Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

Beispiel im

Fall a): OC: $\mu \mapsto P_\mu(\bar{X} \in \bar{K}) = \Phi\left(\dfrac{41{,}75 - \mu}{\dfrac{0{,}60}{\sqrt{80}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{41{,}49 - \mu}{\dfrac{0{,}60}{\sqrt{80}}}\right), \quad \mu \in \mathbb{R}$

Fall b): OC: $\mu \mapsto P_\mu(\bar{X} \in \bar{K}) = 1 - \Phi\left(\dfrac{41{,}51 - \mu}{\dfrac{0{,}60}{\sqrt{80}}}\right), \quad \mu \leqq \mu_0\,.$

Die Figuren 363.1 und 363.2 zeigen die zugehörigen OC-Kurven.

Aufgaben

Zu 17.1.

Joseph Bertrand (1822–1900) wendet sich in seinem *Calcul des Probabilités* (1889) gegen den Begriff des *homme moyen* von *Quetelet*. Um zu zeigen, daß es keinen Menschen mit gleichzeitig durchschnittlicher Höhe, durchschnittlichem Gewicht usw. geben kann, betrachtet er 2 Kugeln aus gleichem Material vom Radius 1 bzw. Radius 3. Die Durchschnittskugel hat dann den Radius 2. Welche durchschnittliche Oberfläche, welches durchschnittliche Gewicht würde sie besitzen? Sind das ihre wirklichen Größen?

Zu 17.2.

In Bild 335.1 ist von einer Stichprobe die Rede. Das Titelbild zu Kapitel 18 (Seite 375) zeigt das Ergebnis einer Stichprobe aus dieser Stichprobe. Aus welcher Zufallsgröße X wurde die Stichprobe gezogen? Welche Länge hat sie? Was bedeuten die X_i? Sind sie unabhängig?

Zu 17.3.

1. Erläutere die Begriffe »Fehler 1. Art« und »Fehler 2. Art« an folgender Zeitungsüberschrift: »Sheriff hält Schnupftabak für Rauschgift«.
2. Von einer Urne mit 20 Kugeln ist bekannt, daß sie entweder genau 2 oder genau 6 rote Kugeln enthält. Durch einen Test soll entschieden werden, welcher Fall zutrifft.
   a) Theodor zieht 10 Kugeln mit Zurücklegen und entscheidet sich für »2 rote Kugeln«, falls er in der Stichprobe weniger als 2 rote Kugeln findet. Berechne die Fehlerwahrscheinlichkeiten und die Sicherheit seines Urteils.
   b) Dorothea zieht 10 Kugeln ohne Zurücklegen, entscheidet sich aber wie Theodor. Berechne die Sicherheit ihres Urteils.
3. Die Urne aus Aufgabe **2** soll mit Hilfe einer Stichprobe der Länge 20 mit Zurücklegen getestet werden.
   a) Wie muß der kritische Wert k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens 5% beträgt?
   b) Wie muß der kritische Wert gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art höchstens 1% beträgt?
   c) Wie muß der kritische Wert gewählt werden, damit die Summe der beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten minimal wird?
   d) Veranschauliche die Aufgaben in einem α'-β'-Diagramm ($1 \mathrel{\hat=} 10\,\text{cm}$).

4. a) Bestimme mit Hilfe der *Stochastik-Tabellen* für die Urne aus Aufgabe **2** eine möglichst kleine Stichprobenlänge n und einen dazu passenden kritischen Wert k so, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens 5% und die für einen Fehler 2. Art höchstens 10% wird.

•b) Der in **a)** gefundene Wert für n ist vermutlich zu groß. Bestimme daher mit Hilfe der Normalverteilung ein besseres n und ein dazugehöriges k. Überprüfe, falls du Zugang zu einem programmierbaren Rechner besitzt, ob die so gefundenen Werte für n und k tatsächlich die gestellten Bedingungen erfüllen.

5. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Urne aus Aufgabe **2** tatsächlich genau 2 rote Kugeln enthält, sei 10%. Wer diese Urne richtig erkennt, erhält eine Belohnung von 100 DM. Liegt aber die andere Urne vor und erkennt man diese, so erhält man 10 DM. Bestimme für eine Stichprobe der Länge 25 mit Zurücklegen einen kritischen Wert, so daß der Erwartungswert der Belohnung maximal wird.

6. a) Der Urne der Aufgabe **2** werde eine Stichprobe der Länge 10 mit Zurücklegen entnommen. Zeichne ein α'-β'-Diagramm zu den Annahmebereichen

$A(k) := \text{»}Z \leqq k\text{«}$ für $k \in \{-1, 0, 1, \ldots, 10\}$; $1 \mathrel{\hat=} 10\,\text{cm}$.

b) Zeichne in das Diagramm von **a)** die Geraden $\alpha' = 10\%$ und $\beta' = 20\%$ ein und suche diejenigen Tests, für die

1) $\alpha' \leqq 10\%$, 2) $\beta' \leqq 20\%$, 3) $\alpha' \leqq 10\%$ und $\beta' \leqq 20\%$ gilt.

c) Bestimme aus dem Diagramm von **a)** denjenigen Test, für den die Summe der Fehlerwahrscheinlichkeiten minimal wird.

d) Bestimme aus dem Diagramm von **a)** denjenigen Test, für den $5\alpha' + 3\beta'$ minimal wird.

e) Zeichne in das α'-β'-Diagramm von **a)** denjenigen Punkt ein, der zum Annahmebereich $A := \{1, 2, 3\}$ gehört.

7. Bei einer Urne soll ermittelt werden, ob sie 6 rote und 4 grüne Kugeln oder umgekehrt 4 rote und 6 grüne Kugeln enthält. Es ist eine Stichprobe der Länge 5 mit Zurücklegen erlaubt.

a) Welches Entscheidungsverfahren erscheint als einziges vernünftig? Zu welchen Irrtumswahrscheinlichkeiten führt es?

b) 10 Personen haben den Test gemäß **a)** ausgeführt, und 6 haben falsch geurteilt. Kann man diese Abweichung vom »Ideal« noch als zufällig bezeichnen?

8. Jemand wählt beim Problem der vorigen Aufgabe das folgende Entscheidungsverfahren: Entscheidung für »6 rote Kugeln in der Urne« genau dann, wenn die ersten 3 gezogenen Kugeln rot sind. Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeiten.

•9. Durch eine Stichprobe mit Zurücklegen der Länge n soll bei einer Urne zwischen den beiden Möglichkeiten der Aufgabe **7** entschieden werden. n sei ungerade, und beide Irrtumswahrscheinlichkeiten sollen gleich groß gemacht werden. Wie ist der Annahmebereich A zu wählen? Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeiten für $n = 1, 3, \ldots$, soweit dies mit der zur Verfügung stehenden Tabelle möglich ist.

10. Beim Test von Aufgabe **7** seien nur 4 Ziehungen erlaubt. Jemand ist in Verlegenheit wegen des Annahmebereichs und hilft sich wie folgt: Wenn genau 2 rote Kugeln gezogen werden, wirft er eine Laplace-Münze und entscheidet sich für »4 grüne Kugeln in der Urne«, wenn Adler erscheint. Bei mehr oder weniger als 2 roten Kugeln in der Stichprobe wird entsprechend wie in Aufgabe **7** entschieden. Berechne die Fehlerwahrscheinlichkeiten.

11. Bei der Züchtung einer gewissen Blumensorte erhält man rote und weiße Exemplare. Eine der beiden Farben ist ein »dominantes« Merkmal und muß nach den Vererbungsgesetzen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ auftreten. In einem Kreuzungsversuch ergeben sich 15 Nachkommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man sich, wenn man die dabei häufiger auftretende Farbe für dominant hält?

12. Aus einer Urne mit 7 Kugeln werden 3 Stück *ohne* Zurücklegen entnommen. Nach der

Zahl Z schwarzer Kugeln in dieser Stichprobe wird entschieden, ob in der Urne 2 oder 4 schwarze Kugeln sind.

a) Ermittle die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen und stelle sie graphisch dar.

•b) Suche unter allen denkbaren Annahmebereichen für die Hypothese »2 schwarze Kugeln«, d. h. unter allen Teilmengen von $\{0, 1, 2, 3\}$, denjenigen aus, bei dem die Summe der Fehlerwahrscheinlichkeiten am kleinsten ist.

13. An eine Werkstatt werden Schachteln mit Schrauben geliefert. Ein Teil davon enthält Erste Qualität, das sind Schrauben, von denen nur 10% die vorgeschriebenen Maßtoleranzen nicht einhalten. Die restlichen Schachteln enthalten Zweite Qualität, mit einem Ausschußanteil von 40%. Die Lieferfirma hat vergessen, die Schachteln nach ihrem Inhalt zu kennzeichnen. Man entnimmt jeder Schachtel mit Zurücklegen 5 Schrauben. Sind alle Schrauben bis auf höchstens eine in Ordnung, so soll der Schachtelinhalt als Erste Qualität behandelt werden, andernfalls als Zweite Qualität. Bestimme die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten.

14. Für das Entscheidungsverfahren in Aufgabe **13** macht ein Mitarbeiter der Werkstatt folgenden Vorschlag: Es werden nacheinander Schrauben aus der gewählten Schachtel geprüft. Sind die ersten 3 Stück in Ordnung, so entscheidet man »$p = 0{,}1$«, andernfalls »$p = 0{,}4$«.

a) Wie groß sind die Fehlerwahrscheinlichkeiten α' und β' dieses Tests?

•b) Zeichne das α'-β'-Diagramm für die Regeln »Entscheidung für $p = 0{,}1$, wenn die ersten k Schrauben in Ordnung sind«, $k = 1, 2, \ldots, 5$.

•c) Trage in das Diagramm von **b)** auch die Regeln »Entscheidung für $p = 0{,}4$ genau dann, wenn die ersten k Schrauben Ausschuß sind« ein ($k = 1, 2, 3$).

15. In einer Schießbude gibt es sehr gute und mittelmäßige Gewehre (Treffwahrscheinlichkeiten 0,9 bzw. 0,7). Weil bei einem davon die geheime Kennzeichnung unleserlich geworden ist, macht der Besitzer mit ihm 20 Probeschüsse. Er weiß, daß ihm der Fehler, ein schlechtes Gewehr fälschlich für ein gutes zu halten, mehr Schaden bringt als der umgekehrte Irrtum (Verärgerung anspruchsvoller Kunden!). Er möchte daher die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler höchstens halb so groß machen wie die für den zweiten Fehler. Welche Entscheidungsregel muß er aufstellen?

16. Bei einer Prüfung werden n Fragen gestellt. Wir nehmen an, daß ein Prüfling alle Fragen unabhängig voneinander je mit der Wahrscheinlichkeit p richtig bearbeitet. Die geforderte Mindestzahl richtiger Antworten soll nun so gewählt werden, daß ein sehr gut vorbereiteter Prüfling ($p = 97\%$) mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97,5% die Prüfung besteht, ein schlecht vorbereiteter ($p = 75\%$) aber mit mindestens 90% Sicherheit durchfällt. Zeige, daß diese Bedingungen bei $n = 15$ nicht, bei $n = 20$ und $n = 50$ jedoch erfüllt werden können, und gib jeweils die möglichen Grenzen zwischen »bestanden« und »nicht bestanden« an.

17. Zu einem Ergebnisraum von 6 Elementen sind zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen gegeben:

ω	1	2	3	4	5	6
$P_1(\{\omega\})$	0,1	0,2	0	0,3	0,3	0,1
$P_2(\{\omega\})$	0,4	0,15	0,3	0,05	0,1	0

a) Stelle P_1 und P_2 analog zu Figur 342.1 graphisch dar. Jemand wählt als Annahmebereich für P_1 das Ereignis $\{4; 5\}$. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten sind seine Urteile richtig?

b) Wähle einen Annahmebereich A für die Hypothese »P_1 liegt vor« so, daß das Vorliegen von P_1 mit 80% Sicherheit und das Vorliegen von P_2 mit möglichst großer Sicherheit erkannt wird.

●c) Ein Statistiker konstruiert den Annahmebereich A für P_1 nach folgendem Prinzip: $\omega \in A \Leftrightarrow P_1(\{\omega\}) > P_2(\{\omega\})$.
Welches A und welche Irrtumswahrscheinlichkeiten erhält er?

●d) Begründe, daß man nach dem Prinzip der Aufgabe **c)** den Test mit der kleinstmöglichen Summe $\alpha' + \beta'$ der Irrtumswahrscheinlichkeiten erhält! Zeige, daß der in Figur 342.1 dargestellte Test nicht das Minimum von $\alpha' + \beta'$ erreicht.

18. Ein Glücksspieler besitzt einen Laplace-Würfel und einen Würfel, bei dem die Sechs mit der Wahrscheinlichkeit 20% erscheint. Bei einer Razzia testet die Polizei die äußerlich ununterscheidbaren Würfel. Sie entscheidet sich nach 600 Würfen für die Hypothese »Laplace-Würfel«, falls höchstens 110 Sechser fallen.

a) Berechne die Fehlerwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Normalverteilung.

b) Bestimme mit Hilfe der Normalverteilung einen möglichst kleinen kritischen Wert k so, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens 5% wird. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art?

●●c) Bestimme mit Hilfe der Normalverteilung eine möglichst kleine Wurfzahl n und einen dazu passenden möglichst kleinen kritischen Wert k, so daß die beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten jeweils unter 1% liegen.

19. Wie groß sind die Fehlerwahrscheinlichkeiten für einen Test zu Beispiel 1 (Seite 336) bei der Stichprobenlänge $n = 300$ und dem kritischen Wert $k = 82$

a) mit der *Tschebyschow*-Ungleichung abgeschätzt,

b) mit der Normalverteilung näherungsweise berechnet?

20. Bei dem einen von zwei Spielautomaten ist die Gewinnwahrscheinlichkeit auf 0,49 eingestellt, bei dem anderen versehentlich auf 0,51. Wie oft muß man spielen, bis man mit mindestens 90% Sicherheit den für den Spieler günstigeren Automaten benennen kann? Die Entscheidung wird danach getroffen, ob man mehr als die Hälfte der Spiele gewinnt oder nicht. Man verwende die Normalverteilung als Näherung für die Binomialverteilung.

21. Eine Lieferung besteht aus 70 Schachteln mit Schrauben Erster Qualität (10% Ausschuß) und 30 Schachteln mit Schrauben Zweiter Qualität (40% Ausschuß). Durch eine Stichprobe von 20 Stück soll bei einer beliebig ausgewählten Schachtel entschieden werden, zu welcher Sorte sie gehört. Urteilt man richtig, so entsteht kein Verlust. Werden die besseren Schrauben irrtümlich dort verwendet, wo es auch die schlechteren getan hätten, so verliert man pro Schachtel 10 DM wegen des höheren Preises der guten Ware. Werden umgekehrt schlechtere Schrauben dort verwendet, wo man gute braucht, so entstehen pro Schachtel 5 DM Kosten für die Nachbearbeitung von Werkstücken.
Wie muß der Annahmebereich für die Hypothese »Es liegt Erste Qualität vor« gewählt werden, um den mittleren Schaden pro Schachtel möglichst gering zu halten?

22. Berechne zu Aufgabe **21** die mittleren Kosten für die Stichprobenlängen 1 und 2 und alle jeweils möglichen Annahmegrenzen k.

23. Eine Lieferung enthält 70 Schachteln mit 10% Ausschuß und 30 Schachteln mit 40% Ausschuß. Eine gute Schachtel für schlecht zu halten kostet 10 DM, der entgegengesetzte Fehler kostet 5 DM.

a) Der Abnehmer verzichtet ganz auf den Test, weil die Prüfkosten zu hoch sind. Er wirft statt dessen vor der Verwendung einer Schachtel eine Münze und entscheidet für »schlechte Schachtel«, wenn der Adler oben liegt. Wie groß ist der mittlere Verlust pro Schachtel, wenn bei der Münze $P(»\text{Adler}«) = \gamma$ ist? Man optimiere dieses Entscheidungsverfahren durch geeignete Wahl von γ.

b) Von welchem Preis pro Prüfung an ist das Verfahren **a)** auf jeden Fall sparsamer als irgendein Prüfverfahren?

24. Eine Warenlieferung von 100 Stück enthält den Ausschußanteil p. Nimmt man die Lieferung an, so bringt jedes unbrauchbare Stück 0,5 DM Verlust. Lehnt man sie ab, so entstehen 20 DM Spesen für die Rücksendung und für jedes brauchbare Stück noch 0,3 DM weitere Kosten.

a) Es werden alle Stücke geprüft. p ist also bekannt. Für welche p-Werte wird man die Lieferung annehmen bzw. ablehnen? Man zeichne den Verlust als Funktion von p für Annahme bzw. Ablehnung (RW: $1 \mathrel{\hat{=}} 10\,\text{cm}$; HW: $5\,\text{DM} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}$).
Welcher p-Wert ist für den Abnehmer am ungünstigsten? Wie groß wäre in diesem Fall der Verlust?

b) Die Totalprüfung dauert zu lange. Daher werden nur 15 Stücke geprüft (Stichprobe mit Zurücklegen). Die Entscheidungsregel lautet: Annahme der Lieferung, wenn höchstens k Stücke schlecht sind, sonst Ablehnung. Berechne den Erwartungswert $\mathcal{E}V$ der Zufallsgröße Verlust V allgemein. Zeichne $\mathcal{E}V$ für $k = 5$ und $k = 11$ in Abhängigkeit von p in das Bild von **a)** ein. Bestimme graphisch das Maximum von $\mathcal{E}V$. (Durch geeignete Wahl von k kann man dieses Maximum möglichst klein machen – sog. **Minimax-Verfahren**.)

c) Begründe, warum die Kurve für $\mathcal{E}V$ stets zwischen den in **a)** gezeichneten Verlustkurven der unbedingten Annahme bzw. Ablehnung liegt.

25. Eine Lieferung von 100 Elektrogeräten enthalte d defekte Stücke. Über die Annahme entscheidet folgende Regel: Sobald im Laufe der Prüfung zwei gute Stücke aufgetreten sind – Annahme; sobald zwei schlechte Stücke aufgetreten sind – Ablehnung.
Ein Test dieser Art heißt **Sequentialtest** oder **Folgetest***.
Wie viele Stücke müssen höchstens geprüft werden? Berechne und zeichne die Ablehnungswahrscheinlichkeit und den Erwartungswert der Zufallsgröße Stichprobenlänge N in Abhängigkeit von d für eine Stichprobe mit Zurücklegen.

26. Löse die vorhergehende Aufgabe für Stichproben *ohne* Zurücklegen.

27. Ein Elektrohändler wendet bei allen Lieferungen, die er erhält, den Test von Aufgabe **25** an. Die Lieferungen enthalten 10% oder 30% Ausschuß, je mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Bei Ablehnung einer guten Lieferung entstehen 200 DM, bei Annahme einer schlechten Lieferung 100 DM Schaden.

a) Wie hoch ist der mittlere Schaden infolge von Irrtümern beim Testen?

b) Auch das Prüfen der Geräte kommt teuer. Wie hoch darf der Preis für die Prüfung eines Geräts höchstens sein, damit sich das Testen überhaupt lohnt und der Händler nicht besser daran ist, die Lieferungen ungeprüft anzunehmen?

Zu 17.4.

28. Ein Würfel soll getestet werden, ob er die Sechs mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ bringt. Dazu wird er 30mal geworfen und die Anzahl der Sechser als Testgröße gewählt. Kritischer Bereich sei die Menge $K := [0; 2] \cup [8; 30]$.

a) Formuliere die zulässige Hypothese, die Nullhypothese und die Entscheidungsregel.

b) Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art.

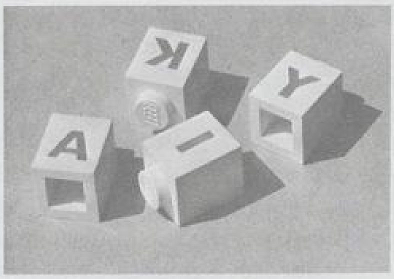
c) Berechne die Irrtumswahrscheinlichkeiten 2. Art, wenn der Würfel die Sechs tatsächlich mit 15% bzw. 20% Wahrscheinlichkeit bringt.

d) Fasse die 1200 Würfe von Tabelle 10.1 als 40 Tests auf und gib jedesmal das Urteil an. (Tabelle 32.1 erleichtert die Arbeit!)

e) Bestimme einen möglichst großen kritischen Bereich zum Signifikanzniveau 10%. Wie lauten nun die Urteile über den Würfel von Tabelle 10.1, wenn man wie in **d)** vorgeht?

29. a) Es gibt Lego-Steinchen, die auf einer von 4 gleichberechtigten Seitenflächen einen Buchstaben tragen. Sie bleiben immer auf einer dieser Seiten liegen. 50 Steinchen sind

* Sequentialtests gehören zu den modernsten statistischen Verfahren. Vor allem in der industriellen Qualitätskontrolle und in der Medizin haben sie große Bedeutung. Die USA hüteten sie während des 2. Weltkriegs, als *Abraham Wald* (1902–1950) sie entwickelt hatte, als wichtiges militärisches Geheimnis.



auf eine solche Fläche gefallen; 15 haben den Buchstaben oben liegen. Ist die Annahme der Symmetrie gerechtfertigt? Entscheide auf dem Signifikanzniveau 10%.

b) Was ergibt sich, wenn 500 Steinchen auf eine solche Fläche fallen und bei 150 der Buchstabe oben liegt? (Rechne mit Hilfe der Normalverteilung!)

30. a) Entwirf einen Test der Nullhypothese »Eine Münze ist symmetrisch«, der 50 (100, 200) Münzenwürfe benützt und ein Signifikanzniveau von 10% hat. Welche Wahrscheinlichkeit hat jeweils ein Fehler 2. Art bei einer Münze mit P(»Adler«) = 0,6? Zu welchen Entscheidungen führen die 3 Tests bei Tabelle 11.1, aufgefaßt als sechzehn 50fach-Würfe bzw. acht 100fach-Würfe bzw. vier 200fach-Würfe?

b) Als *Buffon* (1707–1788) das Petersburger Problem experimentell untersuchte, erhielt er bei 4040 Würfeln 2048mal Adler. (Vgl. Aufgabe 226/**22.b.**) *Poisson* (1781–1840) prüfte die Vermutung, daß *Buffon*s Münze »Adler« mit größerer Wahrscheinlichkeit produziert hatte als »Zahl«. Auf welchem Signifikanzniveau konnte er die Hypothese »*Buffon*s Münze war symmetrisch« ablehnen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit hätte er die Münze für eine Laplace-Münze gehalten, obwohl sie »Adler« mit $p = 0{,}52$ brachte?

31. *Laplace* (1749–1827) behandelte 1780 in seinem *Mémoire sur les probabilités* die Frage, ob die Wahrscheinlichkeiten für eine Knaben- bzw. eine Mädchengeburt gleich groß sind. Als Material verwendete er

1) das Geburtsregister von Paris für die Jahre 1745–1770, das 251527 Knaben- und 241945 Mädchengeburten auswies,

2) das Geburtsregister von London für die Jahre 1664–1757, das 737629 Knaben- und 698958 Mädchengeburten auswies.*

a) Es sei $p := P$(»Knabengeburt«). Zeige, daß man in beiden Fällen die Hypothese »$p = \frac{1}{2}$« praktisch auf jedem Signifikanzniveau ablehnen kann.

b) Langjährige statistische Beobachtungen legen für p den Wert 0,514 nahe. Untersuche, ob auf dem 10%-Niveau bzw. auf dem 5%-Niveau die Hypothese »$p = 0{,}514$« mit den obigen Daten abgelehnt werden kann. Führe sowohl einen einseitigen wie auch einen zweiseitigen Test durch.

32. Bei der Untersuchung der Frage, ob Knabengeburten häufiger sind als Mädchengeburten, kann man nach *John Arbuthnot* (1667–1735) folgendermaßen vorgehen. Man vergleicht über einen längeren Zeitraum hinweg die jährliche Anzahl der Knabengeburten mit der der Mädchengeburten. Wäre die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Knaben genausogroß wie die für die Geburt eines Mädchens, so müßte es auf lange Sicht gleich viele Jahre mit mehr Knaben wie Jahre mit mehr Mädchen geben. (Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Jahr genau gleich viel Knaben wie Mädchen auf die Welt kommen, ist praktisch Null.) Wir wählen somit als Nullhypothese »P(»Pro Jahr werden mehr Knaben als Mädchen geboren«) $= \frac{1}{2}$«. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit p, so lautet die Gegenhypothese »$p > \frac{1}{2}$«. Gib einen kritischen Bereich für einen Test dieser

* In Paris begann man erst 1745 damit, die Taufregister getrennt nach Geschlechtern zu führen. – Den geringeren Anteil an Knaben in Paris gegenüber London (und auch Neapel und Petersburg) konnte *Laplace* in seinem *Essai philosophique sur les Probabilités* (1814) klären: In den Archiven des »Hospice des Enfants-Trouvés« wurden für die Jahre 1745 bis 1809 als Findelkinder 163499 Knaben und 159405 Mädchen registriert. Der Anteil der Knabengeburten war also noch kleiner als der für Paris. *Laplace* schloß daraus, daß die Bevölkerung der Umgebung mehr Mädchen als Knaben in Paris aussetzte. Nach Bereinigung der Pariser Zahlen durch die Findelkinder ergab sich schließlich für Paris derselbe Anteil von Knaben wie in den anderen Städten.

Nullhypothese auf dem 1‰-Niveau an, wenn man über 50 Jahre hinweg die Geburten verfolgt. Was besagt das für *Arbuthnots* Folgerung,

»that it is Art, not Chance, that governs«,

aus seiner Feststellung, daß in den 82 Jahren von 1629 bis 1710 in London stets mehr Knaben als Mädchen zur Welt kamen?*

33. **a)** Theodor stellt nach 100 Würfen seiner 4 Astragali fest, daß 6mal »Aphrodite« erschienen ist. Die Erfahrungswahrscheinlichkeit für einen Aphrodite-Wurf ist 0,03. Kann er auf dem Signifikanzniveau von 5% annehmen, daß unter seinen Astragalen mindestens ein präparierter ist?**

b) Theodor hat einen Astragalus im Verdacht, daß die Seite mit dem Wert 6 mit einer Wahrscheinlichkeit fällt, die

1) von 7% verschieden ist, **2)** größer als 7% ist, **3)** kleiner als 7% ist.

Konstruiere jeweils einen Signifikanztest, damit Theodor mit 500 Würfen eine Entscheidung auf dem 1%-Niveau herbeiführen kann. Rechne sowohl mit der Normal- als auch mit der **Poisson*-Verteilung.

34. Lady X. konnte auf dem 5%-Niveau keine Begabung attestiert werden (Seite 352). Daraufhin wird der Test abgeändert: Lady X. bekommt 20 Tassen vorgesetzt. Sie beurteilt 16 davon richtig. Auf welchem Signifikanzniveau kann ihr nun eine Begabung attestiert werden?

35. Bei einer Prüfung werden einem Schüler 20 Aufgaben gestellt. Zu jeder Aufgabe werden 4 Lösungen angeboten, von denen genau eine richtig ist.

a) Angenommen, man wendet folgenden Notenschlüssel an:

Zahl der richtig angekreuzten Antworten	0 1 2 3 4	5 6 7 8	9 10 11	12 13 14	15 16 17	18 19 20
Note	6	5	4	3	2	1

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält dann ein Schüler, der sich völlig aufs Raten verlegt, die Note 1 (2, ..., 6)?

b) Von welcher Anzahl richtig gelöster Aufgaben an können wir die Hypothese »Der Schüler rät blindlings« verwerfen, wenn wir höchstens 5% Wahrscheinlichkeit dafür riskieren wollen, daß wir ihm irrtümlich Wissen bescheinigen?

36. Um zu prüfen, ob ein eben ausgeschlüpftes Küken Formen unterscheiden kann, legt man ihm »Körner« aus Papier vor. Es sind zur Hälfte Dreiecke, zur Hälfte Kreise mit gleicher Fläche wie die Dreiecke. Man läßt es 20mal picken. Ergebnis: 10111001111011011111 (Dreieck 0, Kreis 1). Das Ergebnis scheint für angeborenen Formensinn zu sprechen. Welche Wahrscheinlichkeit hätte dieses oder ein noch »besseres« Ergebnis unter der Voraussetzung, daß das Küken keine Formen unterscheiden kann? – Gleiche Frage für das Ergebnis 111011101.

37. Vor der Wahl zum 10. Deutschen Bundestag am 6. März 1983 behauptete das »Institut für Demoskopie Allensbach« auf Grund einer Umfrage unter 2000 Bürgern, daß die Unionsparteien 47,0%, die Grünen 6,5% der abgegebenen Stimmen erhalten werden.

Theodor ist der Meinung, daß beide Schätzungen nicht zutreffen; Dorothea hingegen meint, daß beide Prozentzahlen zu hoch seien. Sie starten daher eine neue Umfrage unter 2000 Bürgern. Welche kritischen Bereiche müssen sie für das 5%-Signifikanz-Niveau verwenden?

* In heutiger Sprechweise wählte *Arbuthnot* als kritischen Bereich $K = \{82\}$ und berechnete $\alpha' = P^{82}_{0,5}(\{82\}) = 2^{-82}$ zu 1 : 4836000000000000000000000.

** Von solchen mit Blei beschwerten Astragali berichtet *Aristoteles* (384–322) in *Problemata*, XVI.

38. Zwei verschiedene Düngemittel X und Y sollen verglichen werden. 20 Versuchsfelder werden je zur Hälfte mit X und Y gedüngt. Auf 13 Feldern bringt X einen größeren Ertrag als Y, auf den übrigen ist es umgekehrt. Da weitere Anhaltspunkte fehlen, ist eine plausible Nullhypothese: »X und Y sind gleich wirksam«. Wir nehmen an, daß Abweichungen der Erträge in der einen oder anderen Richtung gleich wahrscheinlich sind. Entscheide auf dem Signifikanzniveau von 15%, ob man die Nullhypothese »Beide Düngemittel sind gleichwertig« ablehnen kann. Auf welchem Niveau könnte man gerade noch ablehnen? Wie groß wäre die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art, wenn tatsächlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der X-Ertrag größer ist als der Y-Ertrag, 70% wäre?

39. Der Hersteller behauptet, Dünger X sei besser als Dünger Y (vgl. Aufgabe **38**). Entscheide mit Hilfe eines einseitigen Tests, ob die Nullhypothese der Gleichwirksamkeit auf dem Signifikanzniveau von 15% abgelehnt werden kann. Auf welchem Niveau kann sie nach den Daten der Aufgabe **38** gerade noch abgelehnt werden?

40. Eine Firma behauptet, das von ihr hergestellte Haarwasser heile in mehr als 70% aller Fälle Kahlköpfigkeit. Man stelle für die Stichprobenlänge 20 eine Entscheidungsvorschrift für das Testen dieser Hypothese auf, und zwar so, daß die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art, die Behauptung zu glauben, obwohl sie nicht stimmt, höchstens 5% ist. Warum muß unbedingt ein einseitiger Test gewählt werden?

41. Das neue Waschmittel Albil soll durch eine große Werbeaktion eingeführt werden. Wenn es der Werbeagentur gelingt, Albil bei mehr als 45% der Bevölkerung bekannt zu machen, erhält sie von den Albil-Werken eine besondere Prämie. Die Entscheidung soll auf Grund einer Befragung von 200 bzw. 2000 Personen getroffen werden. Wie muß die Entscheidungsregel lauten, wenn die Albil-Werke nur 0,5% Risiko dafür eingehen wollen, daß die Agentur zu unrecht die Prämie erhält? Wie hoch ist dann das Risiko für die Agentur, die Prämie nicht zu erhalten, obwohl 60% der Bevölkerung von Albil erfahren haben?

42. Der Kaufpreis für eine Sendung Äpfel wird unter der Annahme vereinbart, daß 15% des Obstes unbrauchbar sind. Sollte die Qualität wider Erwarten besser sein, so ist ein gewisser Preisaufschlag zu zahlen; ist sie schlechter, so wird ein Preisnachlaß gewährt. Die Entscheidung wird nach folgender Regel getroffen: Sind von 50 zufällig ausgewählten Äpfeln mehr als 11 faul oder wurmbefallen, dann Preisnachlaß. Sind weniger als 5 Stück unbrauchbar, dann Preisaufschlag. In allen anderen Fällen gilt der vereinbarte Preis.

a) Wie groß ist das Risiko des Verkäufers, einen ungerechtfertigten Preisnachlaß hinnehmen zu müssen, im ungünstigsten Fall?

b) Wie groß ist das Risiko des Käufers, einen ungerechtfertigten Preisaufschlag hinnehmen zu müssen, im ungünstigsten Fall?

c) Bei gleicher Stichprobenlänge sollen die beiden Risiken aus **a)** und **b)** unter 5% gedrückt werden. Welches Entscheidungsverfahren kann man wählen?

d) Der wahre Gehalt der Sendung an unbrauchbarem Obst sei 25%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird beim ursprünglichen Entscheidungsverfahren Preisnachlaß bzw. Preisaufschlag erzielt?

43. In der Zeitung steht: »Die Hälfte unserer Erwerbspersonen verdient weniger als 1600 DM monatlich.« Wir wählen daraufhin 100 Personen mit Einkommen zufallsbestimmt aus und finden, daß nur 42 davon ein Monatseinkommen unter 1600 DM haben. Auf welchem Signifikanzniveau können wir die Zeitungsbehauptung ablehnen? (Zweiseitiger Test)

44. Die Glühlampen einer bestimmten Marke haben zu 25% eine Brenndauer unter 1000 Stunden. Die Konkurrenz bringt einen neuen Typ auf den Markt, bei dem dieser Anteil angeblich kleiner ist. Wie viele von 100 Lampen der neuen Sorte müssen mindestens 1000 Stunden brennen, wenn man der Behauptung bei nur 5% Fehlerrisiko glauben soll?

45. Ein Präparat zur Steigerung der Konzentrationsfähigkeit wird an 15 Personen ausprobiert. Sie lösen an einem Tag Denkaufgaben ohne vorherige Stärkung, an einem andern

Tag verwandte Aufgaben nach Einnahme des Mittels. Bei 10 von ihnen zeigt sich eine Leistungssteigerung, bei 5 ist es umgekehrt. Wie ist auf dem 30%-Niveau zu testen, wenn
a) eine Leistungsminderung durch das Präparat ausgeschlossen ist,
b) eine solche Leistungsminderung in Betracht gezogen wird?
Welche Entscheidung wird in jedem der Fälle getroffen?

46. Wir nennen beim Zahlenlotto eine Zahl »selten« bzw. »häufig«, wenn ihre Ziehungshäufigkeit (ohne Berücksichtigung als Zusatzzahl) im jeweiligen kritischen Bereich zum 1%-Signifikanz-Niveau liegt. Bestimme diese kritischen Bereiche für 1225 Ziehungen bei »6 aus 49« und entnimm dann der Tabelle von Seite 38 die seltenen und häufigen Zahlen. Überlege vorher, ob einseitig oder zweiseitig getestet werden soll.

47. Lady X. behauptet, Teebeuteltee von richtig frei gebrühtem Tee unterscheiden zu können. Bestimme bei folgenden Tests jeweils das niedrigste Signifikanzniveau, bei dem man Lady X. noch eine solche Begabung attestieren könnte.
Für alle Aufgaben gelte, daß Lady X. die Bedingungen, unter denen sie getestet wird, kennt.
a) Es werden je eine Tasse vorgesetzt. Sie benennt beide richtig.
b) Zwei zufällig gefüllte Tassen werden beide richtig benannt.
c) 5 Paare mit je zwei Tassen verschieden gebrühten Tees werden alle richtig benannt.
d) 10 zufällig gefüllte Tassen werden alle richtig benannt.
e) 5 Teebeuteltassen und 5 andere werden in zufälliger Reihenfolge alle richtig benannt.
f) 5 Teebeuteltassen und 5 andere werden von Lady X. in zwei Gruppen auseinandersortiert, ohne daß sie aber sagen kann, welche Gruppe die Teebeuteltassen sind.

•48. a) Man beweise folgende Formeln über die Binomialverteilung:

1) $$\frac{\mathrm{d}F_p^n(k)}{\mathrm{d}p} = -n\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$$

2) Für $l > k$ gilt:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sum_{i=k+1}^{l} \mathrm{B}(n;p;i) = np^k(1-p)^{n-1-l}\cdot\left[\binom{n-1}{k}(1-p)^{l-k} - \binom{n-1}{l}p^{l-k}\right].$$

b) Man beweise die auf Seite 355 aufgestellten Behauptungen über die 4 verschiedenen Typen von OC-Kurven.

49. Zeichne die OC-Kurve zum Test von **a)** Aufgabe 368/**28**, **b)** Aufgabe 370/**33**, **c)** Aufgabe 371/**41**. Gib den Term der zugehörigen Polynomfunktion an und bestimme ihre Maximumstelle.

50. Eine Urne enthält 10 Kugeln; mindestens drei davon sind schwarz. Die Nullhypothese sei »Genau drei der Kugeln sind schwarz«. Man zieht sechs Kugeln mit Zurücklegen und verwendet als Testgröße die Anzahl Z der schwarzen Kugeln in der Stichprobe. Die Entscheidung falle gemäß

$$\delta_k:\begin{cases} Z \geqq k \Rightarrow \text{Ablehnung von } H_0 \\ Z < k \Rightarrow \text{Keine Ablehnung von } H_0. \end{cases}$$

Bestimme die Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha'(\delta_k)$. Zeichne die OC-Kurven für alle möglichen Entscheidungsregeln δ_k. Gib auch jeweils den Term der zugehörigen Polynomfunktion an.

51. Ein Hersteller liefert Glühbirnen mit einem Ausschußanteil von 10%. Der Empfänger testet die Lieferung, indem er 100 herausgreift und prüft. Er akzeptiert die Lieferung, falls 14 oder weniger defekt sind. Zeichne die OC-Kurve des Ereignisses »Annahme der Lieferung« in Abhängigkeit von der tatsächlichen Ausschußquote. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art, falls die Ausschußquote wirklich 10% ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art, falls die Ausschußquote wegen eines Maschinenschadens auf 15% gestiegen ist? Wie ist es bei 25%?

52. Die Nullhypothese, eine Binomialverteilung habe den Parameter $p = 0{,}5$, soll auf dem Signifikanzniveau 5% zweiseitig getestet werden. Der Annahmebereich $\bar{K}$ sei möglichst schmal. Bestimme $\bar{K}$, zeichne die OC-Kurven von $\bar{K}$ für $n = 15, 20, 50, 100$ und gib den zugehörigen OC-Term an.

53. Die CSP wünscht ihren Kandidaten Meier auf jeden Fall bei der nächsten Wahl durchzubringen. Sie beschließt, den Wahlkampf auf die augenblickliche Stimmung des Publikums einzustellen. Sind mindestens 60% der Wähler zur Zeit für Meier, so genügt ein normaler Wahlkampf. Sind es weniger als 60%, so muß die sehr harte und kostspielige Variante des Wahlkampfes geführt werden.

a) Eine Umfrage bei 20 zufällig ausgesuchten Wählern soll die Entscheidung bringen. Gib ein Entscheidungsverfahren an, mit dem auf dem 10%-Niveau entschieden werden kann, ob ein normaler Wahlkampf genügt. Zeichne die OC-Kurve.

b) Wie lautet die Entscheidungsregel, falls 2000 Personen befragt werden? (Normalverteilung!) Zeichne die zugehörige OC-Kurve. (Die interessanten Werte liegen im Intervall $[0{,}55; 0{,}65]$.)

54. Z sei nach $B(5;p)$ verteilt. Es soll die Nullhypothese »$p \leqq 0{,}4$« gegen die Alternative »$p > 0{,}4$« getestet werden. Gibt es einen Annahmebereich $\bar{K} =$ »$Z \leqq k$«, bei dem die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art stets $\leqq 1\%$ ist? Benütze Figur 357.1.

55. X sei nach $B(10;p)$ verteilt. Zeichne jeweils die OC-Kurve für das angegebene Ereignis, gib den Funktionsterm und die Monotoniebereiche an.
a) $[0;6]$ **b)** $[4;10]$ **c)** $[0;4] \cup [7;10]$ **d)** $[5;6]$ **e)** $[0;10]$ **f)** $\emptyset$

•**56.** **a)** Die Qualitätskontrolle klinisch-chemischer Analysen dient zur Überwachung der verwendeten Methode. Man analysiert dabei Proben, bei denen die Konzentration des zu bestimmenden Stoffes bekannt ist. Man sagt, »die Methode ist außer Kontrolle«, wenn eines der folgenden Kriterien zutrifft.
1) 7 aufeinanderfolgende Meßwerte liegen auf derselben Seite des Mittelwerts μ.
2) 7 aufeinanderfolgende Werte zeigen eine ansteigende oder eine abfallende Tendenz.
Man kann diese beiden Kriterien als 2 verschiedene Tests betrachten. Formuliere jeweils die zulässige Hypothese und die Nullhypothese. Gib den kritischen Bereich an und berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art. Zeichne jeweils die OC-Kurve. – Hinweis zu **2)**: Wähle als Testgröße die Maximalzahl der monoton liegenden Werte.

b) Bestimme unabhängig vom Testproblem die Wahrscheinlichkeitsverteilung der im *Hinweis* angesprochenen Zufallsgröße in Abhängigkeit von $p := P($»Meßwert ist größer als der vorhergehende«$)$; dabei wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit für einen mit dem vorhergehenden Meßwert übereinstimmenden Meßwert Null ist. Bestimme ihren Erwartungswert und ihre Varianz und deren Werte für $p = \frac{1}{2}$.

***57.** »Bomber« Huber, der Fußballstar, schießt in einem Spiel Z Tore. Die Zufallsgröße Z sei *Poisson*-verteilt mit dem Erwartungswert μ. Der FC. X. will Huber anwerben, wenn er auf lange Sicht pro Spiel im Mittel mehr als 1,5 Tore schießt. Das nächste Spiel soll die Entscheidung bringen. Schießt Huber mindestens 3 Tore, dann wird man ihm eine passende Geldsumme anbieten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der FC. X. Huber irrtümlich einkauft? Zeichne die OC-Kurve.

Zu 17.6.

58. Zeige: Der Test der Nullhypothese »$p = \frac{1}{2}$« über den Parameter p einer *Bernoulli*-Kette der Länge 10 ist verfälscht, wenn man als kritischen Bereich $K := [0;3] \cup [8;10]$ wählt. – Zeichne auch die OC-Kurve und bestimme ihren Hochpunkt.

59. a) Eine Urne enthält 10 Kugeln, darunter womöglich rote. Man testet die Nullhypothese »Die Urne enthält genau 3 rote Kugeln«, indem man 6 Kugeln mit Zurücklegen entnimmt und die Anzahl Z der roten Kugeln in der Stichprobe bestimmt.
Gib einen kritischen Bereich zum Signifikanzniveau 25% an und zeichne die OC-Kurve des Tests. Ist er verfälscht?

•**b)** Löse **a)** durch Ziehen ohne Zurücklegen.

c) Löse **a)** für die Nullhypothese »Die Urne enthält mindestens 3 rote Kugeln«.

•**d)** Löse **a)** für die Nullhypothese »Die Urne enthält mindestens 3 rote Kugeln« durch Ziehen ohne Zurücklegen.

60. a) Z sei nach $B(12; p)$ verteilt. Zeige, daß der Annahmebereich »$1 \leqq Z \leqq 3$« zur Nullhypothese »$p = \frac{1}{6}$« bezüglich der zulässigen Hypothese $[0; 1]$ einen verfälschten Test liefert. Für welche Nullhypothese ist der Test unverfälscht?

b) Z sei nach $B(20; p)$ verteilt. Zur Nullhypothese »$p = \frac{1}{5}$« werde der Annahmebereich »$1 \leqq Z \leqq 7$« festgesetzt. Zeige, daß dieser Test bezüglich $H = [0; 1]$ verfälscht ist. Zeichne die OC-Kurve des Annahmebereichs.

61. Untersuche, welche der Tests von Aufgabe **52** verfälscht sind.

62. Bei einem Blutalkoholgehalt von mehr als 0,8 Promille ist Autofahren strafbar. Das Gesetz zieht rigoros diese Grenze. In einer Klinik kann der Blutalkohol praktisch zweifelsfrei gemessen werden; der Schnelltest auf der Straße ist nicht so zuverlässig. Das Testergebnis – es lautet »Alkoholgehalt größer bzw. kleiner als 0,8‰« – kann in zweifacher Weise falsch sein. Erläutere die beiden Fehlermöglichkeiten und ihre Folgen! Welche Wahl der Fehlerwahrscheinlichkeiten entspricht unserem Rechtsgrundsatz »in dubio pro reo«? Welche Konsequenzen ergäben sich, wenn der Test verfälscht wäre? Welche besondere Problematik ergibt sich daraus, daß der Blutalkoholgehalt eines Fahrers auch beliebig genau bei 0,8‰ liegen kann?

Zu 17.7.

63. Eine Abfüllanlage soll Zuckerpakete zu je 1000 g abfüllen. Die Zufallsgröße X gebe den wirklichen Inhalt in g an. Aus Erfahrung weiß man, daß $\operatorname{Var} X = 25$ gilt. Eine Messung von 50 Paketen soll darüber entscheiden, ob die Anlage neu eingestellt werden muß. Man wählt als Testgröße das arithmetische Mittel $\bar{X}$ der 50 Messungen und nimmt an, daß es normalverteilt ist. Bestimme für das Signifikanzniveau 5% den kritischen Bereich

a) für einen einseitigen Test, wo man sich nur für zuviel Zucker im Paket interessiert,

b) für einen zweiseitigen Test.

64. Eine Lehrmittelfirma liefert Widerstände und behauptet, ihr Nennwert $50\,\Omega$ sei bei einer Varianz von $25\,\Omega^2$ gesichert. Bestimme zu einem Signifikanzniveau von 5% den kritischen Bereich für einen zweiseitigen Test, wenn 10 Widerstände gemessen werden und als Testgröße das arithmetische Mittel der gemessenen Widerstände genommen wird. Wie wird man sich entscheiden, wenn die Messung der 10 Widerstände folgende Werte in Ω ergab: 49,0 46,9 50,0 46,8 53,1 50,6 50,2 47,7 49,0 48,5.

65. Bei Werkzeugmaschinen kennt man oft die Streuung für die Maße der Produkte aus Erfahrung, während der Mittelwert von der jeweiligen Einstellung der Maschine abhängt. Eine Maschine produziert Bolzen der Länge L mm. Die Zufallsgröße L sei normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$. Wenn der Erwartungswert $\mathscr{E}L = \mu$ außerhalb des Intervalls $[97; 103]$ liegt, muß die Maschine neu eingestellt werden. Ein solcher Fall soll mit mindestens 98% Sicherheit erkannt werden. Es wird 1 beliebig herausgegriffener Bolzen genau gemessen. In welchem Intervall muß seine Länge liegen, wenn die Maschine weiterlaufen darf? Wie groß ist die Mindestwahrscheinlichkeit dafür, daß die Maschine auf Grund des Tests unnötigerweise neu eingestellt wird? Zeichne die OC-Kurve.