Stochastik

Barth, Friedrich

München, [20]03

Aufgaben

Diese Formel gilt für eine beliebige Zahl a. Man wählt a als glatte Zahl in der Nähe von $\bar{x}$ und kann damit die rechte Seite verhältnismäßig einfach ausrechnen. Ein Beispiel zeigt Tabelle 384.1.

x_i	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$
12	−23	529
21	−14	196
28	− 7	49
30	− 5	25
34	− 1	1
37	+ 2	4
39	+ 4	16
39	+ 4	16
49	+14	196
56	+21	441
Summe:	− 5	1473

Tab. 384.1 Punktbewertungen x_i von 10 Personen bei einem Gedächtnistest. Die Hilfszahl $a = 35$ wird bereits zur Berechnung von $\bar{x}$ mit Vorteil verwendet. (Vgl. Aufgabe 215/**20**)

$\bar{x} = 35 - \frac{5}{10} = 34{,}5;$
$s^2 = \frac{1}{9}(1473 - 10 \cdot 0{,}5^2);$
$s = 12{,}8.$

Aufgaben

Zu 18.3.–18.6.

1. Bestimme bei folgenden Stichproben aus einer Zufallsgröße Schätzwerte für den Erwartungswert und die Varianz:
a) 3; 5; 3; 6; 9. **b)** 0,3; 0,7; −0,4; 0,8; −0,2.
c) 300; 700; −400; 800; −200 **d)** 1; 1; 1; 1; 1.

2. Bestimme Schätzwerte für Erwartungswert und Varianz der Zufallsgröße »Bremsweg bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h«, wenn sich folgende Meßwerte in m ergaben:
15,5 14,0 14,1 14,9 13,4 15,0 14,4 14,4 15,8 15,9.

3. Welchen Erwartungswert und welche Varianz erhält man bei n Messungen für das Stichprobenmittel $\bar{X}$, wenn für die Zufallsgröße X gilt:
a) $\mathscr{E}X = 2{,}71;\ \operatorname{Var} X = 1{,}5;\ n = 10.$ **b)** $\mathscr{E}X = 1;\ \operatorname{Var} X = 1;\ n = 100.$
c) $\mathscr{E}X = 1;\ \operatorname{Var} X = 1;\ n = 1000.$ **d)** $\mathscr{E}X = 0;\ \operatorname{Var} X = 1;\ n = 1000.$

4. Zeige, daß $V := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für σ_X^2 ist.

5. **a)** Eine Zufallsgröße X ist binomial nach $B(1; 0{,}25)$ verteilt. Bestimme Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X. Berechne für eine Stichprobe der Länge 3 die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und die Erwartungswerte des Stichprobenmittels $\bar{X}_3$, der Stichprobenvarianz S^2 und der Stichprobenstreuung S.
b) Löse **a)** für eine Stichprobe der Länge 2, wenn X nach $B(2; 0{,}25)$ verteilt ist.

6. Eine Zufallsgröße X besitze die Verteilung $P(X = x_j) =: p_j$ für $j = 1, \ldots, s$. $(X_1|X_2|\ldots|X_n)$ sei eine Stichprobe der Länge n, ferner sei $N_j :=$ Anzahl der X_i, welche den Wert x_j annehmen. A_j bedeute das Ereignis »$\left|\frac{1}{n}N_j - p_j\right| \geqq a$«.
a) Formuliere für $P(A_j)$ die *Tschebyschow*-Ungleichung.
b) Formuliere mit den A_j das Ereignis $A :=$ »Die Stichprobenverteilung weicht nirgends um a oder mehr von der Wahrscheinlichkeitsverteilung ab«.
•**c)** Finde für $P(\bar{A})$ eine Abschätzung, die zeigt, daß das Ereignis A für genügend große n eine beliebig nahe an 1 gelegene Wahrscheinlichkeit hat. *Die Stichprobenverteilung konvergiert »in Wahrscheinlichkeit« gegen die Wahrscheinlichkeitsverteilung.*

7. Eine Zufallsgröße sei nach $B(100; 0{,}4)$ verteilt. Wie lang muß eine Stichprobe mindestens sein, damit die Varianz des Stichprobenmittels kleiner als 0,01 ist?

8. Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt ist 0,514. Die Zufallsgröße X nehme den Wert 1 an, wenn ein Knabe geboren wird, sonst habe sie den Wert 0.

Berechne Erwartungswert und Standardabweichung des Stichprobenmittels für eine Stichprobe der Länge 100.

9. a) Man wirft eine Münze 1mal und nimmt $Z :=$ »Anzahl der Adler« als Schätzgröße für den Parameter $p := P$(»Adler«). Welche Werte kommen bei der Schätzung also stets heraus? Z scheint keine sehr gute Schätzgröße zu sein. Man zeige, daß sie aber erwartungstreu ist!

b) Untersuche, ob $T := tX_1 + (1-t)X_2$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für $\mathscr{E}X$ ist, wenn $(X_1 | X_2)$ eine Stichprobe der Länge 2 aus der Zufallsgröße X ist.

10. Eine Schätzgröße Y sei nicht erwartungstreu bezüglich des Parameters ϑ. Warum kann man nicht einfach $Y_1 := Y - \mathscr{E}Y + \vartheta$ als neue, und zwar erwartungstreue Schätzgröße benützen, oder auch $Y_2 := \dfrac{Y \cdot \vartheta}{\mathscr{E}Y}$?

11. Der »Idealwert« np für die Anzahl des Eintretens eines Ereignisses der Wahrscheinlichkeit p bei n unabhängigen Versuchen wird durch die Anzahl Z des wirklichen Eintretens geschätzt. Ist diese Schätzung erwartungstreu?

•12. Die Kugeln in einer Urne sind von 1 an fortlaufend numeriert. Es werden n Kugeln *ohne* Zurücklegen gezogen und ihre Nummern aufgeschrieben. Es soll die unbekannte Anzahl τ aller Kugeln in der Urne geschätzt werden.*

a) Als Schätzgröße bietet sich $G :=$ »Größte gezogene Kugelnummer« an. Es gilt nach Aufgabe 192/**31** $\mathscr{E}G = \dfrac{n(\tau+1)}{n+1}$.
G ist also nicht erwartungstreu. Konstruiere aus G eine erwartungstreue Schätzgröße $\widetilde{G}$.

b) Es gilt: $\operatorname{Var} G = \dfrac{n(\tau+1)(\tau-n)}{(n+1)^2(n+2)}$.
Berechne $\operatorname{Var}\widetilde{G}$.

c) Eine andere plausible Schätzgröße für τ ist das doppelte arithmetische Mittel $2\bar{X}$ aus allen gezogenen Kugelnummern. Zeige durch Berechnung des Erwartungswertes, daß auch diese Schätzgröße erst nach einer kleinen Abänderung erwartungstreu ist.

d) Eine längere Rechnung (Durchführung nicht verlangt) ergibt:

$$\operatorname{Var}\bar{X} = \frac{(\tau+1)(\tau-n)}{12n}.$$

Berechne hieraus die Varianz der erwartungstreuen Schätzgröße aus **c)** und vergleiche sie mit $\operatorname{Var}\widetilde{G}$ aus **b)**. Sind die beiden Schätzgrößen für τ gleichwertig?

•13. Aus der Urne der vorigen Aufgabe wird die Stichprobe *mit* Zurücklegen gezogen. Zeige, daß $\operatorname{Var}\bar{X} = \dfrac{\tau^2-1}{12n}$ gilt und daß die mit $\bar{X}$ gebildete erwartungstreue Schätzgröße stärker streut als die von Aufgabe **12. c)**.

•14. Zeige, daß S^2 und $\tilde{S}^2$ konsistente Schätzgrößen für σ^2 sind.
Hinweis: Zerlege die in der *Tschebyschow*-Ungleichung auftretende $\operatorname{Var} S^2$ in zwei Teile, so daß in einem dieser Teile nur über lauter verschiedene Indizes summiert wird.

* Dieses Schätzproblem spielte im 2. Weltkrieg eine Rolle, als man aus den Seriennummern von erbeuteten Waffen auf den Umfang der Waffenproduktion schließen wollte.