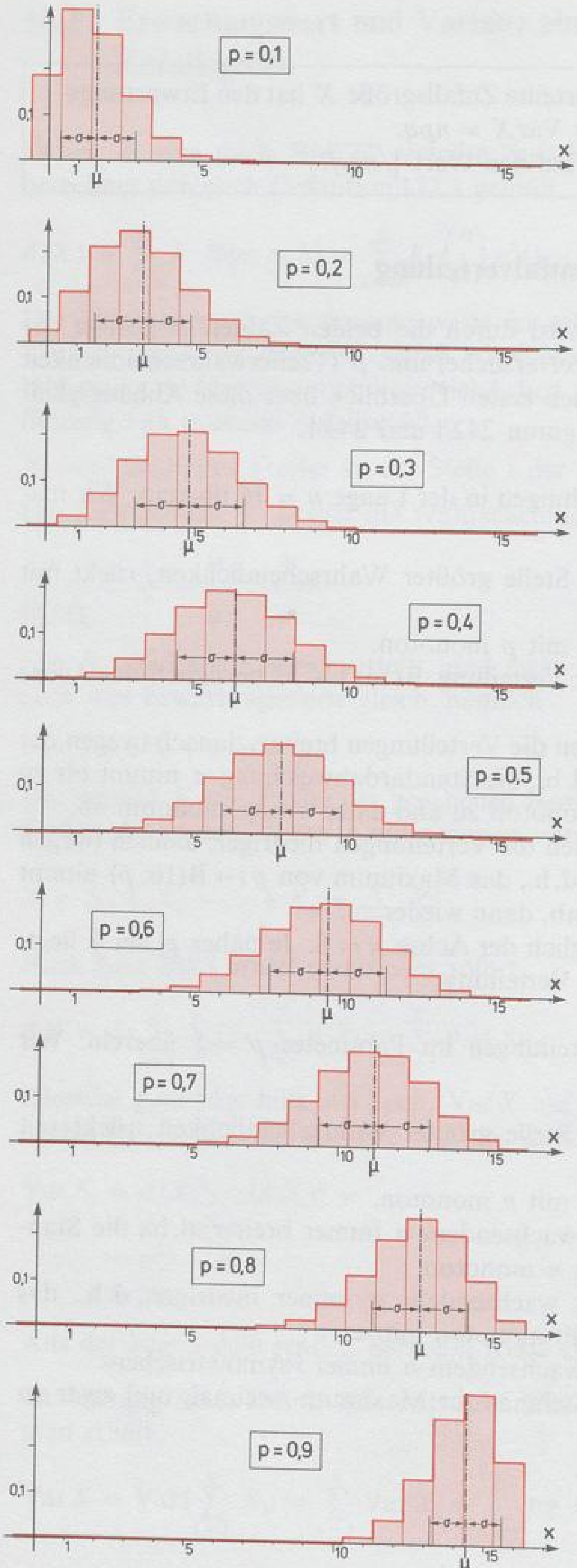
Jede Binomialverteilung $B(n; p)$ wird durch die beiden Zahlen $n$ (Länge der *Bernoulli*-Kette = Anzahl der Einzelversuche) und $p$ (Trefferwahrscheinlichkeit beim Einzelversuch) festgelegt. Einen ersten Überblick über diese Abhängigkeiten geben die Histogramme der Figuren 242.1 und 243.1.

In Figur 242.1 stimmen alle Verteilungen in der Länge $n = 16$ überein. Wir machen folgende Beobachtungen:

**1.** Die Maximumstelle, d. h. die Stelle größter Wahrscheinlichkeit, rückt mit wachsendem $p$ nach rechts.
**2.** Der Erwartungswert $\mu$ wächst mit $p$ monoton.
**3.** $B(16; p)$ liegt symmetrisch zur Verteilung $B(16; 1-p)$ bezüglich der Achse $x = 8$.
**4.** Von $p = 0{,}1$ bis $p = 0{,}5$ werden die Verteilungen breiter, danach (wegen der Symmetrie) wieder schmäler, d. h., die Standardabweichung $\sigma$ nimmt bis zu einem Maximum bei $p = \frac{1}{2}$ monoton zu und dann wieder monoton ab.
**5.** Von $p = 0{,}1$ bis $p = 0{,}5$ werden die Verteilungen niedriger, danach (wegen der Symmetrie) wieder höher, d. h., das Maximum von $p \mapsto B(16; p)$ nimmt mit wachsendem $p$ bis $p = \frac{1}{2}$ ab, dann wieder zu.
**6.** $B(16; \frac{1}{2})$ ist symmetrisch bezüglich der Achse $x = 8$. Je näher $p$ bei $\frac{1}{2}$ liegt, um so »symmetrischer« ist die Verteilung.

In Figur 243.1 stimmen alle Verteilungen im Parameter $p = \frac{1}{5}$ überein. Wir machen folgende Beobachtungen:

**7.** Die Maximumstelle, d. h. die Stelle größter Wahrscheinlichkeit, rückt mit wachsendem $n$ nach rechts.
**8.** Der Erwartungswert $\mu$ wächst mit $n$ monoton.
**9.** Die Verteilungen werden mit wachsendem $n$ immer breiter, d. h., die Standardabweichung $\sigma$ wächst mit $n$ monoton.
**10.** Die Verteilungen werden mit wachsendem $n$ immer niedriger, d. h., das Maximum von $n \mapsto B(n; \frac{1}{5})$ fällt monoton mit $n$.
**11.** Die Verteilungen werden mit wachsendem $n$ immer »symmetrischer«.
**12.** $B(4; \frac{1}{5})$, $B(9; \frac{1}{5})$ und $B(64; \frac{1}{5})$ nehmen ihr Maximum zweimal, und zwar an benachbarten Stellen $k$ an.




| | $p = 0{,}1$ | | $p = 0{,}2$ | | $p = 0{,}3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ |
| 0 | .185 | .185 | .028 | .028 | .003 | .003 |
| 1 | .329 | .515 | .113 | .141 | .023 | .026 |
| 2 | .275 | .789 | .211 | .352 | .073 | .099 |
| 3 | .142 | .932 | .246 | .598 | .146 | .246 |
| 4 | .051 | .983 | .200 | .798 | .204 | .450 |
| 5 | .014 | .997 | .120 | .918 | .210 | .660 |
| 6 | .003 | .999 | .055 | .973 | .165 | .825 |
| 7 | .000 | 1.000 | .020 | .993 | .101 | .926 |
| 8 | | | .006 | .999 | .049 | .974 |
| 9 | | | .001 | 1.000 | .019 | .993 |
| 10 | | | | | .006 | .998 |
| 11 | | | | | .001 | 1.000 |

| | $p = 0{,}4$ | | $p = 0{,}5$ | | $p = 0{,}6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ |
| 1 | .003 | .003 | | | | |
| 2 | .015 | .018 | .002 | .002 | | |
| 3 | .047 | .065 | .009 | .011 | .001 | .001 |
| 4 | .101 | .167 | .028 | .038 | .004 | .005 |
| 5 | .162 | .329 | .067 | .105 | .014 | .019 |
| 6 | .198 | .527 | .122 | .227 | .039 | .058 |
| 7 | .189 | .716 | .175 | .402 | .084 | .142 |
| 8 | .142 | .858 | .196 | .598 | .142 | .284 |
| 9 | .084 | .942 | .175 | .773 | .189 | .473 |
| 10 | .039 | .981 | .122 | .895 | .198 | .671 |
| 11 | .014 | .995 | .067 | .962 | .162 | .833 |
| 12 | .004 | .999 | .028 | .989 | .101 | .935 |
| 13 | .001 | 1.000 | .009 | .998 | .047 | .982 |
| 14 | | | .002 | 1.000 | .015 | .997 |
| 15 | | | | | .003 | 1.000 |

| | $p = 0{,}7$ | | $p = 0{,}8$ | | $p = 0{,}9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ | $\mathrm{B}(x)$ | $F(x)$ |
| 5 | .001 | .002 | | | | |
| 6 | .006 | .007 | | | | |
| 7 | .019 | .026 | .001 | .001 | | |
| 8 | .049 | .074 | .006 | .007 | | |
| 9 | .101 | .175 | .020 | .027 | .000 | .001 |
| 10 | .165 | .340 | .055 | .082 | .003 | .003 |
| 11 | .210 | .550 | .120 | .202 | .014 | .017 |
| 12 | .204 | .754 | .200 | .402 | .051 | .068 |
| 13 | .146 | .901 | .246 | .648 | .142 | .211 |
| 14 | .073 | .974 | .211 | .859 | .275 | .485 |
| 15 | .023 | .997 | .113 | .972 | .329 | .815 |
| 16 | .003 | 1.000 | .028 | 1.000 | .185 | 1.000 |

Fig. 242.1 Binomialverteilungen $\mathrm{B}(16; p)$ für verschiedene Parameterwerte $p$


**$n = 1$**

| $x$ | B($x$) | $F(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | .800 | .800 |
| 1 | .200 | 1.000 |

**$n = 4$**

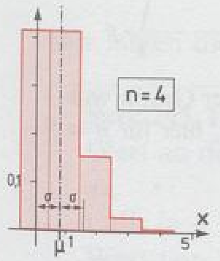
| $x$ | B($x$) | $F(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | .410 | .410 |
| 1 | .410 | .819 |
| 2 | .154 | .973 |
| 3 | .026 | .998 |
| 4 | .002 | 1.000 |

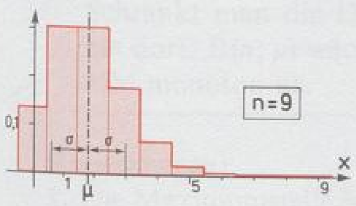
**$n = 9$**

| $x$ | B($x$) | $F(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | .134 | .134 |
| 1 | .302 | .436 |
| 2 | .302 | .738 |
| 3 | .176 | .914 |
| 4 | .066 | .980 |
| 5 | .017 | .997 |
| 6 | .003 | 1.000 |

**$n = 16$**

| $x$ | B($x$) | $F(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | .028 | .028 |
| 1 | .113 | .141 |
| 2 | .211 | .352 |
| 3 | .246 | .598 |
| 4 | .200 | .798 |
| 5 | .120 | .918 |
| 6 | .055 | .973 |
| 7 | .020 | .993 |
| 8 | .006 | .999 |
| 9 | .001 | 1.000 |




**$n = 25$**

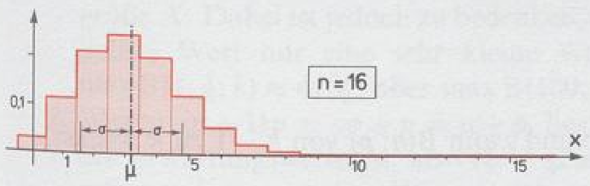
| $x$ | B($x$) | $F(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | .004 | .004 |
| 1 | .024 | .027 |
| 2 | .071 | .098 |
| 3 | .136 | .234 |
| 4 | .187 | .421 |
| 5 | .196 | .617 |
| 6 | .163 | .780 |
| 7 | .111 | .891 |
| 8 | .062 | .953 |
| 9 | .029 | .983 |
| 10 | .012 | .994 |
| 11 | .004 | .998 |
| 12 | .001 | 1.000 |

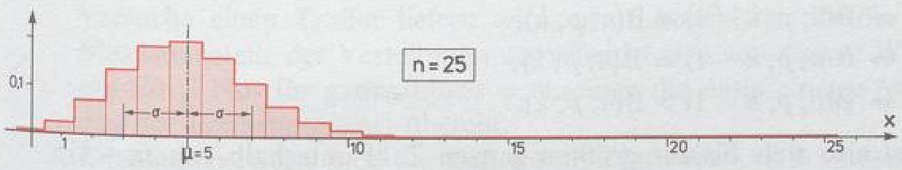
**$n = 64$**

| $x$ | B($x$) | $F(x)$ |
|---|---|---|
| 4 | .002 | .002 |
| 5 | .005 | .007 |
| 6 | .011 | .018 |
| 7 | .024 | .042 |
| 8 | .042 | .084 |
| 9 | .066 | .150 |
| 10 | .091 | .241 |
| 11 | .111 | .352 |
| 12 | .123 | .475 |
| 13 | .123 | .598 |
| 14 | .112 | .710 |
| 15 | .093 | .803 |
| 16 | .071 | .875 |
| 17 | .050 | .925 |
| 18 | .033 | .958 |
| 19 | .020 | .978 |
| 20 | .011 | .989 |
| 21 | .006 | .995 |
| 22 | .003 | .998 |
| 23 | .001 | .999 |
| 24 | .001 | 1.000 |

**$n = 100$**

| $x$ | B($x$) | $F(x)$ |
|---|---|---|
| 8 | .001 | .001 |
| 9 | .001 | .002 |
| 10 | .003 | .006 |
| 11 | .007 | .013 |
| 12 | .013 | .025 |
| 13 | .022 | .047 |
| 14 | .034 | .080 |
| 15 | .048 | .129 |
| 16 | .064 | .192 |
| 17 | .079 | .271 |
| 18 | .091 | .362 |
| 19 | .098 | .460 |
| 20 | .099 | .559 |
| 21 | .095 | .654 |
| 22 | .085 | .739 |
| 23 | .072 | .811 |
| 24 | .058 | .869 |
| 25 | .044 | .913 |
| 26 | .032 | .944 |
| 27 | .022 | .966 |
| 28 | .014 | .980 |
| 29 | .009 | .989 |
| 30 | .005 | .994 |
| 31 | .003 | .997 |
| 32 | .002 | .998 |
| 33 | .001 | .999 |
| 34 | .000 | 1.000 |



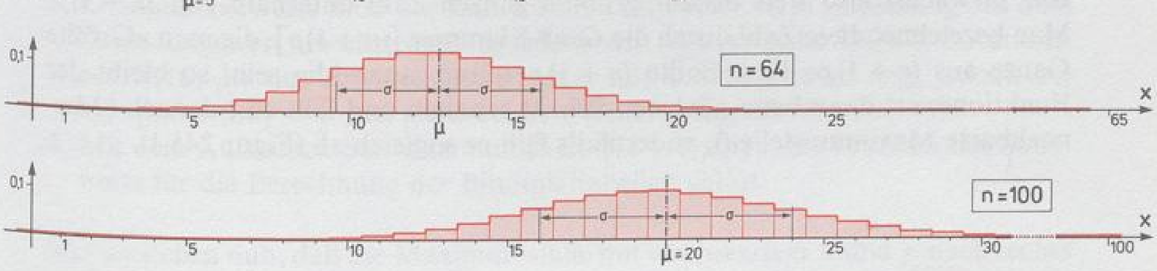




Fig. 243.1 Binomialverteilungen B($n$; $\frac{1}{5}$) für verschiedene Längen $n$ der *Bernoulli*-Kette

**Zu 2. und 8.** Nach Satz 241.1 ist $\mathscr{E}X = np$. Also gilt allgemein: Der Erwartungswert wächst mit $n$ und mit $p$ echt monoton.

**Zu 4. und 9.** Nach Satz 241.1 ist $\sigma = \sqrt{npq}$. Also gilt allgemein: Die Standardabweichung wächst echt monoton mit $n$. Aus der Umformung

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{-n(p-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}n}$$

ersieht man sofort, daß der Radikand $\operatorname{Var} X$ der Funktionsterm einer nach unten geöffneten Parabel ist, deren Scheitel bei $(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}n)$ liegt. (Vgl. Figur 244.1.) Das bedeutet aber, daß $\sigma$ bei festem $n$ für $p = \frac{1}{2}$ maximal wird.

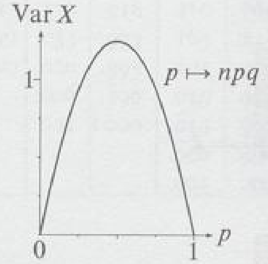



Fig. 244.1 Der Graph von $\operatorname{Var} X = npq$, hier für $n = 5$

**Zu 1., 7. und 12.** Das Maximum einer Binomialverteilung bezüglich $x$ kann man leider nicht mit der Differentialrechnung bestimmen, da die Funktion ja gerade an den interessanten Stellen $0, 1, 2, \ldots, n$ unstetig und damit nicht differenzierbar ist. Hier hilft uns aber die in **14.3.** für diese Stellen gewonnene Rekursionsformel weiter, die wir weiter umformen.

$$\begin{aligned} \frac{B(n;p;k)}{B(n;p;k-1)} &= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} = \\ &= 1 + \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} - 1 = \\ &= 1 + \frac{(n-k+1)p - kq}{kq} = \\ &= 1 + \frac{(n+1)p - k}{kq}. \end{aligned}$$

Der Zähler des Bruches entscheidet, ob und wann $B(n;p)$ von $k-1$ zu $k$ wächst, konstant bleibt oder abnimmt:

$$\begin{aligned} k < (n+1)p &\Leftrightarrow B(n;p;k-1) < B(n;p;k), \\ k = (n+1)p &\Leftrightarrow B(n;p;k-1) = B(n;p;k), \\ k > (n+1)p &\Leftrightarrow B(n;p;k-1) > B(n;p;k). \end{aligned}$$

$B(n;p)$ wächst also stets bis zur größten ganzen Zahl unterhalb von $(n+1)p$. Man bezeichnet diese Zahl durch die ***Gauß*-Klammer** $[(n+1)p]$, die man »Größte Ganze aus $(n+1)p$« liest. Sollte $(n+1)p$ selbst ganzzahlig sein, so bleibt der Funktionswert dann beim nächsten Schritt erhalten und fällt erst danach (2 benachbarte Maximumstellen); andernfalls fällt er sogleich ab (Figur 245.1).

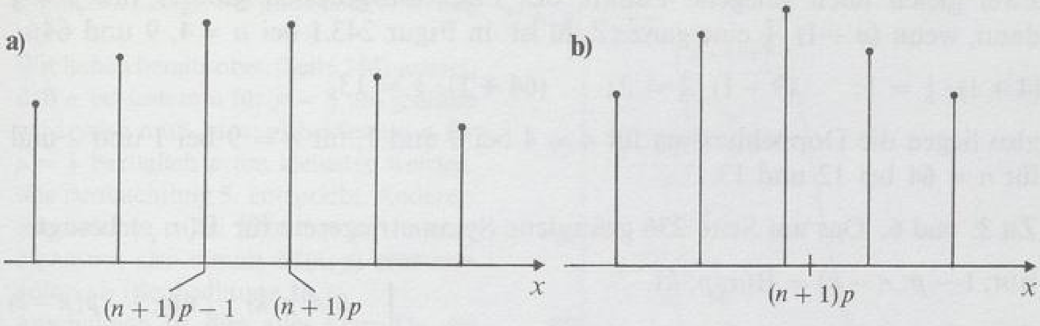



Fig. 245.1 Verhalten von $B(n; p)$ in der Umgebung des Maximums
**a)** $(n+1)p$ ganzzahlig, **b)** $(n+1)p$ nicht ganzzahlig

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

> **Satz 245.1:** Falls $(n+1)p$ ganzzahlig ist, nimmt $B(n; p)$ seinen maximalen Wert an den zwei benachbarten Stellen $k = (n+1)p - 1$ und $k = (n+1)p$ an.
> Falls $(n+1)p$ nicht ganzzahlig ist, liegt das einzige Maximum beim größten Wert von $k$ unterhalb von $(n+1)p$, also bei $[(n+1)p]$.
> Schränkt man die Definitionsmenge von $B(n; p)$ auf $\{0, 1, \ldots, n\}$ ein, so gilt dort: $B(n; p)$ wächst echt monoton bis zum Maximum und nimmt dann echt monoton ab.

**Bemerkungen:**

1. Die Maximumstelle ist der wahrscheinlichste Wert (= **Modalwert**) der Zufallsgröße $X$. Dabei ist jedoch zu bedenken, daß für großes $n$ auch der wahrscheinlichste Wert nur eine sehr kleine Wahrscheinlichkeit besitzt. So ist z.B. $\max B(4; \frac{1}{5}; k) \approx 41\%$; aber $\max B(100; \frac{1}{5}; k) \approx 10\%$. (Siehe auch Figur 243.1.)
2. Wegen $(n+1)p = np + p = \mu + p$ liegt das Maximum immer in der Nähe des Erwartungswertes $\mu$, also recht genau dort, wo wir es bei naiver Betrachtung vermuten würden: Wir rechnen ja damit, daß etwa der Bruchteil $p$ aller Versuche einen Treffer liefern wird, also: Anzahl der Treffer $\approx n \cdot p$. Die Maximumstelle der Verteilung unterscheidet sich von diesem Wert höchstens um Eins! Nur für ganzzahliges $\mu$ stimmen die dann einzige Maximumstelle und der Erwartungswert überein.
3. Erstaunlicherweise muß der wahrscheinlichste Wert nicht notwendig das dem Erwartungswert am nächsten liegende $k$ sein (vgl. Aufgabe 271/**67**). So ist z.B. bei $B(16; \frac{1}{10})$ der Erwartungswert $\mu = 1{,}6$; das Maximum liegt jedoch bei $k = [1{,}6 + 0{,}1] = 1$ und nicht bei dem näher gelegenen Wert $k = 2$.
4. Mit dem Aufsuchen der Maximumstelle $[(n+1)p]$ ist das Problem des Startwerts für die Berechnung der Binomialtabellen gelöst.

Wir verstehen nun, daß die Maximumstelle mit wachsendem $n$ und $p$ nach rechts rückt: $[(n+1)p]$ wächst sowohl mit $n$ als auch mit $p$.

Zwei gleich hoch gelegene Punkte des Funktionsgraphen gibt es für $p = \frac{1}{5}$ dann, wenn $(n+1) \cdot \frac{1}{5}$ eine ganze Zahl ist, in Figur 243.1 bei $n = 4$, 9 und 64:

$$(4+1) \cdot \tfrac{1}{5} = 1; \qquad (9+1) \cdot \tfrac{1}{5} = 2; \qquad (64+1) \cdot \tfrac{1}{5} = 13;$$

also liegen die Doppelmaxima für $n = 4$ bei 0 und 1, für $n = 9$ bei 1 und 2 und für $n = 64$ bei 12 und 13.

**Zu 3. und 6.** Das auf Seite 236 gefundene Symmetriegesetz für $\mathrm{B}(n; p)$ besagt

$\mathrm{B}(n; 1-p; n-k) = \mathrm{B}(n; p; k)$.

Wegen
$n - k = \frac{1}{2}n + (\frac{1}{2}n - k)$ und $k = \frac{1}{2}n - (\frac{1}{2}n - k)$
liegen die Argumente $n-k$ und $k$ symmetrisch zu $\frac{1}{2}n$, wie Figur 246.1 noch veranschaulicht. Damit erhält das Symmetriegesetz für Binomialverteilungen die Form von

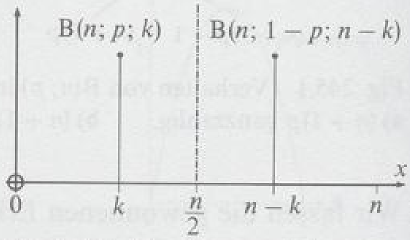



Fig. 246.1 Das Argument $k$ von $\mathrm{B}(n; p; k)$ und das Argument $n-k$ von $\mathrm{B}(n; 1-p; n-k)$ liegen symmetrisch zu $\frac{1}{2}n$.

**Satz 246.1:** Die Verteilungen $\mathrm{B}(n; p)$ und $\mathrm{B}(n; 1-p)$ liegen zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden $x = \frac{1}{2}n$. Insbesondere ist die Verteilung $\mathrm{B}(n; \frac{1}{2})$ in sich achsensymmetrisch bezüglich der Achse $x = \frac{1}{2}n$.

**Zu 6. und 11.** Um das »Symmetrischer-Werden« der Binomialverteilungen in Abhängigkeit von $n$ und $p$ zu zeigen, benötigt man ein Maß für die Abweichung von der Symmetrie. Man wählt hierfür für $\sigma \neq 0$ den Formparameter **Schiefe** (= *skewness*) einer Zufallsgröße, definiert durch

$$\boxed{\text{Schiefe} := \frac{\mathscr{E}[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}}$$

Eine sehr mühsame Rechnung liefert für die Schiefe von Zufallsgrößen, die nach $\mathrm{B}(n; p)$ verteilt sind, den Wert $\dfrac{1-2p}{\sigma}$. Man erkennt daraus, daß die Schiefe genau dann 0 ist, wenn $p = \frac{1}{2}$ ist, was unserer Beobachtung **6.** entspricht. Aus $\dfrac{1-2p}{\sigma} = \dfrac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$ erkennt man unmittelbar, daß die Schiefe für wachsendes $n$ bei festem $p$ monoton gegen 0 konvergiert, was unserer Beobachtung **11.** entspricht.

**Zu 5. und 10.** Wir besitzen keinen einfachen Rechenausdruck für den Maximalwert einer Binomialverteilung. Wie wir aber später in Aufgabe 313/**15** zeigen werden, gibt es für große $n$ eine Näherungsformel für den Maximalwert. Es gilt nämlich:

Es sei $M(n;p)$ der Maximalwert der Binomialverteilung $\mathrm{B}(n;p)$, also $M(n;p) = \max\{\mathrm{B}(n;p;x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt für $0 < p < 1$ und großes $n$:

$$M(n;p) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Figur 247.1 zeigt, wie gut diese Näherung ist.
Wir haben bereits oben (Seite 244) gezeigt, daß $\sigma$ bei festem $n$ für $p = \frac{1}{2}$ am größten wird. Also muß $\mathrm{M}(n; p)$ bei festem $n$ für $p = \frac{1}{2}$ bezüglich $p$ am kleinsten werden, was Beobachtung **5.** entspricht. Andererseits wächst $\sigma$ bei festem $p$ mit $n$ echt monoton; also nimmt $\mathrm{M}(n; p)$ echt monoton ab (Beobachtung **10.**).
Anschaulich ist dies alles klar: Da die Histogramme immer breiter werden, ihre Flächeninhalte aber konstant den Wert 1 haben, sollte das höchste Rechteck des Histogramms immer niedriger werden.

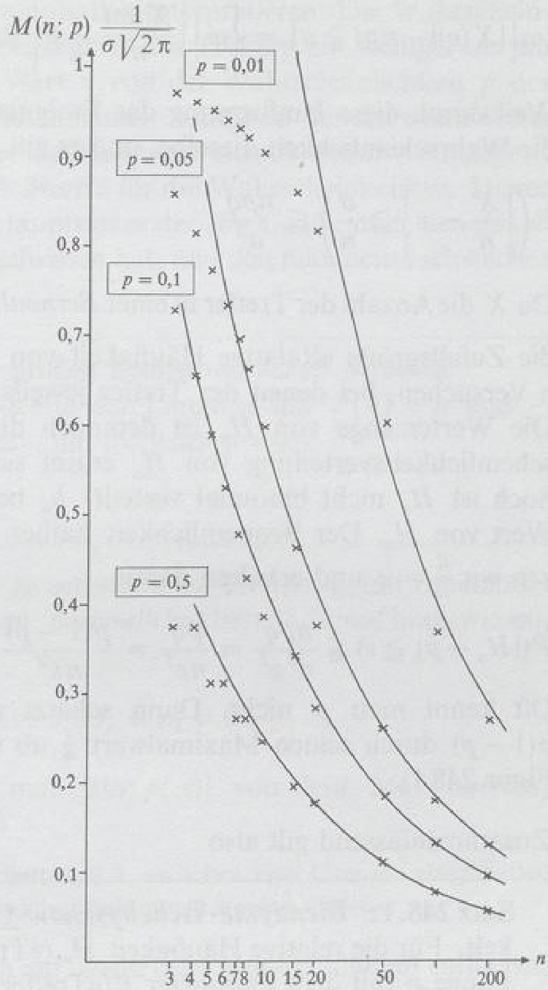



Fig. 247.1 Güte der Näherungsformel für die Maxima von Binomialverteilungen
Einzelpunkte: Maximalwerte $M(n; p)$ der Binomialverteilungen $\mathrm{B}(n; p)$.
Durchgezogene Kurven: zugehörige Näherungen $(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}$.
*Beachte:* Auf der $n$-Achse logarithmischer Maßstab!

## 14.7. Die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow* für binomial verteilte Zufallsgrößen und das Gesetz der großen Zahlen

Wenden wir die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*, nämlich

$$P(|X - \mu| \geqq a) \leqq \frac{\operatorname{Var} X}{a^2},$$

auf binomial nach $\mathrm{B}(n; p)$ verteilte Zufallsgrößen $X$ an, dann lassen sich $\mu$ und $\operatorname{Var} X$ durch $np$ bzw. $npq$ ersetzen, und wir erhalten

$$P(|X - np| \geqq a) \leqq \frac{npq}{a^2}.$$

Die Ungleichung $|X - np| \geqq a$ beschreibt kurz das Ereignis $\{\omega \mid |X(\omega) - np| \geqq a\}$. Dividiert man die in der Mengenklammer stehende Ungleichung durch $n$, so wird weiterhin dasselbe Ereignis beschrieben, also