



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Stochastik**

**Barth, Friedrich**

**München, [20]03**

15. 3. Der lokale Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83580](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83580)

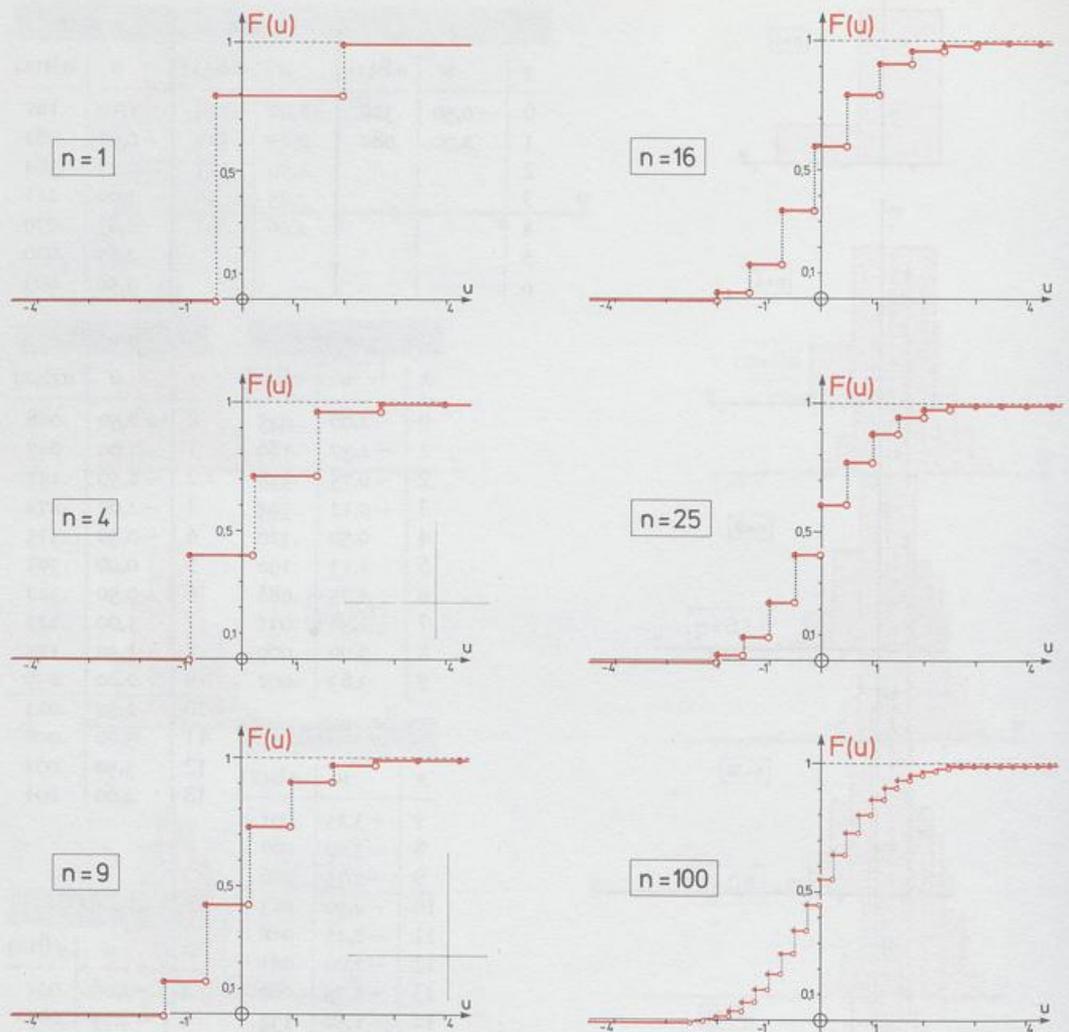


Fig. 284.1 Standardisierte kumulative Verteilungsfunktionen der Binomialverteilungen  $B(n; \frac{1}{2})$ .

Die Figuren 282.1 und 283.1 zeigen, daß die standardisierten Formen der Binomialverteilungen tatsächlich einander sehr ähnlich sind. Figur 283.1 läßt darüber hinaus die Vermutung aufkommen, daß die Dichtefunktionen für wachsendes  $n$  gegen eine glockenförmige Grenzfunktion streben. Dies ist auch wirklich der Fall, wie sich in 15.3. erweisen wird.

### 15.3. Der lokale Grenzwertsatz von *de Moivre* und *Laplace*

In 15.2. stellten wir die Vermutung auf, daß sich die Graphen der standardisierten Dichtefunktionen der Binomialverteilungen  $B(n; p)$  für wachsende  $n$  bei festem  $p$  einer bestimmten glockenförmigen Kurve nähern. Diese Vermutung soll nun präzisiert werden.

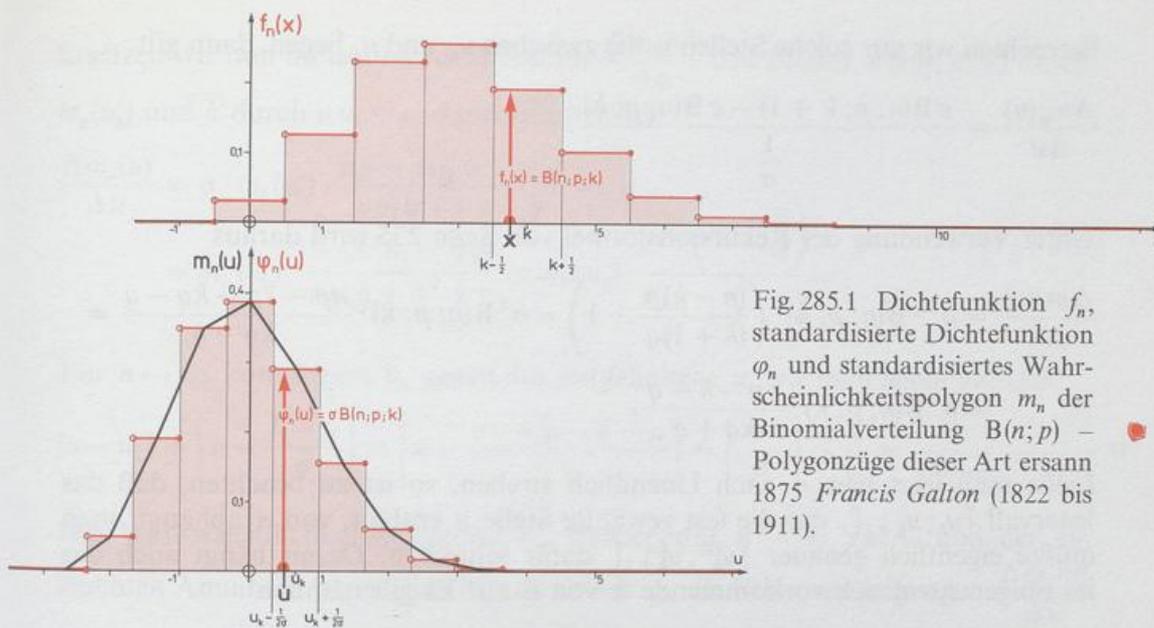


Fig. 285.1 Dichtefunktion  $f_n$ , standardisierte Dichtefunktion  $\varphi_n$  und standardisiertes Wahrscheinlichkeitspolygon  $m_n$  der Binomialverteilung  $B(n; p)$  – Polygonzüge dieser Art ersann 1875 Francis Galton (1822 bis 1911).

Eine Zufallsgröße sei nach  $B(n; p)$  binomial verteilt.  $f_n$  sei ihre Dichtefunktion. Mit  $\varphi_n$  bezeichnen wir die Dichtefunktion der zugehörigen standardisierten Zufallsgröße. Unsere Vermutung lautet dann: Es gibt eine Grenzfunktion  $\varphi$ , so daß für alle  $u \in \mathbb{R}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(u) = \varphi(u)$ .

Der Beweis dieser Vermutung erfordert erheblichen mathematischen Aufwand. Wir verzichten daher auf den Nachweis der Existenz einer solchen Grenzfunktion  $\varphi$ . Nehmen wir darüber hinaus an, daß die Grenzfunktion  $\varphi$  sogar differenzierbar ist, dann können wir mit den uns zur Verfügung stehenden mathematischen Hilfsmitteln einige Aussagen über  $\varphi$  machen. Dazu betrachten wir an Stelle der Graphen der standardisierten Dichtefunktionen  $\varphi_n$  die standardisierten **Wahrscheinlichkeitspolygone**  $m_n$ , die man dadurch erhält, daß man die Mitten der oberen Seiten der Histogrammrechtecke miteinander verbindet. Aus Figur 285.1 wird anschaulich klar, daß die Dichtefunktionen  $\varphi_n$  und die Wahrscheinlichkeitspolygone  $m_n$  zur gleichen Grenzfunktion  $\varphi$  konvergieren. Wir wollen nun die Steigung  $\varphi'(u)$  der Grenzfunktion  $\varphi$  an einer fest gewählten Stelle  $u$  bestimmen. Dazu benötigen wir die Sekantensteigung des Graphen von  $\varphi$ . Da wir  $\varphi$  aber nicht kennen, nehmen wir statt dessen die Sekantensteigung eines Wahrscheinlichkeitspolygons  $m_n$  und lassen  $n$  gegen Unendlich streben. Nun ist (siehe Figur 285.2)

$$\frac{\Delta m_n(u)}{\Delta u} = \frac{m_n(u_{k+1}) - m_n(u_k)}{u_{k+1} - u_k}$$

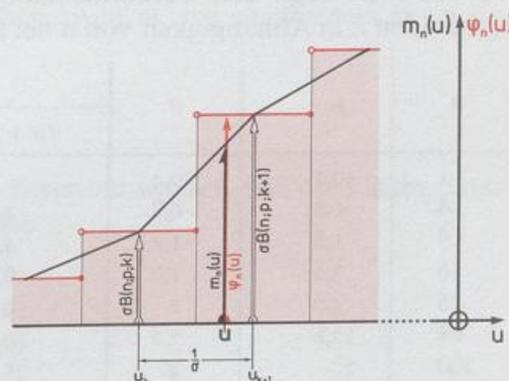


Fig. 285.2 Zur Steigung des Graphen des standardisierten Wahrscheinlichkeitspolygons  $m_n$  der standardisierten Dichtefunktion  $\varphi_n$

Betrachten wir nur solche Stellen  $u$ , die zwischen  $u_0$  und  $u_n$  liegen, dann gilt

$$\frac{\Delta m_n(u)}{\Delta u} = \frac{\sigma B(n; p; k+1) - \sigma B(n; p; k)}{\frac{1}{\sigma}}$$

Unter Verwendung der Rekursionsformel von Seite 235 wird daraus

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m_n(u)}{\Delta u} &= \sigma^2 \cdot B(n; p; k) \cdot \left( \frac{(n-k)p}{(k+1)q} - 1 \right) = \sigma^2 B(n; p; k) \cdot \frac{np - kp - kq - q}{kq + q} = \\ &= \sigma^2 B(n; p; k) \cdot \frac{np - k - q}{kq + q}. \end{aligned}$$

Ließe man jetzt hier  $n$  nach Unendlich streben, so ist zu beachten, daß das Intervall  $[u_k; u_{k+1}[$ , das die fest gewählte Stelle  $u$  enthält, von  $n$  abhängt; man müßte eigentlich genauer  $[u_k^{(n)}; u_{k+1}^{(n)}[$  dafür schreiben. Damit hängt auch das im obigen Ausdruck vorkommende  $k$  von  $n$  ab! Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} u_k \leq u < u_{k+1} &\Leftrightarrow \frac{k - \mu}{\sigma} \leq u < \frac{k + 1 - \mu}{\sigma} \\ &\Leftrightarrow k - \mu \leq \sigma u < k + 1 - \mu \\ &\Leftrightarrow -\mu - \sigma u \leq -k < 1 - \mu - \sigma u \\ &\Leftrightarrow \sigma u + \mu - 1 < k \leq \sigma u + \mu \\ &\Leftrightarrow u\sqrt{npq} + np - 1 < k \leq u\sqrt{npq} + np. \quad (*) \end{aligned}$$

$k$  muß also bei festem  $u$  in Abhängigkeit von  $n$  so gewählt werden, daß die letzte Doppelungleichung erfüllt ist. Durch sie ist ein halboffenes Intervall der Länge 1 bestimmt. Es gibt also genau ein  $k$ , das dieser Doppelungleichung genügt. Darüber hinaus ist noch zu beachten, daß  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $k \leq n$  sein muß. Damit gilt  $k = \sigma u + \mu - h$  mit  $0 \leq h < 1$ ,  $0 < k < n$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Tabelle 286.1 zeigt den Zusammenhang zwischen einem festen  $u$  und dem zu wählenden  $k$  in Abhängigkeit von  $n$  bei festem  $p$ .

$n$	$\mu$	$\sigma$	$u = 2$		$u = 100$	
			$\sigma u + \mu$	$k$	$\sigma u + \mu$	$k$
1	0,2	0,4	1	1	40,2	(40)
4	0,8	0,8	2,4	2	80,8	(80)
9	1,8	1,2	4,2	4	121,8	(121)
16	3,2	1,6	6,4	6	163,2	(163)
25	5,0	2	9	9	205	(205)
64	12,8	3,2	19,2	19	332,8	(332)
100	20	4	28	28	420	(420)
$10^4$	$2 \cdot 10^3$	40	2080	2080	6000	6000
$10^6$	$2 \cdot 10^5$	400	200800	200800	240000	240000

Tab. 286.1 Zusammenhang zwischen  $n$  und  $k$  bei festem  $u$  für Binomialverteilungen  $B(n; \frac{1}{5})$ . Eingeklammert sind diejenigen  $k$ -Werte, die größer als  $n$  sind.

Ersetzen wir nun im letzten Ausdruck für  $\frac{\Delta m_n(u)}{\Delta u}$  den Faktor  $\sigma B(n; p; k)$  durch  $m_n(u_k)$  und  $k$  durch  $\sigma u_k + \mu$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m_n(u)}{\Delta u} &= \sigma \cdot m_n(u_k) \cdot \frac{np - \sigma u_k - \mu - q}{\sigma u_k q + \mu q + q} = \\ &= m_n(u_k) \cdot \frac{-(\sigma^2 u_k + \sigma q)}{\sigma u_k q + \sigma^2 + q} = m_n(u_k) \cdot \frac{-\left(u_k + \frac{q}{\sigma}\right)}{\frac{u_k q}{\sigma} + 1 + \frac{q}{\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert  $u_k$  gegen das festgehaltene  $u$ , wie man leicht einsieht:

$$|u - u_k| = \left| u - \frac{k - \mu}{\sigma} \right| = \left| u - \frac{\sigma u + \mu - h - \mu}{\sigma} \right| = \left| \frac{-h}{\sigma} \right| \leq \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Die Wahrscheinlichkeitspolygone  $m_n$  streben mit  $n \rightarrow \infty$  auf Grund der gemachten Annahme gegen die Grenzfunktion  $\varphi$ , die Sekantensteigungen  $\frac{\Delta m_n(u)}{\Delta u}$  gegen die gesuchte Steigung  $\varphi'(u)$ . Somit gewinnen wir aus dem letzten Ausdruck für  $\frac{\Delta m_n(u)}{\Delta u}$  durch Grenzübergang die Beziehung

$$\varphi'(u) = -u \cdot \varphi(u).$$

Diese Differentialgleichung läßt sich für  $\varphi(u) \neq 0$  leicht lösen:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} &= -u \\ \Leftrightarrow \frac{d}{du} \ln|\varphi(u)| &= -u \\ \Leftrightarrow \ln|\varphi(u)| &= -\frac{1}{2}u^2 + c \end{aligned}$$

Da aber  $\varphi$  als Grenzfunktion der nicht-negativen  $m_n$  nie negativ sein kann, erhalten wir schließlich

$$\varphi(u) = C \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}.$$

Die Integrationskonstante  $C$  muß nun so bestimmt werden, daß die Fläche unter dem Graphen von  $\varphi$  den Wert 1 ergibt, also

$$C \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du}.$$

Die Auswertung dieses Integrals ist nicht einfach. Sie liefert den Wert

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ein möglicher Weg zur Berechnung dieses Integrals:

Man betrachtet zunächst das Integral  $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

Da der Wert eines Integrals nicht von der Wahl der Integrationsvariablen abhängt, kann man schreiben

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Das Doppelintegral kann gedeutet werden als Volumen eines hutförmigen Körpers über der  $x$ - $y$ -Ebene. In Figur 288.1 ist dieser »Hut« dargestellt, wobei zur Verdeutlichung statt des eigentlichen Hutes ein in  $z$ -Richtung auf das  $c$ -fache gestreckter Hut gewählt wurde.

Das Hutvolumen kann approximiert werden durch eine Summe von Quadervolumina  $e^{-(x^2+y^2)} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ , wobei das Rechteck mit den Seiten  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Quadergrundfläche bildet; die Quaderhöhe  $e^{-(x^2+y^2)}$  ist der Funktionswert des Integranden  $e^{-(x^2+y^2)}$  an einer beliebigen Stelle  $(x|y)$  aus dem Rechteck (Figur 289.1). Durch Summation und Grenzübergang entsteht dann das Integral  $I^2$ .

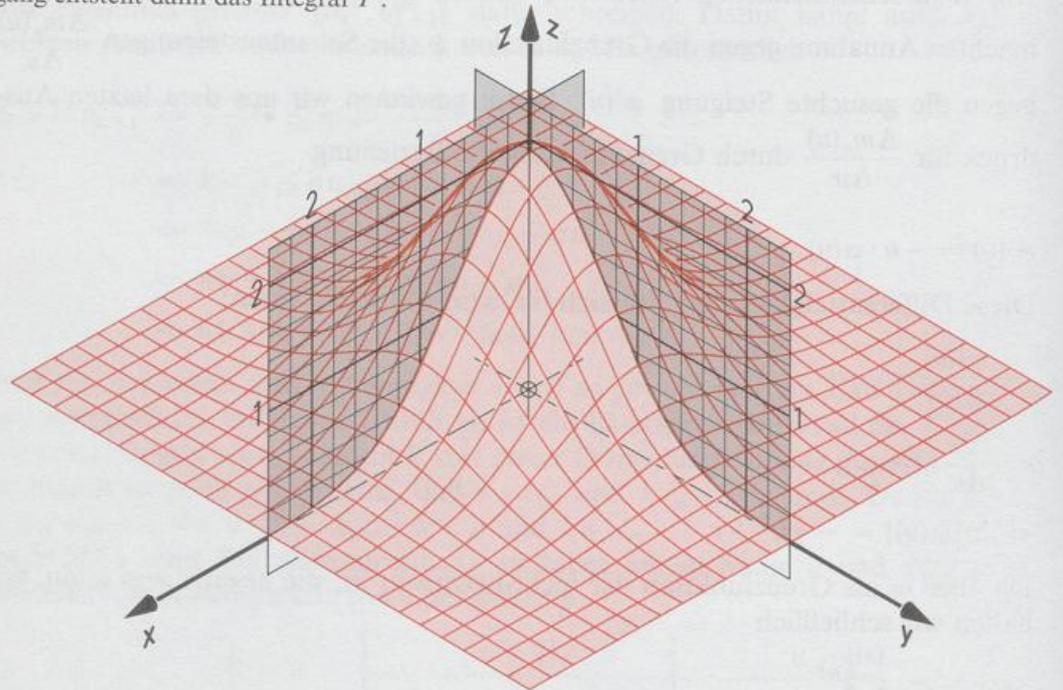


Fig. 288.1 Graph der Funktion  $(x|y) \mapsto c \cdot e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , als Fläche im  $x$ - $y$ - $z$ -System. Gezeichnet sind auf der Fläche die Kurvenscharen mit  $x = \text{const.}$  bzw.  $y = \text{const.}$

Da die Funktion  $(x|y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ ,  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , auf konzentrischen Kreisen um  $(0|0)$  konstant ist, liegt es nahe, in der  $x$ - $y$ -Ebene Polarkoordinaten  $(r|\psi)$  einzuführen (Figur 289.2). An Stelle der Rechtecke verwendet man dann besser Kreisringe der Dicke  $\Delta r$ , so daß an Stelle der Quader Kreiszylinderringe zur Approximation benützt werden (Figur 289.3). Durch Summation und Grenzübergang ergibt sich damit für das Hutvolumen nur mehr ein einfaches Integral, das ausgewertet werden kann:

$$I^2 = \int_0^{\infty} 2r\pi e^{-r^2} dr = \pi [-e^{-r^2}]_0^{\infty} = \pi(0+1) = \pi.$$

Daraus folgt

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Ersetzt man nun  $x$  durch  $\frac{1}{\sqrt{2}}u$  und damit  $dx$  durch  $\frac{1}{\sqrt{2}}du$ , dann ergibt sich

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} \frac{1}{\sqrt{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{\pi},$$

woraus man durch Multiplikation mit  $\sqrt{2}$  den gesuchten Wert erhält:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{2\pi}.$$

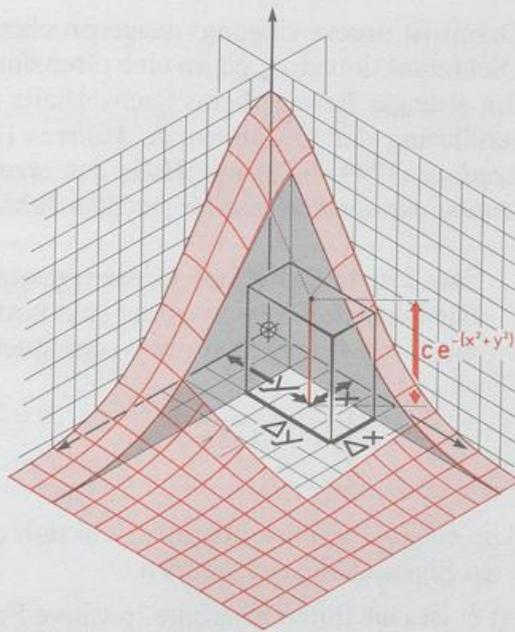


Fig. 289.1 Einer der Quader des Volumens  $c \cdot e^{-(x^2+y^2)} \Delta x \Delta y$ , deren Summe das Hutvolumen approximiert.

Fig. 289.2 Der Graph von Figur 288.1 als Graph der Funktion  $(r|\psi) \mapsto e^{-r^2}$ ,  $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Gezeichnet sind auf der Fläche die Kurvenscharen mit  $\psi = \text{const.}$  bzw.  $r = \text{const.}$ ; erstere sind Fall-, letztere sind Höhenlinien (= Isohypsen) der Fläche.

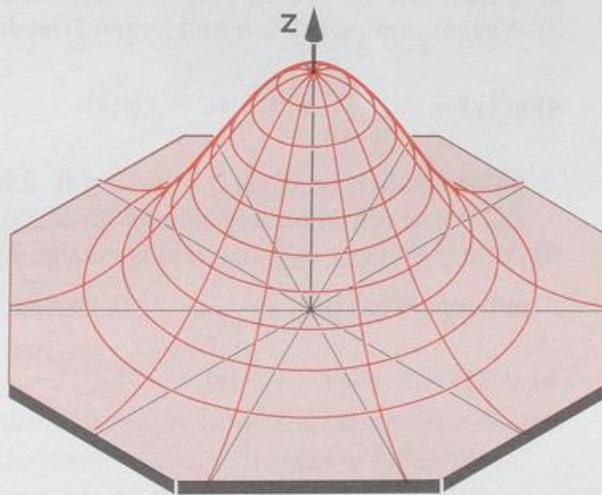
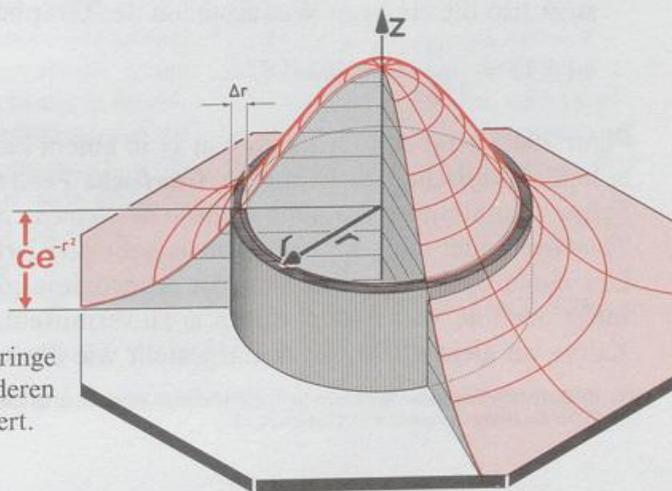


Fig. 289.3 Einer der Kreiszyklinderringe des Volumens  $c \cdot e^{-r^2} \cdot 2r\pi \cdot \Delta r$ , deren Summe das Hutvolumen approximiert.



Damit ist unsere eingangs ausgesprochene Vermutung, daß die standardisierten Dichtefunktionen  $\varphi_n$  gegen eine Grenzfunktion konvergieren, plausibel gemacht. Ein strenger Beweis dieses Sachverhalts für beliebiges  $p \in ]0; 1[$  gelang in Weiterführung der Gedanken *de Moivres* (1667–1754) als erstem *Pierre Simon de Laplace* (1749–1827) mit Hilfe der erzeugenden Funktionen in seiner *Théorie Analytique des Probabilités* aus dem Jahre 1812.\*

**Satz 290.1: Der lokale Grenzwertsatz von *de Moivre* und *Laplace*.**

Die Dichtefunktionen  $\varphi_n$  der standardisierten Binomialverteilungen  $B(n; p)$  mit  $0 < p < 1$  streben mit wachsendem  $n$  gegen die Grenzfunktion

$$\varphi: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Um einen Überblick über die Funktion  $\varphi$  zu bekommen, stellen wir ihre wichtigsten Eigenschaften zusammen.

- 1)  $\varphi$  ist eine differenzierbare, positive Funktion.
- 2) Wegen  $\varphi(-x) = \varphi(x)$  ist der Graph von  $\varphi$  symmetrisch zur Achse  $x = 0$ .
- 3) Wegen  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$  und wegen 2) ist die  $x$ -Achse Asymptote für  $|x| \rightarrow +\infty$ .
- 4)  $\varphi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = -x\varphi(x)$ .

Offensichtlich ist  $\varphi'(x) \geq 0$  für  $x \leq 0$ , d. h.,  $\varphi$  ist echt monoton wachsend für  $x \leq 0$  und echt monoton fallend für  $x \geq 0$ .

- 5) An der Stelle  $x = 0$  hat  $\varphi$  das einzige Extremum; es ist absolutes Maximum mit dem Wert  $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,398942$ .

$$\begin{aligned} 6) \quad \varphi''(x) &= -\varphi(x) - x\varphi'(x) = \\ &= -\varphi(x) + x^2\varphi(x) = \\ &= (x^2 - 1)\varphi(x). \end{aligned}$$

An den Stellen  $x = \pm 1$  hat  $\varphi''$  jeweils einen Vorzeichenwechsel. Diese Stellen sind also die einzigen Wendestellen des Graphen von  $\varphi$ . Es ist

$$\varphi(\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0,241971.$$

Figur 291.1 zeigt den Graphen von  $\varphi$  in einem kartesischen Koordinatensystem; er heißt **Gaußsche Glockenkurve**, **Gaußsche Fehlerkurve**\*\* bzw. kurz **Gaußkurve**. Früher nannte man ihn auch *Courbe de chapeau de gendarme*. In den *Stochastik-Tabellen* findet man die Funktion  $\varphi$  tabellarisiert.

Um einen optischen Eindruck der Approximation der standardisierten Dichtefunktionen  $\varphi_n$  von  $B(n; p)$  durch  $\varphi$  zu vermitteln, ist in Figur 291.2 die *Gaußsche Kurve* im gleichen Maßstab dargestellt wie die standardisierten Binomialvertei-

\* Einen für die Schule aufbereiteten Beweis findet man als Anhang im Lösungsheft.

\*\* Siehe die Bemerkung unter Definition 295.1.

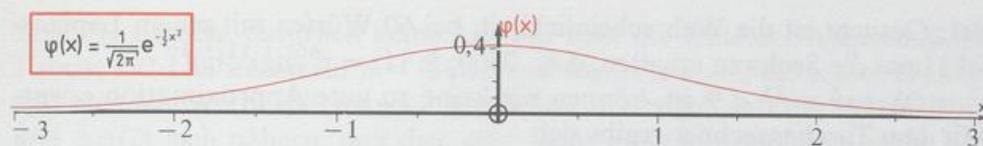


Fig. 291.1 Die Gaußsche Kurve im kartesischen Koordinatensystem. Wegen ihres flachen Verlaufs wird meist eine Darstellung mit gedehnter Ordinate wie in Fig. 291.2 bevorzugt.

lungen der Figuren 282.1 und 283.1. Man stelle sich auf durchsichtigem Papier eine Kopie von Fig. 291.2 her und lege sie über die Kurven dieser Figuren!

Der lokale Grenzwertsatz von *de Moivre* und *Laplace* löst nun das in 15.1. gestellte Problem,  $B(n; p; k)$  für große  $n$  näherungsweise ohne viel Aufwand zu berechnen. Es ist nämlich

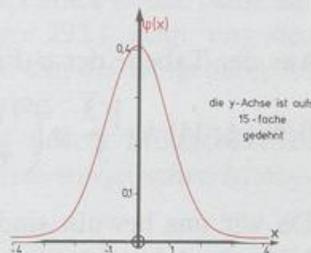


Fig. 291.2 Die Gaußsche Kurve im Maßstab der Figuren 282.1 und 283.1.

$$B(n; p; k) = \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma B(n; p; k) = \frac{1}{\sigma} \varphi_n\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right).$$

Wir halten dies fest in

**Satz 291.1:** Für große  $n$  und  $0 < p < 1$  gilt:

$$B(n; p; k) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k - np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

*Faustregel:* Für  $\sigma^2 = npq > 9$  erhält man brauchbare Werte.

Je nachdem, ob man eine Tabelle der  $\varphi$ -Funktion oder einen Taschenrechner zur Verfügung hat, benützt man die eine oder die andere angegebene Form.

Die erste Tabelle der  $\varphi$ -Funktion erstellte 1770 *Daniel Bernoulli* (1700–1782) in seiner Abhandlung *Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata*, in der er im wesentlichen den Grenzwertsatz herleitete, der zu Recht auch seinen Namen tragen könnte.

Ein Bild der Glockenkurve findet sich erstaunlicherweise weder bei *Laplace* noch bei *Gauß*.

Erst *Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen* (1797–1884) brachte es 1837 in seinem Werk *Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung*.

I.	II.	I.	II.
1. 0,9901 q'		10. 0,3679 q'	
2. 0,9608 q'		15. 0,1054 q'	
3. 0,9141 q'		20. 0,01832 q'	
4. 0,8522 q'		25. 0,001931 q'	
5. 0,7789 q'		30. 0,0001235 q'	

Tab. 291.1 *Daniel Bernoullis* Tabelle

$$k \mapsto q' \cdot e^{-\frac{1}{100}k^2}$$

– Man überprüfe ihre Genauigkeit.

Die Handhabung der Approximationsformel von Satz 291.1 illustrieren wir an einem

**Beispiel:** Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, bei 60 Würfeln mit einem Laplace-Würfel 11mal die Sechs zu erhalten, d. h.,  $B(60; \frac{1}{6}; 11) = \binom{60}{11} (\frac{1}{6})^{11} (\frac{5}{6})^{49}$ .

Da  $\sigma^2 = 60 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{3} < 9$  ist, können wir keine zu gute Approximation erwarten. Mit dem Taschenrechner ergibt sich

$$B(60; \frac{1}{6}; 11) \approx \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(11-10)\sqrt{3}}{5} \right)^2} \approx \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-0,06} \approx 0,1301496546 \approx 0,13015.$$

Aus der Tabelle der  $\varphi$ -Funktion berechnen wir

$$B(60; \frac{1}{6}; 11) \approx \frac{\sqrt{3}}{5} \varphi\left(\frac{11-10}{\frac{5}{3}\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{5} \varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{5} \varphi(0,346\dots).$$

Da wir uns bewußt sind, daß die Berechnung von  $B(60; \frac{1}{6}; 11)$  mittels  $\varphi$  nur Näherungscharakter hat, wählen wir den 0,346... nächstgelegenen Eingangswert 0,35 und erhalten damit

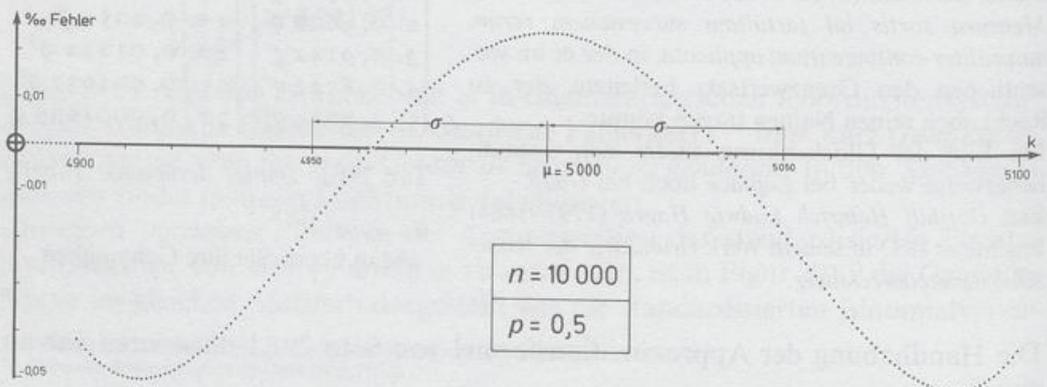
$$B(60; \frac{1}{6}; 11) \approx \frac{\sqrt{3}}{5} \varphi(0,35) = \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot 0,37524 = 0,12999.$$

Direkte Berechnung ergibt auf 5 Dezimalen gerundet  $B(60; \frac{1}{6}; 11) \approx 0,12456$ .  $B(60; \frac{1}{6}; 11)$  wurde also mit einem Fehler von etwa  $\frac{0,00543}{0,12456} \approx 4,4\%$  approximiert.

Tab. 292.1 Zur Illustration des lokalen Grenzwertsatzes für die Stelle  $u = 2$  mit  $p = \frac{1}{3}$  und  $\sigma = 0,4\sqrt{n}$ . Das zu  $u = 2$  und dem jeweiligen  $n$  gehörende  $k$  gemäß (\*) von Seite 286 findet man in Tabelle 286.1. – Man beachte, daß der zur Berechnung von  $B(10^6; \frac{1}{3}; 200800)$  benötigte Binomialkoeffizient bereits 217800 Stellen hat!

Fig. 292.1 Verlauf des prozentualen Fehlers bei der Approximation der Binomialverteilung  $B(10^4; 0,5)$  mittels des lokalen Grenzwertsatzes von *de Moivre* und *Laplace*

$n$	$B(n; \frac{1}{3}; k)$	$\frac{1}{\sigma} \varphi(2)$	$\frac{\frac{1}{\sigma} \varphi(2) - B(n; \frac{1}{3}; k)}{B(n; \frac{1}{3}; k)}$
1	0,2000	0,1350	-32,5%
4	0,1536	0,0675	-56,1%
9	0,06606	0,04499	-31,9%
16	0,05503	0,03374	-38,7%
25	0,02944	0,02700	-8,3%
64	0,01991	0,01687	-15,3%
100	0,01413	0,01350	-4,5%
$10^4$	0,001357	0,001350	-0,5%
$10^6$	0,0001353	0,0001350	-0,2%



Satz 291.1 macht natürlich keine Aussage über die Güte der Approximation. In Tabelle 292.1 haben wir für  $p = \frac{1}{5}$  und die feste Stelle  $u = 2$  die beiden in Satz 291.1 auftretenden Werte miteinander verglichen. Sie zeigt, daß die Werte  $B(n; \frac{1}{5}; k)$  und  $\frac{1}{\sigma} \varphi(2)$  sich nähern, daß dies aber nicht monoton und auch recht langsam geschieht. Die großen prozentualen Abweichungen wird man darauf zurückführen, daß die Stelle  $u = 2$  sich immerhin im Abstand  $2\sigma$  vom Erwartungswert befindet. Man könnte also die Hoffnung hegen, daß die Fehler in der Nähe des Erwartungswerts erheblich geringer sein werden. Figur 292.1 zeigt uns den Fehlerverlauf für  $n = 10^4$  und  $p = \frac{1}{2}$  in Abhängigkeit von  $k$  in der Umgebung des Erwartungswerts  $\mu = 5000$ . Sie bestätigt unsere Vermutung.

Eine theoretische Untersuchung des Fehlers übersteigt unsere Möglichkeiten. Eine sehr genaue Abschätzung des Fehlers gelang 1943 dem sowjetischen Mathematiker *Sergei Natanowitsch Bernshtein* (1880–1968).

#### 15.4. Der Integralgrenzwertsatz von *de Moivre* und *Laplace*

Im letzten Abschnitt haben wir eine Näherungsformel für die Werte  $B(n; p; k)$  bei großem  $n$  kennengelernt. Für viele Probleme der Praxis ist es jedoch weniger wichtig zu wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß eine Zufallsgröße  $X$  einen *bestimmten* Wert annimmt. Vielfach interessiert man sich dafür, daß die Zufallsgröße  $X$  Werte *zwischen* zwei vorgegebenen Grenzen  $a$  und  $b$  annimmt; dabei kann auch eine der beiden Grenzen  $-\infty$  bzw.  $+\infty$  sein. Ein Beispiel dafür ist das Problem von Seite 277, wo wir die Wahrscheinlichkeit  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$  abschätzen wollten. Wahrscheinlichkeiten dieser Art lassen sich am bequemsten berechnen, wenn man die kumulative Verteilungsfunktion zur Verfügung hat. Man hat dann an Stelle einer Summe mit vielen Summanden nur eine einzige Differenz zu bestimmen. Es gilt nämlich z. B.  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ . Die Berechnung von Funktionswerten der kumulativen Verteilungsfunktion  $F$  ist bei Binomialverteilungen mit großem  $n$  aber auch äußerst mühsam. Man müßte nämlich z. B. für  $F(b) = \sum_{k \leq b} B(n; p; k)$  sehr

viele Werte  $B(n; p; k)$  berechnen und addieren. Im Histogramm wird diese Summe dargestellt durch den Flächeninhalt der Rechtecke von links bis zum Rechteck über  $k_b := [b]$ . (Figur 294.1) Dieser Flächeninhalt läßt sich auch als Integral

der Dichtefunktion  $f_n$  schreiben: 
$$F(b) = \int_{-\infty}^{k_b + 0,5} f_n(x) dx.$$

In 15.3. konnten wir zeigen, daß die zu  $B(n; p)$  gehörige standardisierte Dichtefunktion  $\varphi_n$  durch eine Grenzfunktion  $\varphi$  approximiert werden kann. Wir wollen diese Approximation nun zur Berechnung unseres Flächeninhalts ausnützen.

Dazu gehen wir zur zugehörigen standardisierten Zufallsgröße  $U_X := \frac{X - \mu}{\sigma}$  über. Unsere Fläche der Größe  $P(X \leq b)$  geht durch die Standardisierung über in die gleich große Fläche der Rechtecke unter dem Graphen von  $\varphi_n$  einschließlich des

Rechtecks über  $u_{k_b} = \frac{k_b - \mu}{\sigma}$ . (Figur 294.2)