Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

17. 7. Signifikanztests bei normalverteilten Zufallsgrößen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83580

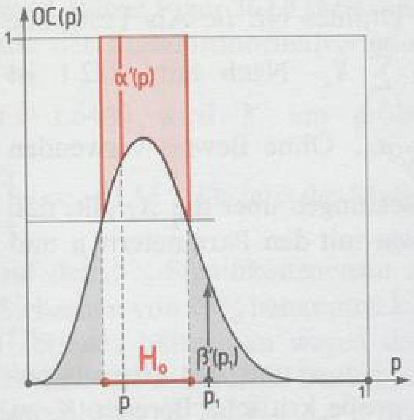

Fig. 361.1 OC-Kurve eines unverfälschten Tests. Nullhypothese und Gegenhypothese zusammengesetzt. Für alle $p \in H_0$ und alle $p_1 \in H \setminus H_0$ gilt: $\alpha'(p) + \beta'(p_1) \leqq 1$.

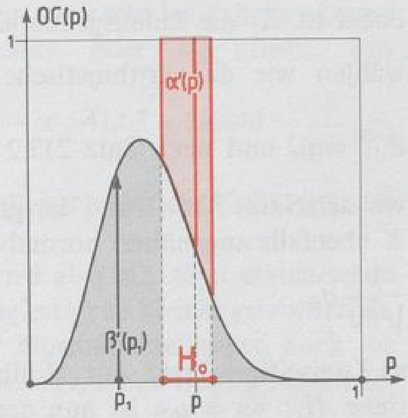

Fig. 361.2 OC-Kurve eines verfälschten Tests. Nullhypothese und Gegenhypothese zusammengesetzt. Es gibt $p \in H_0$ und $p_1 \in H \setminus H_0$, so daß $\alpha'(p) + \beta'(p_1) > 1$.

17.7. Signifikanztests bei normalverteilten Zufallsgrößen

In der Praxis hat man es oft mit Zufallsgrößen zu tun, von denen man auf Grund des zentralen Grenzwertsatzes mit gutem Grund annehmen kann, daß sie annähernd normalverteilt sind. Je nachdem, ob der Erwartungswert μ oder die Standardabweichung σ unbekannt sind, werden sich Hypothesen über diese Parameter ergeben.
Wir wollen nur den einfachen Fall besprechen, daß eine Hypothese über den unbekannten Erwartungswert μ einer angenähert normalverteilten Zufallsgröße zu testen ist, wobei die Standardabweichung σ bekannt ist. Ein solcher Test heißt ***Gaußtest***.

Beispiel: Die Untersuchung von Drähten einer bestimmten Legierung ergab für die Zugfestigkeit den Mittelwert $41{,}62\,\mathrm{N/mm^2}$ und die Standardabweichung $0{,}60\,\mathrm{N/mm^2}$. Wir dürfen annehmen, daß die Zufallsgröße »Zugfestigkeit eines Drahtes« angenähert normalverteilt ist mit $\mu_0 = 41{,}62\,\mathrm{N/mm^2}$ und $\sigma_0 = 0{,}60\,\mathrm{N/mm^2}$. Eine Versuchsserie an 80 Drähten mit einer etwas veränderten Legierung ergab eine mittlere Zugefstigkeit von $41{,}50\,\mathrm{N/mm^2}$ bei gleicher Standardabweichung. Kann man auf dem 5%-Niveau die Hypothese »Die mittlere Zugfestigkeit hat sich nicht verändert« ablehnen?
Ob man einseitig oder zweiseitig testen wird, hängt davon ab, welche Alternativen man in Betracht ziehen will. Man kann sich auf den Standpunkt stellen, daß die Zugfestigkeit sowohl größer als auch kleiner geworden ist, und dann zweiseitig testen, oder man nimmt auf Grund des Stichprobenergebnisses an, daß die Zugfestigkeit höchstens kleiner geworden sein kann, und dann einseitig testen.

Lösung: Die neue Legierung besitze die mittlere Zugfestigkeit μ, die unbekannt ist. Die Zugfestigkeit eines Drahtes ist dann angenähert normalverteilt mit μ und σ_0^2. Im Zufallsexperiment wurde die Stichprobe $(X_1 | X_2 | \ldots | X_{80})$ bestimmt;

dabei ist X_i die Zufallsgröße »Zugfestigkeit des Drahtes Nr. i«. Als Testgröße wählen wir das arithmetische Mittel $\bar{X} = \frac{1}{80} \sum_{i=1}^{80} X_i$. Nach Satz 212.1 ist $\mathscr{E}\bar{X} = \mu$, und nach Satz 212.2 ist $\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{80}}\sigma_0$. Ohne Beweis verwenden wir den **Satz:** Auf Grund der gemachten Voraussetzungen über die X_i gilt, daß $\bar{X}$ ebenfalls angenähert normalverteilt ist, und zwar mit den Parametern μ und $\frac{1}{\sqrt{80}}\sigma_0$.

a) Zweiseitiger Test. Zur Nullhypothese H_0: »$\mu = \mu_0$« und der Gegenhypothese H_1: »$\mu \neq \mu_0$« ist nun derjenige möglichst große kritische Bereich K zu bestimmen, so daß $\alpha' = P_{\mu_0}(\bar{X} \in K) \leqq \alpha$ wird, wobei α das vorgegebene Signifikanzniveau ist. Dabei wählen wir auf Grund der Symmetrie der Normalverteilung K so, daß $\bar{K} =]\mu_0 - t\sigma; \mu_0 + t\sigma[$ ist. Somit erhalten wir mit den vorgegebenen Werten die Bedingung $P\left(|\bar{X} - \mu_0| < t\frac{0{,}60}{\sqrt{80}}\right) \geqq 95\%$. (Siehe Figur 362.1.)

Wir entnehmen der Tabelle »σ-Bereiche bei normalverteilten Zufallsgrößen«, daß $t \geqq 1{,}96$ sein muß. Für $t = 1{,}96$ wird K am größten und $\bar{K}$ am kleinsten. Wir erhalten

$$\bar{K} = \left]41{,}62 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}60}{\sqrt{80}};\ 41{,}62 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}60}{\sqrt{80}}\right[=]41{,}49; 41{,}75[$$

Da der Meßwert 41,50 nicht in den kritischen Bereich K fällt, kann man die Nullhypothese H_0 auf dem 5%-Niveau nicht ablehnen. Man wird also bei weiteren Überlegungen mit einer Sicherheit von 95% davon ausgehen, daß sich die Zugfestigkeit nicht verändert hat.

b) Einseitiger Test. Zur Nullhypothese H_0: »$\mu = \mu_0$« gehört nun die Gegenhypothese H_2: »$\mu < \mu_0$«. Der kritische Bereich K ist nun möglichst groß so zu bestimmen, daß $P_{\mu_0}(\bar{X} \in K) = P(\bar{X} \leqq \mu_0 - t\sigma) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \leqq -t\right) = \Phi(-t) \leqq \alpha$

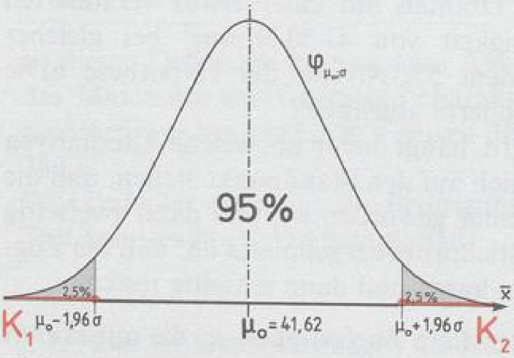

Fig. 362.1 Kritischer Bereich $K = K_1 \cup K_2$ des zweiseitigen Tests

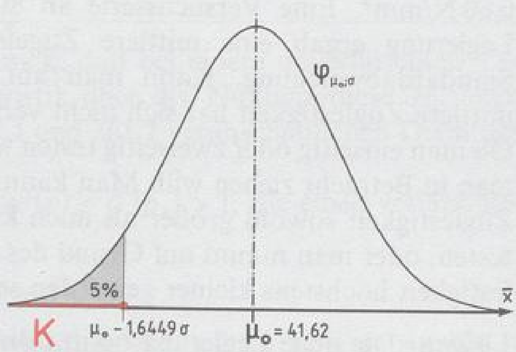

Fig. 362.2 Kritischer Bereich K des einseitigen Tests

wird. (Siehe Figur 362.2.) Mit unseren Werten erhalten wir aus der Tabelle »Quantile der Standardnormalverteilung« $-t \leqq -1{,}6449$ oder $t \geqq 1{,}6449$. Für $t = 1{,}6449$ wird K am größten, nämlich $\left]-\infty; 41{,}62 - 1{,}6449 \cdot \frac{0{,}60}{\sqrt{80}}\right] = \left]-\infty; 41{,}51\right]$. Da jetzt der Meßwert 41,50 in K liegt, kann man die Nullhypothese auf dem 5%-Signifikanzniveau ablehnen. Man wird also mit einer statistischen Sicherheit von 95% behaupten können, daß die Zugfestigkeit kleiner geworden ist. (Übrigens hätte man wegen der Symmetrie der Normalverteilungen auch die Tabelle der σ-Bereiche benützen können, wenn man die obige Bedingung umgeformt hätte zu $P(|\bar{X} - \mu_0| < t\sigma) \leqq 2\alpha = 10\%$.)

Die Ergebnisse von **a)** und **b)** scheinen sich zu widersprechen! Dem ist jedoch nicht so. Es handelt sich nämlich um Antworten auf verschiedene Fragestellungen. Bei der Hypothese H_2 wird nämlich schon berücksichtigt, daß auf Grund der physikalischen Versuchsergebnisse nur mit einer Verkleinerung der Zugfestigkeit gerechnet werden kann, während bei H_1 das physikalische Ergebnis nicht berücksichtigt wird, weil der Experimentator trotz der Verkleinerung des Mittelwerts eine Vergrößerung der Zugfestigkeit für möglich hält.

Wir merken uns: Man kann bei einem *Gaußtest* bei angenähert normalverteilten Zufallsgrößen kritische Bereiche K zu vorgegebenem Signifikanzniveau α bei zweiseitigem Test der Tabelle »σ-Bereiche bei normalverteilten Zufallsgrößen«, bei einseitigem Test der Tabelle »Quantile der Standardnormalverteilung« leicht entnehmen. (Siehe *Stochastik-Tabellen*, Seite 44 und 45.)

Natürlich kann man auch zu einem *Gaußtest* über den Erwartungswert μ einer Verteilung die Operationscharakteristik bestimmen. Wir erhalten für unser

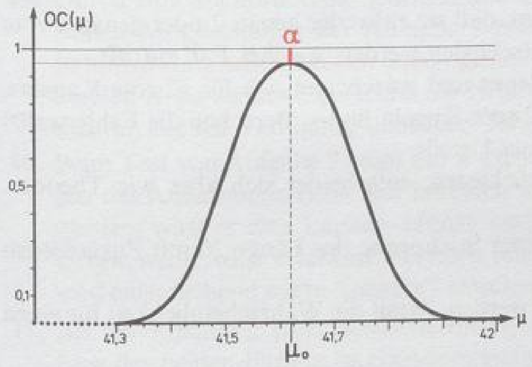

Fig. 363.1 Operationscharakteristik des Ereignisses $\bar{X} \in]41{,}49;\ 41{,}75[$ bezüglich $H = \mathbb{R}$

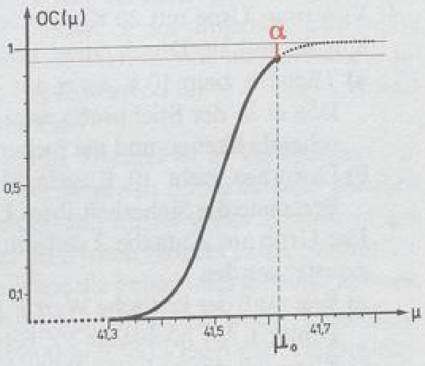

Fig. 363.2 Operationscharakteristik des Ereignisses $\bar{X} \in]41{,}51;\ \mu_0]$ bezüglich $H =]-\infty; \mu_0]$. Die Fortsetzung auf $H = \mathbb{R}$ ist punktiert gezeichnet.

Beispiel im

Fall a): OC: $\mu \mapsto P_\mu(\bar{X} \in K) = \Phi\left(\dfrac{41{,}75 - \mu}{\dfrac{0{,}60}{\sqrt{80}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{41{,}49 - \mu}{\dfrac{0{,}60}{\sqrt{80}}}\right), \quad \mu \in \mathbb{R}$

Fall b): OC: $\mu \mapsto P_\mu(\bar{X} \in \bar{K}) = 1 - \Phi\left(\dfrac{41{,}51 - \mu}{\dfrac{0{,}60}{\sqrt{80}}}\right), \quad \mu \leqq \mu_0\,.$

Die Figuren 363.1 und 363.2 zeigen die zugehörigen OC-Kurven.

Aufgaben

Zu 17.1.

Joseph Bertrand (1822–1900) wendet sich in seinem *Calcul des Probabilités* (1889) gegen den Begriff des *homme moyen* von *Quetelet*. Um zu zeigen, daß es keinen Menschen mit gleichzeitig durchschnittlicher Höhe, durchschnittlichem Gewicht usw. geben kann, betrachtet er 2 Kugeln aus gleichem Material vom Radius 1 bzw. Radius 3. Die Durchschnittskugel hat dann den Radius 2. Welche durchschnittliche Oberfläche, welches durchschnittliche Gewicht würde sie besitzen? Sind das ihre wirklichen Größen?

Zu 17.2.

In Bild 335.1 ist von einer Stichprobe die Rede. Das Titelbild zu Kapitel 18 (Seite 375) zeigt das Ergebnis einer Stichprobe aus dieser Stichprobe. Aus welcher Zufallsgröße X wurde die Stichprobe gezogen? Welche Länge hat sie? Was bedeuten die X_i? Sind sie unabhängig?

Zu 17.3.

1. Erläutere die Begriffe »Fehler 1. Art« und »Fehler 2. Art« an folgender Zeitungsüberschrift: »Sheriff hält Schnupftabak für Rauschgift«.
2. Von einer Urne mit 20 Kugeln ist bekannt, daß sie entweder genau 2 oder genau 6 rote Kugeln enthält. Durch einen Test soll entschieden werden, welcher Fall zutrifft.
   - **a)** Theodor zieht 10 Kugeln mit Zurücklegen und entscheidet sich für »2 rote Kugeln«, falls er in der Stichprobe weniger als 2 rote Kugeln findet. Berechne die Fehlerwahrscheinlichkeiten und die Sicherheit seines Urteils.
   - **b)** Dorothea zieht 10 Kugeln ohne Zurücklegen, entscheidet sich aber wie Theodor. Berechne die Sicherheit ihres Urteils.
3. Die Urne aus Aufgabe **2** soll mit Hilfe einer Stichprobe der Länge 20 mit Zurücklegen getestet werden.
   - **a)** Wie muß der kritische Wert k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens 5% beträgt?
   - **b)** Wie muß der kritische Wert gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art höchstens 1% beträgt?
   - **c)** Wie muß der kritische Wert gewählt werden, damit die Summe der beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten minimal wird?
   - **d)** Veranschauliche die Aufgaben in einem α'-β'-Diagramm ($1 \mathrel{\hat{=}} 10\,\text{cm}$).