



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

15. 2. Standardisierte Zufallsgrößen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83580](#)

bemerkt er, daß die Verallgemeinerung auf $p \neq \frac{1}{2}$ leicht sei. Die Richtigkeit seiner Behauptung ließ er – so 1755 sein Biograph *Matthew Maty* – durch Versuche überprüfen.

De Moivre gewann diese Erkenntnisse, indem er – in unserer Sprechweise – für die Anzahl X der Treffer in einer *Bernoulli*-Kette von erheblicher Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{n}$ die Wahrscheinlichkeit $P(|H_n - p| \leq \frac{\sigma}{n})$ abzuschätzen suchte. Sein wesentlich neuer Gedanke bestand darin, als Schranke ε die von ihm *modulus* genannte Standardabweichung $\frac{\sigma}{n}$ der Zufallsgröße H_n bzw. ein Vielfaches davon zu wählen.

$$\begin{aligned} \text{Nun gilt } P\left(|H_n - p| \leq \frac{\sigma}{n}\right) &= P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \frac{\sigma}{n}\right) = P(|X - np| \leq \sigma) = \\ &= P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \sum_{\mu - \sigma \leq k \leq \mu + \sigma} B(n; p; k). \end{aligned}$$

Es ging also darum, die in das Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ fallenden Werte $B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ für große n zu berechnen oder zumindest möglichst genau abzuschätzen. Dies machte und macht auch heute noch erhebliche numerische Schwierigkeiten, weil der erste Faktor $\binom{n}{k}$ sehr groß wird, während der zweite Faktor $p^k q^{n-k}$ fast den Wert null ergibt. Da zudem die Verteilungen $B(n; p)$ mit wachsendem n immer niedriger werden, sind die interessierenden Werte $B(n; p; k)$ also noch dazu sehr klein.

Zur Lösung dieses Problems verlassen wir den historischen Weg und machen einen kleinen Umweg.

15.2. Standardisierte Zufallsgrößen

Das einzige Hilfsmittel, das wir bisher zur Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(|X - \mu| < t\sigma)$, wie sie in 15.1. angesprochen wurden, zur Verfügung haben, ist die Ungleichung von *Bienaymé-Tschebyschow*. Diese wird besonders einfach für solche Zufallsgrößen X , deren Erwartungswert $\mathcal{E}X = 0$ und deren Standardabweichung $\sigma(X) = 1$ sind. Aus $P(|X - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$ wird dann nämlich $P(|X| \geq t) \leq \frac{1}{t^2}$, woraus man vermuten kann, daß die Verteilungen solcher Zufallsgrößen zueinander ähnlich sind. Man führt daher eine besondere Bezeichnung ein:

Definition 278.1: Eine Zufallsgröße heißt **standardisiert**, wenn ihr Erwartungswert den Wert 0 und ihre Standardabweichung den Wert 1 haben.

Durch eine einfache Transformation kann man jeder nicht konstanten Zufallsgröße X mit endlichem $\mathcal{E}X$ eine standardisierte Zufallsgröße U_X zuordnen*:

* Der Buchstabe U kommt vom englischen Wort *unit*. Man beachte: Die standardisierte Zufallsgröße ist immer dimensionslos, auch wenn man, abweichend von unserem Vorgehen, Zufallsgrößen als benannte Größen zuläßt.

Satz 279.1: X sei eine Zufallsgröße mit $\sigma(X) > 0$ und endlichem $\mathbb{E} X$. Dann ist $U_X := \frac{X - \mathbb{E} X}{\sigma(X)}$ standardisiert. U_X heißt die zu X gehörige standardisierte Zufallsgröße.

Beweis: Wir berechnen Erwartungswert und Standardabweichung von U_X .

$$\mathbb{E} U_X = \mathbb{E} \left(\frac{X - \mathbb{E} X}{\sigma(X)} \right) = \frac{1}{\sigma(X)} \mathbb{E}(X - \mathbb{E} X) = \frac{1}{\sigma(X)} (\mathbb{E} X - \mathbb{E} X) = 0.$$

$$\sigma(U_X) = \sigma \left(\frac{X - \mathbb{E} X}{\sigma(X)} \right) = \frac{1}{|\sigma(X)|} \cdot \sigma(X - \mathbb{E} X) = \frac{1}{\sigma(X)} \cdot \sigma(X) = 1.$$

Damit der Vorgang der Standardisierung möglichst anschaulich wird, wollen wir ihn für die Binomialverteilung $B(12; \frac{1}{4})$ ausführlich besprechen.

Eine nach $B(12; \frac{1}{4})$ verteilte Zufallsgröße hat den Erwartungswert $\mu = 3$, den Varianzwert 2,25 und daher die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{2,25} = 1,5$. Die Variable k des Terms $B(12; \frac{1}{4}; k)$ wird also transformiert auf die Variable

$$u_k := \frac{k - \mu}{\sigma} = \frac{k - 3}{1,5}.$$

Will man nun über der u -Achse ein Histogramm bzw. eine Dichtefunktion der zu geordneten standardisierten Zufallsgröße in der üblichen Form auftragen, nämlich so, daß die Rechtecke symmetrisch über den u_k -Werten liegen und dabei aneinanderstoßen, dann müssen die Höhen des Histogramms über der x -Achse, d. h. die Werte $B(12; \frac{1}{4}; k)$, mit σ multipliziert werden, da ja die Rechtecksbreiten durch σ dividiert wurden und die Rechtecke flächengleich bleiben müssen.

Für $B(12; \frac{1}{4})$ erhält man die in Tabelle 279.1 wiedergegebenen Werte.

| k | $B(12; \frac{1}{4}; k)$ | $u_k = \frac{k - \mu}{\sigma}$ | $\sigma \cdot B(12; \frac{1}{4}; k)$ |
|-----|-------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| 0 | 0,0317 | -2,000 | 0,0475 |
| 1 | 0,1267 | -1,333 | 0,1901 |
| 2 | 0,2323 | -0,667 | 0,3484 |
| 3 | 0,2581 | 0,000 | 0,3872 |
| 4 | 0,1936 | 0,667 | 0,2904 |
| 5 | 0,1032 | 1,333 | 0,1549 |
| 6 | 0,0401 | 2,000 | 0,0602 |
| 7 | 0,0115 | 2,667 | 0,0172 |
| 8 | 0,0024 | 3,333 | 0,0036 |
| 9 | 0,0004 | 4,000 | 0,0005 |
| 10 | 0,00004 | 4,667 | 0,00005 |
| 11 | 0,000002 | 5,333 | 0,000003 |
| 12 | 0,0000006 | 6,000 | 0,0000009 |

Tab. 279.1 $B(12; \frac{1}{4})$ und die zugeordnete standardisierte Verteilung

In Figur 281.1 wird der Standardisierungsprozeß veranschaulicht. Wir greifen das zu $x = 4$ gehörende Histogrammrechteck heraus. $x = 4$ wird auf $u_4 = \frac{4-3}{1,5} = \frac{2}{3}$ abgebildet. Dabei wird die Rechtecksbreite 1 auf die neue Rechtecksbreite $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ verkürzt. Daher muß die Höhe $B(12; \frac{1}{4}; 4) = 0,1936$ mit $\sigma = 1,5$ multipliziert werden; die neue Rechteckshöhe hat also den Wert $\sigma \cdot B(12; \frac{1}{4}; 4) = 0,2904$.

Im Gegensatz zum Histogramm, wo die Rechtecksfläche ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ist, verändert sich das Stabdiagramm bei der Standardisierung nicht in der Höhe, da hier ja die Stablänge ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ist. Es steht also der Stab, der vorher an der Stelle x stand, nach der Standardisierung in gleicher Höhe an der Stelle $u_x = \frac{x-\mu}{\sigma}$, wie Figur 281.2 zeigt.

Was bewirkt die Standardisierung bei der kumulativen Verteilungsfunktion?

Aus $F(x) = P(X \leq x)$ wird $F(u) = P(U_X \leq u) = P\left(U_X \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$.

Bei der kumulativen Verteilungsfunktion wird durch die Standardisierung also nur die Lage der Sprungstellen, nicht jedoch deren Höhe verändert.

So gilt z.B. in Figur 281.3: Der Sprung um $B(12; \frac{1}{4}; 4)$ an der Stelle $x = 4$ liegt nach der Standardisierung an der Stelle $u_4 = \frac{4 - \mu}{\sigma} = \frac{2}{3}$.

Einen Überblick über die Wirkung der Standardisierung bei Binomialverteilungen in Abhängigkeit von n und p geben die Figuren 282.1, 283.1 und 284.1. Würde man übrigens die gleichen Figuren für die Stabdiagramme erstellen, so würden die Stäbe zwar genauso zusammenrücken wie die Rechtecke, die Höhe der Stäbe aber für $n \rightarrow \infty$ nach null konvergieren. Aus diesem Grunde können wir im Folgenden nur mit Histogrammen arbeiten.

| x | $p = 0,1$ | | $p = 0,2$ | | $p = 0,3$ | | $p = 0,4$ | | $p = 0,5$ | | $p = 0,6$ | | x |
|-----|-----------|---------------|-----------|---------------|-----------|---------------|-----------|---------------|-----------|---------------|-----------|---------------|-----|
| | u | $\sigma B(x)$ | |
| 0 | -1,33 | .222 | -2,00 | .045 | -2,62 | .006 | -3,27 | .001 | | | | | 0 |
| 1 | -0,50 | .395 | -1,37 | .180 | -2,07 | .042 | -2,76 | .006 | | | | | 1 |
| 2 | 0,33 | .329 | -0,75 | .338 | -1,53 | .134 | -2,25 | .029 | -3,00 | .004 | | | 2 |
| 3 | 1,17 | .171 | -0,12 | .394 | -0,98 | .269 | -1,74 | .092 | -2,50 | .017 | -3,37 | .002 | 3 |
| 4 | 2,00 | .062 | 0,50 | .320 | -0,44 | .374 | -1,22 | .199 | -2,00 | .056 | -2,86 | .008 | 4 |
| 5 | 2,83 | .016 | 1,13 | .192 | 0,11 | .385 | -0,71 | .318 | -1,50 | .133 | -2,35 | .028 | 5 |
| 6 | 3,67 | .003 | 1,75 | .088 | 0,65 | .302 | -0,20 | .389 | -1,00 | .244 | -1,84 | .077 | 6 |
| 7 | 4,50 | .001 | 2,38 | .031 | 1,20 | .185 | 0,31 | .370 | -0,50 | .349 | -1,33 | .165 | 7 |
| 8 | | | 3,00 | .009 | 1,75 | .089 | 0,82 | .278 | 0,00 | .393 | -0,82 | .278 | 8 |
| 9 | | | 3,63 | .002 | 2,29 | .034 | 1,33 | .165 | 0,50 | .349 | -0,31 | .370 | 9 |
| 10 | | | | | 2,84 | .010 | 1,84 | .077 | 1,00 | .244 | 0,20 | .389 | 10 |
| | | | | | 3,38 | .002 | 2,35 | .028 | 1,50 | .133 | 0,71 | .318 | 11 |
| | | | | | | | 2,86 | .008 | 2,00 | .056 | 1,22 | .199 | 12 |
| | | | | | | | 3,37 | .002 | 2,50 | .017 | 1,74 | .092 | 13 |
| | | | | | | | | | 3,00 | .004 | 2,25 | .029 | 14 |
| | | | | | | | | | | | 2,76 | .006 | 15 |
| | | | | | | | | | | | 3,27 | .001 | 16 |

| x | $p = 0,7$ | | $p = 0,8$ | | $p = 0,9$ | | x |
|-----|-----------|---------------|-----------|---------------|-----------|---------------|-----|
| | u | $\sigma B(x)$ | u | $\sigma B(x)$ | u | $\sigma B(x)$ | |
| 5 | -3,38 | .002 | | | | | 5 |
| 6 | -2,84 | .010 | | | | | 6 |
| 7 | -2,29 | .034 | -3,62 | .002 | | | 7 |
| 8 | -1,75 | .089 | -3,00 | .009 | | | 8 |
| 9 | -1,20 | .185 | -2,37 | .031 | -4,50 | .001 | 9 |
| 10 | -0,65 | .302 | -1,75 | .088 | -3,67 | .003 | 10 |
| 11 | -0,11 | .385 | -1,12 | .192 | -2,83 | .016 | 11 |
| 12 | 0,44 | .374 | -0,50 | .320 | -2,00 | .062 | 12 |
| 13 | 0,98 | .269 | 0,13 | .394 | -1,17 | .171 | 13 |
| 14 | 1,53 | .134 | 0,75 | .338 | -0,33 | .329 | 14 |
| 15 | 2,07 | .042 | 1,38 | .180 | 0,50 | .395 | 15 |
| 16 | 2,62 | .006 | 2,00 | .045 | 1,33 | .222 | 16 |

Tab. 280.1 Bestimmung von Histogrammen der zugehörigen standardisierten Zufallsgröße U_X , wenn X nach $B(16; p)$ verteilt ist. Aus Figur 242.1 wird so Figur 282.1.

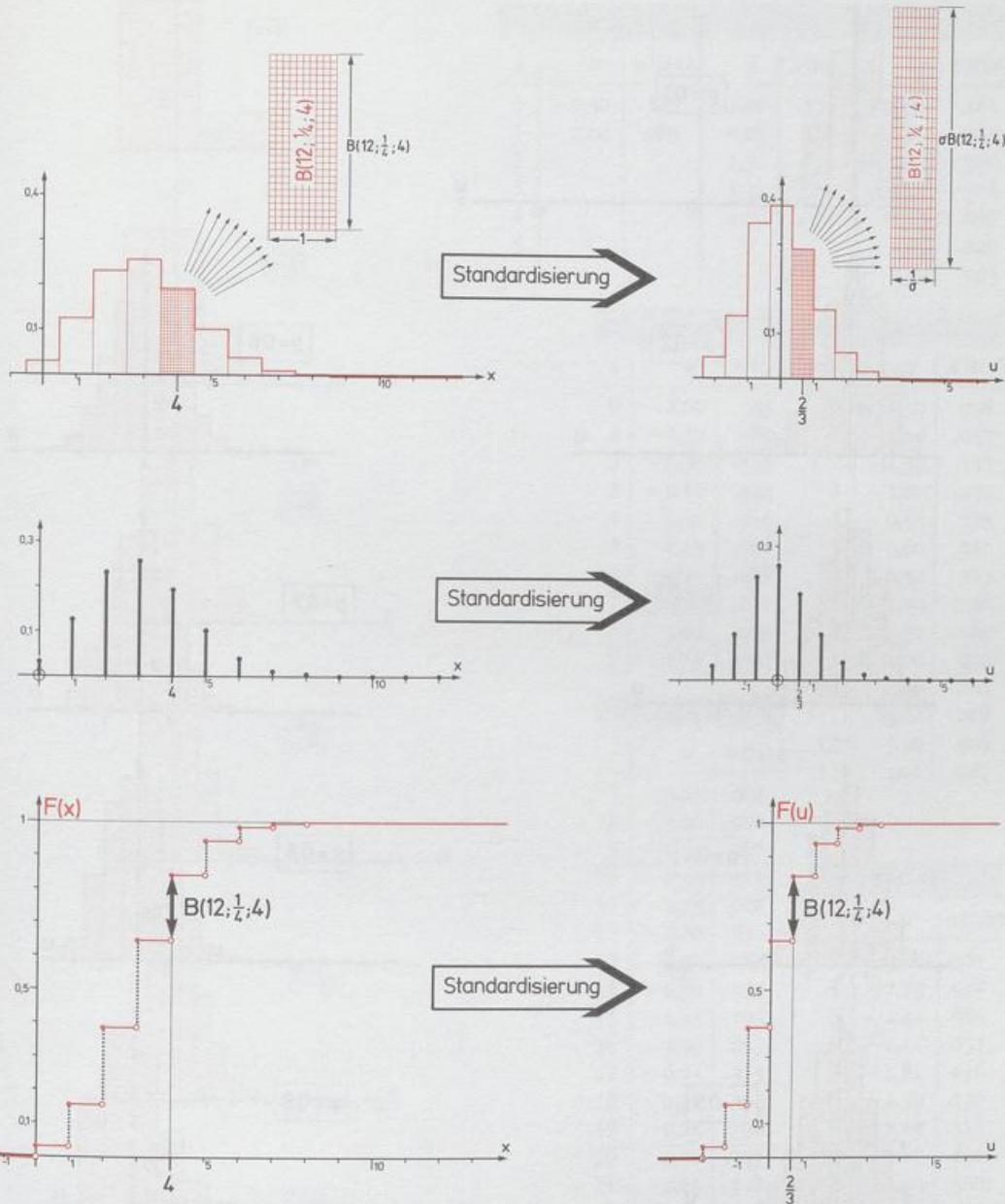


Fig. 281.1–3 Wirkungsweise der Standardisierung am Beispiel einer nach $B(12; \frac{1}{4})$ verteilten Zufallsgröße X und der zugehörigen standardisierten Zufallsgröße U_X .

Fig. 281.1 Histogramme der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und der von U_X .

Fig. 281.2 Stabdiagramme der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und der von U_X .

Fig. 281.3 Graphen der kumulativen Verteilungsfunktionen $x \mapsto F(x)$ und $u \mapsto F(u)$.

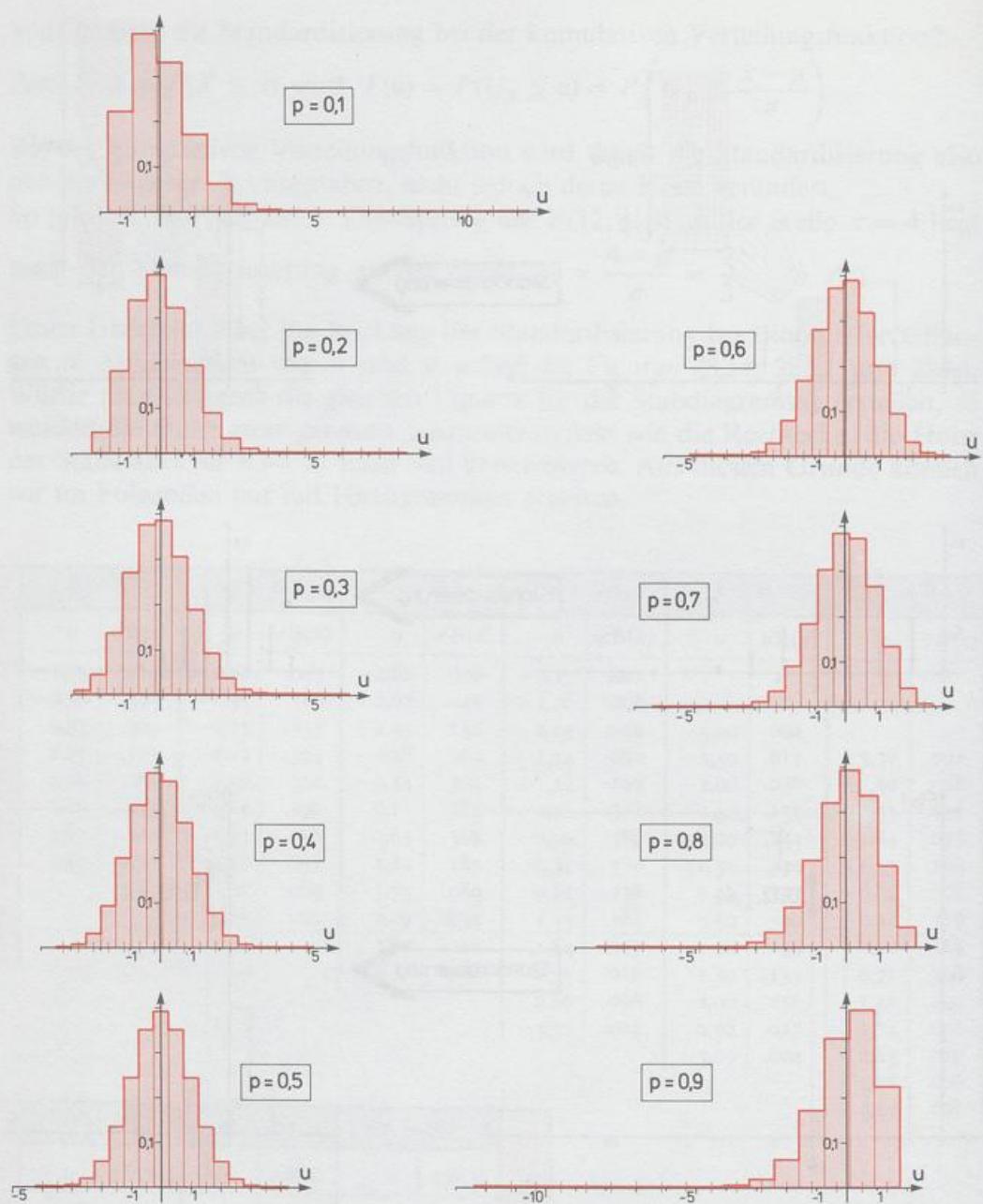
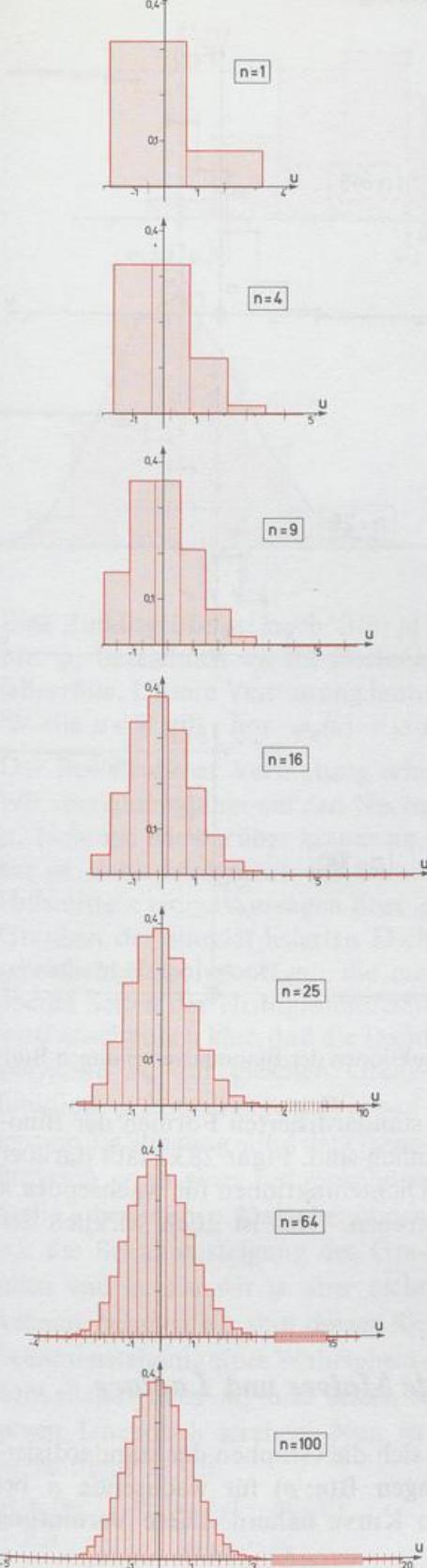


Fig. 282.1 Histogramme der zu $B(16; p)$ gehörenden standardisierten Verteilungen. Vergleiche mit Figur 242.1.



| $n = 1$ | | | $n = 4$ | | | $n = 9$ | | |
|-----------|-------|---------------|----------|---------------|---------------|---------|---------------|---------------|
| x | u | $\sigma B(x)$ | u | $\sigma B(x)$ | u | u | $\sigma B(x)$ | u |
| 0 | -0,50 | .320 | -1,00 | .328 | -1,50 | .161 | | |
| 1 | 2,00 | .080 | 0,25 | .328 | -0,67 | .362 | | |
| 2 | | | 1,50 | .123 | 0,17 | .362 | | |
| 3 | | | 2,75 | .020 | 1,00 | .211 | | |
| 4 | | | 4,00 | .001 | 1,83 | .079 | | |
| 5 | | | | | 2,67 | .020 | | |
| 6 | | | | | 3,50 | .003 | | |
| $n = 16$ | | | $n = 25$ | | | | | |
| x | u | $\sigma B(x)$ | x | u | $\sigma B(x)$ | x | u | $\sigma B(x)$ |
| 0 | -2,00 | .045 | 0 | -2,50 | .008 | | | |
| 1 | -1,37 | .180 | 1 | -2,00 | .047 | | | |
| 2 | -0,75 | .338 | 2 | -1,50 | .142 | | | |
| 3 | -0,12 | .394 | 3 | -1,00 | .272 | | | |
| 4 | 0,50 | .320 | 4 | -0,50 | .373 | | | |
| 5 | 1,13 | .192 | 5 | 0,00 | .392 | | | |
| 6 | 1,75 | .088 | 6 | 0,50 | .327 | | | |
| 7 | 2,38 | .031 | 7 | 1,00 | .222 | | | |
| 8 | 3,00 | .009 | 8 | 1,50 | .125 | | | |
| 9 | 3,63 | .002 | 9 | 2,00 | .059 | | | |
| 10 | | | 10 | 2,50 | .024 | | | |
| 11 | | | 11 | 3,00 | .008 | | | |
| 12 | | | 12 | 3,50 | .002 | | | |
| 13 | | | 13 | 4,00 | .001 | | | |
| $n = 100$ | | | $n = 64$ | | | | | |
| x | u | $\sigma B(x)$ | x | u | $\sigma B(x)$ | x | u | $\sigma B(x)$ |
| 7 | -3,25 | .001 | 3 | -3,06 | .001 | | | |
| 8 | -3,00 | .002 | 4 | -2,75 | .005 | | | |
| 9 | -2,75 | .006 | 5 | -2,44 | .015 | | | |
| 10 | -2,50 | .013 | 6 | -2,12 | .037 | | | |
| 11 | -2,25 | .028 | 7 | -1,81 | .076 | | | |
| 12 | -2,00 | .051 | 8 | -1,50 | .136 | | | |
| 13 | -1,75 | .086 | 9 | -1,19 | .211 | | | |
| 14 | -1,50 | .134 | 10 | -0,87 | .290 | | | |
| 15 | -1,25 | .192 | 11 | -0,56 | .356 | | | |
| 16 | -1,00 | .255 | 12 | -0,25 | .393 | | | |
| 17 | -0,75 | .315 | 13 | 0,06 | .393 | | | |
| 18 | -0,50 | .364 | 14 | 0,38 | .358 | | | |
| 19 | -0,25 | .392 | 15 | 0,69 | .298 | | | |
| 20 | 0,00 | .397 | 16 | 1,00 | .228 | | | |
| 21 | 0,25 | .378 | 17 | 1,31 | .161 | | | |
| 22 | 0,50 | .340 | 18 | 1,63 | .105 | | | |
| 23 | 0,75 | .288 | 19 | 1,94 | .064 | | | |
| 24 | 1,00 | .231 | 20 | 2,25 | .036 | | | |
| 25 | 1,25 | .176 | 21 | 2,56 | .019 | | | |
| 26 | 1,50 | .127 | 22 | 2,88 | .009 | | | |
| 27 | 1,75 | .087 | 23 | 3,19 | .004 | | | |
| 28 | 2,00 | .057 | 24 | 3,50 | .002 | | | |
| 29 | 2,25 | .035 | 25 | 3,81 | .001 | | | |

Fig. 283.1 Histogramme der zu $B(n; \frac{1}{5})$ gehörenden standardisierten Verteilungen. Vergleiche mit Figur 243.1.

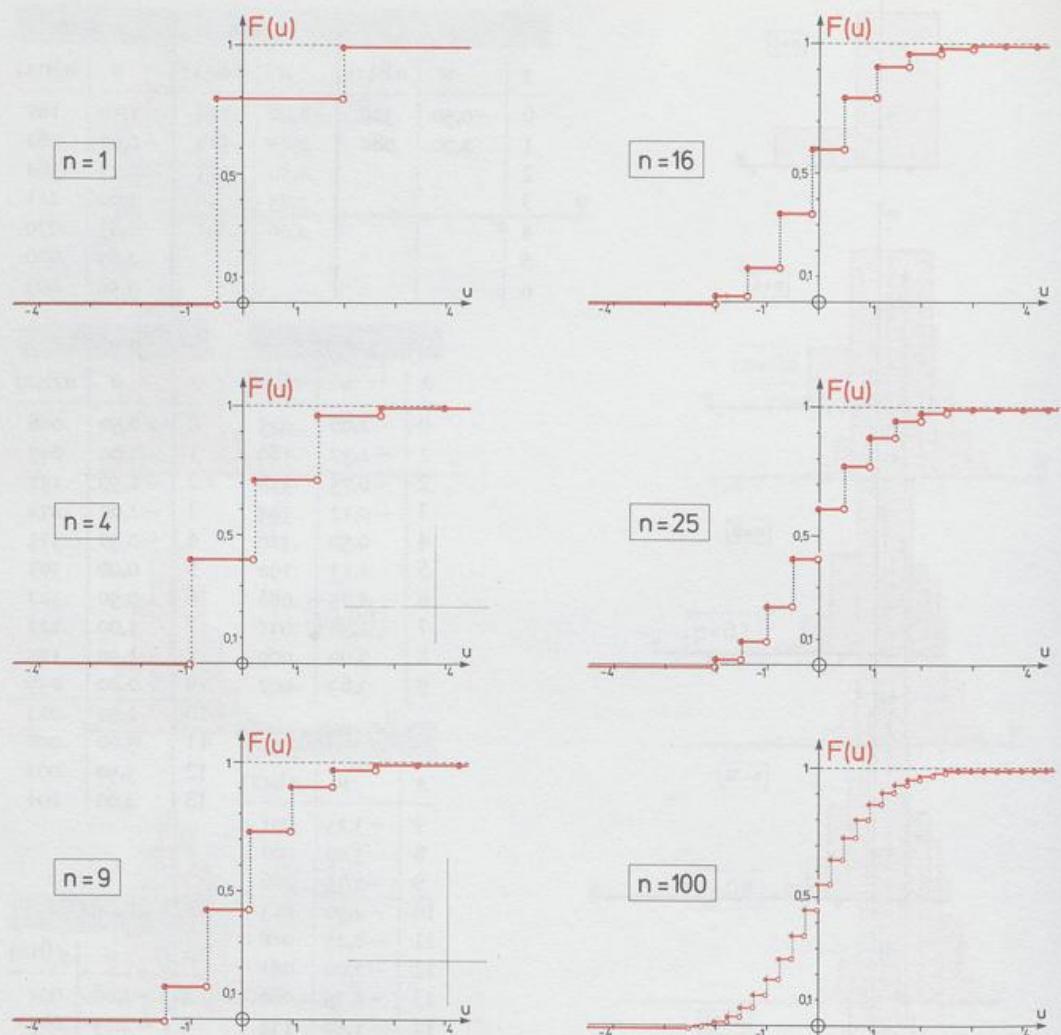


Fig. 284.1 Standardisierte kumulative Verteilungsfunktionen der Binomialverteilungen $B(n; \frac{1}{3})$.

Die Figuren 282.1 und 283.1 zeigen, daß die standardisierten Formen der Binomialverteilungen tatsächlich einander sehr ähnlich sind. Figur 283.1 läßt darüber hinaus die Vermutung aufkommen, daß die Dichtefunktionen für wachsendes n gegen eine glockenförmige Grenzfunktion streben. Dies ist auch wirklich der Fall, wie sich in 15.3. erweisen wird.

15.3. Der lokale Grenzwertsatz von *de Moivre* und *Laplace*

In 15.2. stellten wir die Vermutung auf, daß sich die Graphen der standardisierten Dichtefunktionen der Binomialverteilungen $B(n; p)$ für wachsende n bei festem p einer bestimmten glockenförmigen Kurve nähern. Diese Vermutung soll nun präzisiert werden.