Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1994

[Lösungen]

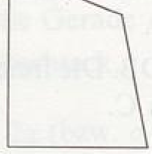
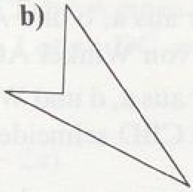
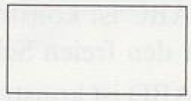
urn:nbn:de:hbz:466:1-83947

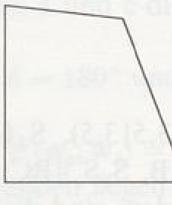
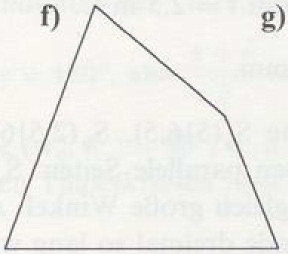
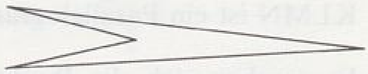
1. Kapitel

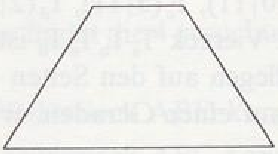
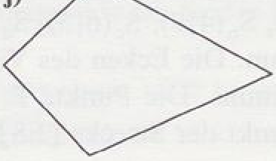
Aufgaben zu 1.1

8/1. Richtiger Umlaufsinn bei BLEI, BEIL, BILE.

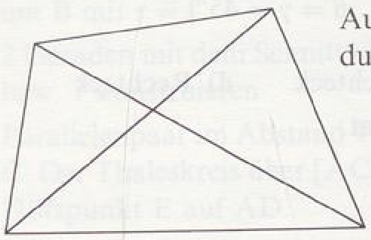
8/2. PIRA, PIAR, PRIA, PISA, ISAR.

8/3. **a)**  **b)**  **c)**  **d)** nein

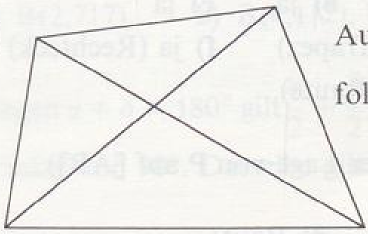
e)  **f)**  **g)** 

h)  **i)** nein **j)**  **k)** nein

9/4. $\alpha + \alpha^* + \beta + \beta^* + \gamma + \gamma^* + \delta + \delta^* = 4 \cdot 180°$
$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha^* + \beta^* + \gamma^* + \delta^* = 720°$
Wegen $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ gilt aber auch $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* + \delta^* = 360°$.

9/5. **a)** 

Aus $e < a + b$, $e < c + d$, $f < b + c$, $f < a + d$ folgt durch Addition $2e + 2f < 2u$, also $e + f < u$.

b) 

Aus $e_1 + f_1 > a$, $f_1 + e_2 > b$, $e_2 + f_2 > c$, $f_2 + e_1 > d$ folgt durch Addition $2e + 2f > u$, also $e + f > \frac{u}{2}$.

c) Aus $e_1 + f_1 > a$, $e_2 + f_2 > c$ folgt durch Addition $e + f > a + c$.
Aus $f_1 + e_2 > b$, $f_2 + e_1 > d$ folgt durch Addition $e + f > b + d$.

9/6. **a)** Dreieck BCD ist konstruierbar aus b, γ und c. Die Kreise um D mit r = d bzw. um B mit r = a schneiden sich in A.

b) Dreieck ABC ist konstruierbar aus a, β und b. Der Kreis um B mit r = 11 schneidet den freien Schenkel von α in D.

c) Dreieck ABC ist konstruierbar aus a, β und b. Der Kreis um C mit r = 2 schneidet den freien Schenkel von γ in D.

d) Dreieck ABC ist konstruierbar aus a, b und $\overline{AC}$. Der Kreis um B mit r = 10 schneidet den freien Schenkel von Winkel ACD in D.

e) Dreieck ABD ist konstruierbar aus a, d und Winkel ADB. Die freien Schenkel von Winkel CDB und Winkel CBD schneiden sich in C.

9/7. Dreieck ABD ist konstruierbar aus a, α und d. Der Thaleskreis über [BD] schneidet den Kreis um D mit r = 2,5 in C.

9/8. KLMN ist ein Parallelogramm.

9/9. Es ergeben sich die Punkte $S_a(5|6{,}5)$, $S_b(2{,}5|6)$, $S_c(3{,}5|3{,}5)$, $S_d(4{,}5|4)$ und $S(4|4{,}5)$. Die Vierecke haben parallele Seiten: $S_aS_b \parallel AB$, $S_bS_c \parallel BC$, $S_cS_d \parallel CD$, $S_dS_a \parallel DA$ und damit auch gleich große Winkel. Außerdem sind die Seiten des Vierecks ABCD jeweils gerade dreimal so lang wie die des Vierecks $S_aS_bS_cS_d$.

9/10. Es ergeben sich die Punkte $E(4|7)$, $T_a(7|5)$, $T_b(10|11)$, $T_c(5|11)$, $T_d(2|5)$, $T(6|8)$, $S_a(9|11)$, $S_b(4|9)$, $S_c(6|5)$, $S_d(9|9)$ und $S(8|9)$. Viereck $T_aT_bT_cT_d$ ist ein Parallelogramm. Die Ecken des Vierecks $S_aS_bS_cS_d$ liegen auf den Seiten dieses Parallelogramms. Die Punkte E, T und S liegen auf einer Geraden, wobei T der Mittelpunkt der Strecke [ES] ist.

Aufgaben zu 1.2

17/1. **a)** $\gamma = 75°$, $\beta = \delta = 105°$ **b)** $\alpha = \gamma = 108°$, $\beta = \delta = 72°$
c) $\beta = \gamma = \delta = 90°$ **d)** $\alpha = \delta = 135°$, $\beta = \gamma = 45°$.

17/2. **a)** Rechteck **b)** Rechteck **c)** Rechteck **d)** Rechteck
e) Raute **f)** Rechteck **g)** Quadrat.

17/3. Gleichschenkliges Trapez.

17/4. **a)** nein (z. B. gleichschenkliges Trapez) **b)** ja **c)** ja
d) ja **e)** nein (z. B. gleichschenkliges Trapez) **f)** ja (Rechteck)
g) nein (z. B. Drachenviereck) **h)** ja (Raute).

17/5. Die Wege sind gleich (unabhängig von der Lage von P auf [AB]).

17/6. **a)** Raute **b)** Raute **c)** Rechteck **d)** Raute.

17/7. Es gilt: $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{PQ}$ und $AB \parallel DC \parallel PQ$. Also ist $\overline{AB} = \overline{PQ}$ und $AB \parallel PQ$ und damit ABPQ ein Parallelogramm.

17/8. Es sei Z der Diagonalenschnittpunkt. Bei einer Punktspiegelung an Z wird das Parallelogramm auf sich abgebildet, der Kreis ist Fixkreis bei derselben Punktspiegelung.
Deshalb ist Z identisch mit dem Kreismittelpunkt M. Die Diagonalen des Parallelogramms sind also Kreisdurchmesser, und das Parallelogramm hat nach Thales rechte Winkel; es ist damit ein Rechteck.

17/9. **a)** Wenn ein Trapez ABCD bei A einen rechten Winkel hat, so ist wegen AB || DC die Gerade AD auch Lot zu DC $\Rightarrow \sphericalangle D = 90°$.

b) Rechteck.

18/10. $\sigma = 2\alpha$ (bzw. $\sigma = 180° - 2\alpha$).

18/11. Wenn a und c die Grundseiten des Trapezes ABCD sind, gilt:

$\alpha + \delta = 180°$ und $\beta + \gamma = 180°$, also $\frac{\alpha+\delta}{2} = 90° = \frac{\beta+\gamma}{2}$.

$\Rightarrow \sphericalangle(w_\alpha, w_\delta) = 90°$, $\sphericalangle(w_\beta, w_\gamma) = 90°$, d., h. die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden liegen auf den Thaleskreisen über den Schenkeln.

18/12. B(3,5|1), C(7|5,5).

18/13. Man findet die 4 gesuchten Punkte als Schnittpunkte der beiden Parallelenpaare.

18/14. **a)** Teildreieck ABD konstruieren **b)** Teildreieck ACD konstruieren

c) Teildreieck ABC konstruieren **d)** Teildreieck BCM konstruieren

e) Teildreieck BCM konstruieren

f) a antragen, Kreis um B mit r = b, Parallele zu a im Abstand 5

g) a antragen, α antragen, Parallele zu a im Abstand 6

h) 2 Parallele im Abstand 6 zeichnen, B wählen und Kreis um B mit r = b, Kreis um B mit r = f

i) 2 Geraden mit dem Schnittwinkel α zeichnen, dazu die Parallele im Abstand 5 bzw. 7 konstruieren

j) Parallelenpaar im Abstand 4 zeichnen, A wählen, Kreis um A mit r = e ergibt C. Der Thaleskreis über [AC] und der Kreis um C mit r = 2 schneiden sich im Hilfspunkt E auf AD.

18/16. **a)** B(2,7|7), **b)** B(4,1|2), U(4,1|8)

18/17. Wegen $\alpha + \delta = 180°$ gilt $\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2} = 90°$, d. h., w_α und w_δ schneiden sich unter einem Winkel von 90°. Dasselbe gilt für die übrigen Schnittpunkte.

18/18. ΔEDC ist gleichschenklig, also $\overline{ED} = \overline{EC}$; ΔFBD ist gleichschenklig, also $\overline{FB} = \overline{FD}$.
Insgesamt gilt also: $\overline{AE} + \overline{ED} + \overline{DF} + \overline{AF} = \overline{AC} + \overline{AB}$.

18/19. Die Diagonale [BD] wird jeweils von den parallelen Seitenhalbierenden gedrittelt. Da die Lage der Teilungspunkte eindeutig ist, müssen sich die Seitenhalbierenden auf [BD] schneiden.

19/20. **a)** Beide Dreiecke sind gleichschenklig und haben die gleichen Winkel (α ist der Winkel an der Spitze).

b) $\sphericalangle NCD + \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCM = \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \alpha + \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ$.

19/21. **a)** M sei der Schnittpunkt von [AC] und [BD]. Bei der Punktspiegelung an M wird der Thaleskreis k_1 über [AD] auf den Thaleskreis k_2 über [BC] abgebildet, die Gerade AC fällt mit ihrem Bild zusammen. Der Schnittpunkt E ist also das Bild von Schnittpunkt F. Da D bei derselben Punktspiegelung auf B abgebildet wird, gilt $DF = BE$.

b) Da nach **a)** FBED ein punktsymmetrisches Viereck ist, muß es ein Parallelogramm sein.

19/22. **a)** Wegen $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ gilt:

$$\sphericalangle FDE = \frac{\delta}{2} = \sphericalangle EBF,$$

$$\sphericalangle DEB = 360^\circ - \alpha - \delta - \frac{\beta}{2} = 360^\circ - \alpha - \frac{3}{2}\delta,$$

$$\sphericalangle BFD = 360^\circ - \frac{\delta}{2} - \gamma - \beta = 360^\circ - \alpha - \frac{3}{2}\delta$$

Also ist Viereck FBED ein Parallelogramm.

b) W ist Symmetriezentrum von [DB]. Da FBED ein Parallelogramm ist, muß W auch Symmetriezentrum von [EF] sein.

c) AFCE ist ein punktsymmetrisches Viereck (Symmetriezentrum W).

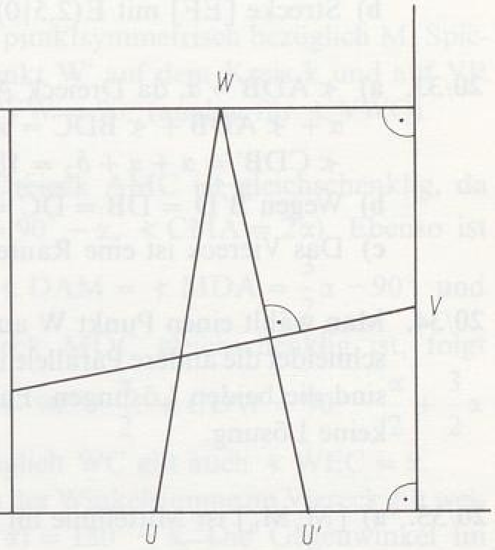
19/23. Das neue Dreieck enthält 3 Parallelogramme, nämlich ABCB′, ABA′C und AC′BC′. Für den Umfang von Dreieck A′B′C′ gilt also:
$u = 2c + 2b + 2a = 2(a + b + c)$.

19/24. G liegt punktsymmetrisch zu E, F liegt punktsymmetrisch zu H; also ist EFGH ein punktsymmetrisches Viereck.

19/25. Der Schnittpunkt von AM_c und m_a sei S. $AM_a M_c D$ ist ein Parallelogramm, weil $AM_a \parallel M_cD$ und $\overline{AM_a} = \overline{DM_c}$. Da $[AM_c]$ von S halbiert wird, muß auch die andere Diagonale $[DM_c]$ durch das Symmetriezentrum S laufen. (Analoge Begründung für den anderen Schnittpunkt.)

19/26. a) M sei der Mittelpunkt des Quadrats. Bei einer Drehung um M mit $\varphi = 90°$ wird D auf $D' = A$ und A auf $A' = B$ abgebildet. T' liegt also auf AB und V' auf DC (analoge Begründung). Weiter gilt $\overline{T'V'} = \overline{TV}$ und $TV \perp T'V'$. Da auch UU' Lot von TV ist, gilt $UU' \parallel T'V'$. $[UU']$ und $[T'V']$ sind also parallele Querstrecken und somit gleich lang.

b) Man zeichnet z.B. von W aus die Lotstrecke $[WU']$ mit $\overline{WU'} = \overline{TV}$.
Auf UU' liegt eine Quadratseite; auf dem Lot k von V auf UU' liegt die 2. Quadratseite, auf dem Lot l von W auf k die 3. Quadratseite und auf dem Lot von T auf l die 4. Quadratseite.



19/27. a) Z sei der Mittelpunkt von [AC]. Die Punktspiegelung an Z bildet [AB] auf [CD] ab, M wird wegen $\overline{AM} = \overline{CP}$ auf P abgebildet. Ebenso wird Q bei derselben Punktspiegelung auf N abgebildet. $\sphericalangle$ AMQ wird also auf $\sphericalangle$ CPN abgebildet, d. h. $\sphericalangle$ AMQ = $\sphericalangle$ CPN.

b) Nach **a)** ist Viereck MNPQ punktsymmetrisch, also ein Parallelogramm.

c) Da das Parallelogramm MNPQ dasselbe Symmetriezentrum Z wie ABCD hat, schneiden sich seine Diagonalen ebenfalls in Z.

20/28. a) Der Kreis um M(5|8,5) mit r = 6,5 schneidet das Parallelogramm in den Ecken des gesuchten Rechtecks.

b) Der Kreis um M(5|8,5) mit r = 3 schneidet das Parallelogramm in 4 Punkten. Dies sind zwei Paare von gegenüberliegenden Ecken der Raute. Die anderen Eckpunkte liefern die Schnittpunkte der zur ersten senkrechten Diagonale (durch M) mit dem Parallelogramm.

20/29. a) Auf Grund der Spiegelungen sind die Seiten des Dreiecks $L_a L_b L_c$ Mittellinien in den Teildreiecken von Dreieck $S_a S_b S_c$, also halb so lang wie diese. Wegen der Parallelität der Seiten sind die Winkel gleich groß.

b) Auf Grund der Spiegelungen sind die Seiten des Dreiecks ABC Mittellinien in den Teildreiecken von Dreieck $S_A S_B S_C$, also halb so lang wie diese. Wegen der Parallelität der Seiten sind die Winkel gleich groß.

20/30. a) Da gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind, ergibt sich ein Parallelogramm.

b) Die Mittellinie m des Trapezes ist halb so lang wie AD', also

$$m = \frac{1}{2}(a + c') = \frac{1}{2}(a + c).$$

20/31. $m_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}(a+c)\right) = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}c, \quad m_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+c) + c\right) = \frac{a}{4} + \frac{3}{4}c$

20/32. **a)** Strecke [EF] mit $E(2{,}5|1{,}25)$ und $F(2{,}5|5)$.
b) Strecke [EF] mit $E(2{,}5|0)$ und $F(2{,}5|5)$.

20/33. **a)** $\sphericalangle ADB = \alpha$, da Dreieck ABD gleichschenklig ist. Wegen $AB \parallel DC$ gilt
$\alpha + \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \alpha + \alpha + \delta_2 = 180°$.
$\sphericalangle CDB' = \alpha + \alpha + \delta_2 = 180°$, da $\sphericalangle B'DA = \alpha$. Also liegt B' auf DC.
b) Wegen $\overline{B'D} = \overline{DB} = \overline{DC} = a$ halbiert D die Strecke [B'C].
c) Das Viereck ist eine Raute wegen 4 gleich langer Seiten.

20/34. Man wählt einen Punkt W auf einer der Parallelen. Der Kreis um W mit $r = 7$ schneidet die andere Parallele in U und V. Die Parallelen zu WU und WV durch A sind die beiden Lösungen. Falls die Querstreckenlänge kleiner als 5 ist, gibt es keine Lösung.

20/35. **a)** $[M_aM_b]$ ist Mittellinie im Dreieck ABC, also gilt $M_aM_b \parallel AC$ und
$\overline{M_aM_b} = \frac{\overline{AC}}{2}$.
$[M_cM_d]$ ist Mittellinie im Dreieck ACD, also gilt $M_cM_d \parallel AC$ und
$\overline{M_cM_d} = \frac{\overline{AC}}{2}$.
Wegen $M_aM_b \parallel M_cM_d$ und $\overline{M_aM_b} = \overline{M_cM_d}$ ist also $M_aM_bM_cM_d$ ein Parallelogramm.
b) $[M_aN]$ ist Mittellinie im Dreieck ABD, also gilt $M_aN \parallel AD$ und $\overline{M_aN} = \frac{d}{2}$.
$[M_cM]$ ist Mittellinie im Dreieck ACD, also gilt $M_cM \parallel AD$ und $\overline{M_cM} = \frac{d}{2}$.
M_aNM_cM ist deshalb ein Parallelogramm mit $M_aN \parallel d$ und $M_cM \parallel d$. Da weiter $[M_aM]$ Mittellinie im Dreieck ABC ist, gilt $\overline{M_aM} = \overline{M_cN} = \frac{b}{2}$ und $MM_a \parallel b \parallel M_cN$.
c) Falls das Viereck ABCD zwei aufeinander senkrecht stehende Diagonalen hat, so entsteht ein Rechteck.
Falls das Viereck ABCD zwei gleich lange Diagonalen hat, entsteht eine Raute.
Falls das Viereck ABCD zwei gleich lange Diagonalen hat, die aufeinander senkrecht stehen, so entsteht ein Quadrat.

21/36. **a)** Da das Mittendreieck bekannt ist, erhält man die Eckpunkte des gesuchten Dreiecks als Schnittpunkte der zu den gegebenen Mittellinien parallelen Geraden durch die Ecken des Mittendreiecks.

b) M sei der Mittelpunkt von $[M_aM_c]$. Die Parallele zu M_aM_c durch M_b und die Parallele zu MM_b durch M_a bzw. M_c schneiden sich im Eckpunkt B bzw. C. A und D erhält man durch Punktspiegelung.

c) $\sphericalangle PVW = \sphericalangle VWQ = 90°$
VP und WQ liegen nach Konstruktion punktsymmetrisch bezüglich M. Spiegelt man W an M, so liegt der Bildpunkt W' auf dem Kreis k und auf VP. Nach Thales gilt also $\sphericalangle W'VW = \sphericalangle PVW = 90°$ (analog für $\sphericalangle VWQ$).

21/37. a) M sei der Mittelpunkt des Kreises. Dreieck AMC ist gleichschenklig, da $\overline{AM} = \overline{MC} = r$ ($\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM = 90° - \alpha$, $\sphericalangle CMA = 2\alpha$). Ebenso ist Dreieck ADM gleichschenklig mit $\sphericalangle DAM = \sphericalangle MDA = \frac{3}{2}\alpha - 90°$ und $\sphericalangle AMD = 360° - 3\alpha$. Da auch Dreieck MDC gleichschenklig ist, folgt $\sphericalangle DMC = \alpha$ und $\sphericalangle CDM = \sphericalangle MCD = 90° - \frac{\alpha}{2}$. $\sphericalangle CDW = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\alpha - 90° = \alpha$. Wegen der Symmetrie bezüglich WC gilt auch $\sphericalangle WEC = \alpha$. $\sphericalangle AWB = \sphericalangle DWE = 180° - \alpha$. Wegen der Winkelsumme im Viereck gilt weiter: $\sphericalangle ECD = 360° - \alpha - \alpha - (180° - \alpha) = 180° - \alpha$. Die Gegenwinkel im Viereck WDCE sind also gleich groß, deswegen ist es ein Parallelogramm. (Der vorliegende Beweis setzt $\alpha \geqq 60°$ voraus, für $\alpha < 60°$ verläuft er im Prinzip genauso.)

b) Wegen $ED \parallel AB$ gilt $\sphericalangle EDW = \frac{\alpha}{2}$ (Z-Winkel)

c) EWDC ist eine Raute, da beide Diagonalen Winkelhalbierende sind.

21/38. a) Da Dreieck EDC gleichschenklig ist (Basiswinkel: $90° - \frac{\gamma}{2}$), gilt $\overline{CE} = \overline{CD}$.

b) EM_c ist Mittellinie im Dreieck ABF, halbiert also auch [AF].

c) [BD] liegt symmetrisch zu [EF], also $\overline{BD} = \overline{EF}$. Nach **b)** gilt $\overline{EF} = \overline{AE}$.

$$\overline{CD} = a + \overline{BD} = \frac{2a}{2} + \frac{2\overline{AE}}{2} = \frac{1}{2}(a + a + 2\overline{AE}) = \frac{1}{2}(a + b)$$

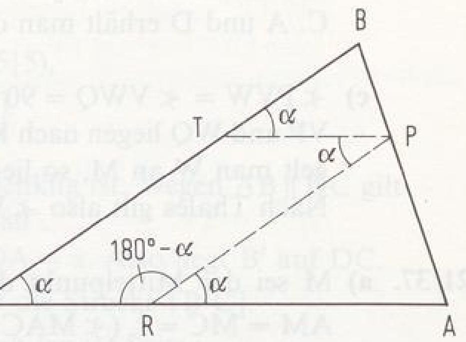
$$\overline{AE} = b - \overline{CD} = b - \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(b - a)$$

d) $\sphericalangle M_cBD = 180° - \beta, \quad \sphericalangle BDM_c = 90° - \frac{\gamma}{2}$

$$\sphericalangle BM_cD = 180° - (180° - \beta) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \beta - 90° + \frac{\gamma}{2} =$$

$$\beta - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha).$$

21/39. Gegeben sei der Winkel $\sphericalangle$ ASB. Gilt $\overline{SA} = \overline{SB} = 8$, so liegen die gesuchten Parallelogrammecken auf]AB[.



$\overline{TB} = \overline{TP}$

$\Rightarrow \sphericalangle TBP = \sphericalangle BPT = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$\overline{RP} = \overline{RA}$

$\Rightarrow \sphericalangle RPA = \sphericalangle PAR = 90° - \frac{\alpha}{2}$

also: $\sphericalangle BPA = \alpha + 2 \cdot \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 180°$.

21/40. **a)** Der geometrische Ort für D entsteht durch Parallelverschiebung des gegebenen Kreises um 4 nach links. Die Endpunkte A′ und B′ der verschobenen Sehne [A′B′] sind auszunehmen.

b) $\triangle$ AMC ist gleichschenklig mit der Spitze M. Da Z die Basis [AC] halbiert, ist [MZ] Höhe im Dreieck AMC.
Also gilt: $\sphericalangle AZM = 90°$. Damit ist der geometrische Ort für Z der Thaleskreis über [AM] ohne Punkt A und Punkt N (Mittelpunkt von [AB]).

Aufgaben zu 1.3

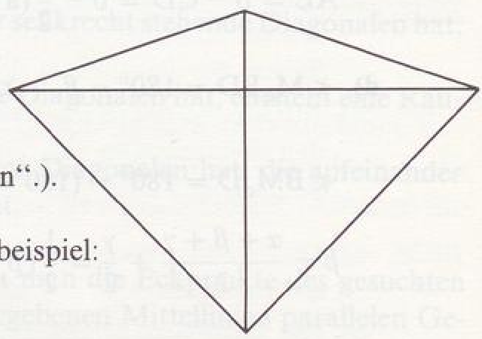
26/1. **a)** $\overline{WA} = \overline{LD}$ **b)** AL ∥ WD **c)** $\sphericalangle A = \sphericalangle L$ **d)** $\sphericalangle A + \sphericalangle W = 180°$
e) $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$ **f)** $\overline{WL} = \overline{AD}$.

26/2. **a)** M(5,8|5,7), B(2,6|5,8) **b)** A(7,6|3,3), M(2,3|1,7) **c)** U(7,8|3,1).

26/3. **a)** $\overline{AR} = \overline{AT}$ **b)** $\overline{RI} = \overline{IT}$ **c)** $\sphericalangle R = \sphericalangle T$
d) $\sphericalangle RAI = \sphericalangle IAT$ **e)** RT ⊥ AI.

26/4. **a)** Raute **b)** Quadrat.

26/5. **a)** T(3|5), **b)** T(5,9|9,2), N(−0,3|3,2),
c) I(2|4), A(5,2|7,1).



27/6. $\overline{LS} = \overline{SA} = \overline{AE} \neq \overline{EL}$ (Man beachte den Unterschied zwischen „haben" und „bestehen".)

27/7. Falsch sind: **b), c), d), e).** Gegenbeispiel:
Richtig sind alle Sätze für die Raute.

27/8. Quadrat. **27/9.** **a)** Raute **b)** Quadrat.

27/10. Parallelogramm. **27/11.** Drachen.

27/12. **a)** Rechteck **b)** Raute **c)** Rechteck **d)** Raute **e)** Quadrat.

27/14. Man konstruiert w_α. $w_\alpha \cap BC = \{G\}$.

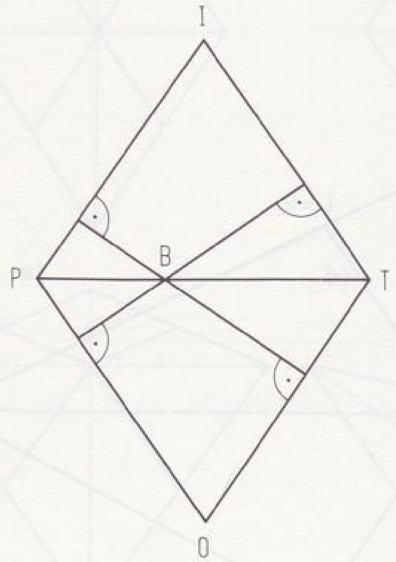
27/15. Die Raute besteht aus 2 gleichseitigen Dreiecken. Eine Diagonale ist so lang wie die Seiten.

28/16. **a)** $I(3|16)$, Drachenviereck, gleichschenkliges Trapez.

b) $U(22|0)$, Windvogel, gleichschenkliges Trapez.

c) $R(0|0)$, Windvogel, Strecke.

28/17. $EB + BF = d(PI; OT)$
(unabhängig von der Lage von B).



28/18. **a)** LB ist parallel zu MN, da MN Mittelparallele ist.

Außerdem gilt: $\overline{LB} = \frac{a-c}{2}$ und $\overline{MN} = \frac{a+c}{2} - \frac{c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$.

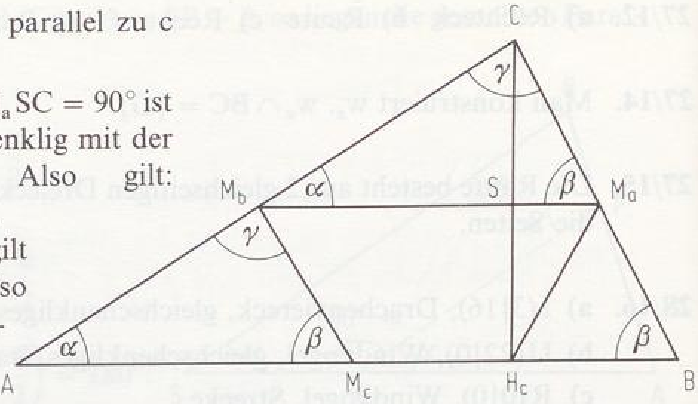
Also ist Viereck LBNM ein Parallelogramm.

b) Der Mittelpunkt Z von [MN] liegt auf der Symmetrieachse g des Trapezes. Fällt man von D aus das Lot auf a (Lotfußpunkt K), so ist KLCD ein Rechteck mit den Symmetrieachsen g und MN, die sich in Z schneiden. Also liegt auch D punktsymmetrisch zu L bezüglich Z, und somit ist LNDM ein Parallelogramm.

c) Aus **b)** folgt $ML \parallel BD$, also ist Viereck LBDM ein Trapez.

28/19. Da das Lot auf die Grundseiten auch Lot der Mittellinie ist, stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Da die Diagonale durch die Schenkelmitten die andere halbiert, ist das Viereck ein Drachenviereck.

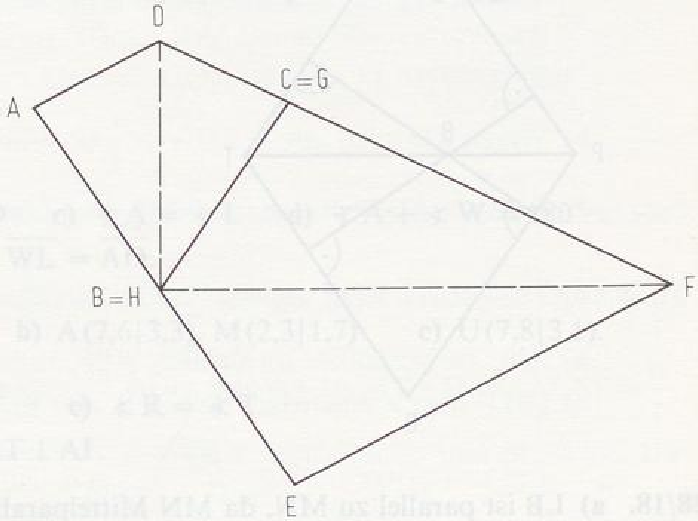
28/20. $M_a M_b$ ist Mittellinie, also parallel zu c und zu $M_c H_c$.
Wegen $\overline{SC} = \overline{SH_c}$ und $\sphericalangle M_a SC = 90°$ ist Dreieck $H_c M_a C$ gleichschenklig mit der Symmetrieachse $M_a S$. Also gilt: $\sphericalangle CM_a S = \sphericalangle SM_a H_c = \beta$.
Wegen der Parallelitäten gilt auch $\sphericalangle M_c M_b M_a = \beta$. Also ist $M_c H_c M_a M_b$ ein gleichschenkliges Trapez.



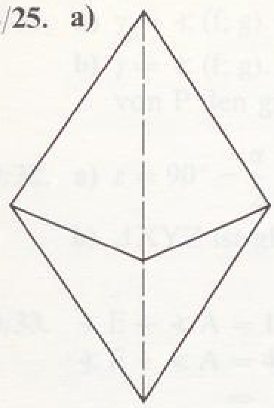
28/22. Wegen $\sphericalangle LBA = \sphericalangle ALB$ ist Dreieck ABL gleichschenklig mit der Symmetrieachse w_α. Also ist L symmetrischer Punkt zu B, und Viereck ABEL ist ein Drachen.

28/23. ΔCDF ist gleichschenklig $\left(\text{Basiswinkel } \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, und ΔDBE ist gleichschenklig $\left(\text{Basiswinkel } \dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)$.

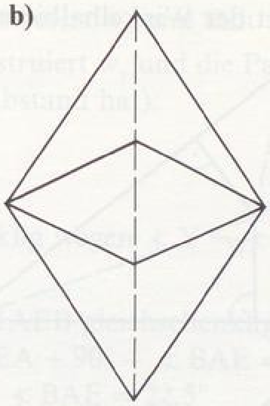
28/24. $\sphericalangle(BD; HF) = 90°$.



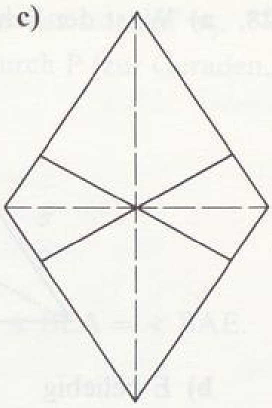
28/25. a)



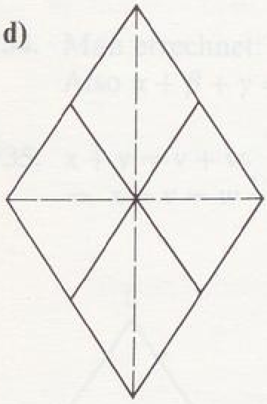
b)



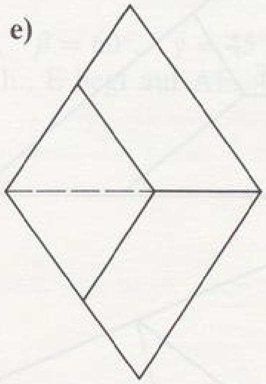
c)



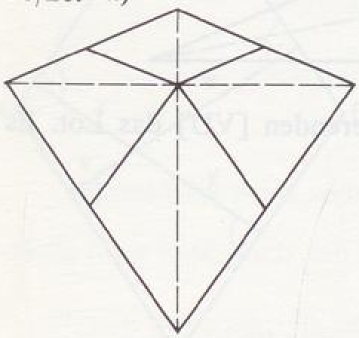
d)



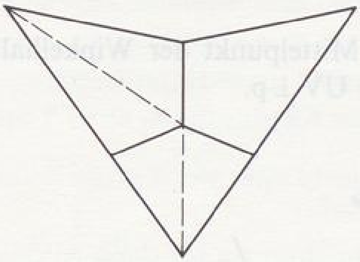
e)



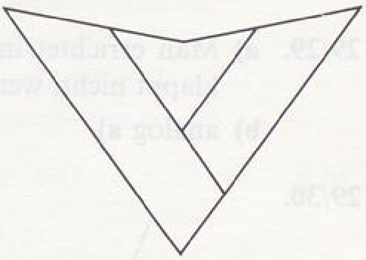
28/26. a)



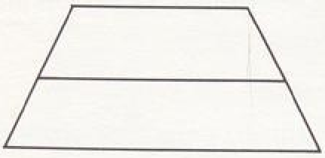
b)



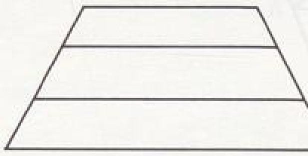
c)



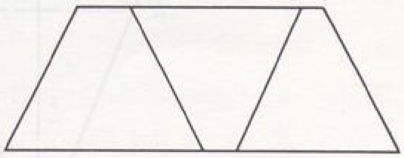
29/27. a)



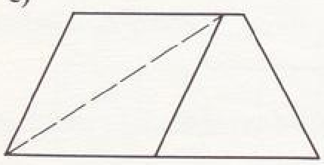
b)



oder

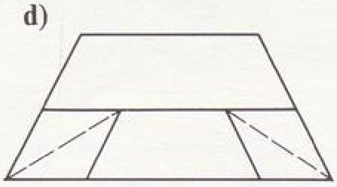


c)

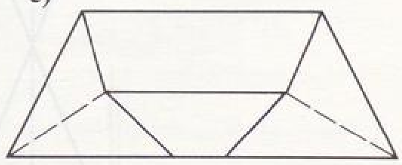


(geht nicht,
wenn $w_\alpha \cap c = \emptyset$)

d)

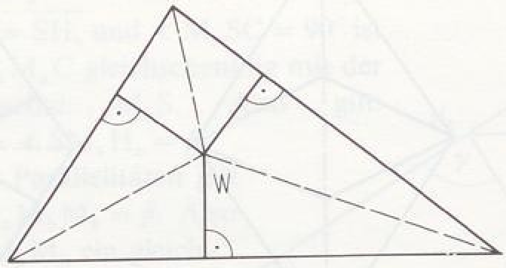


e)

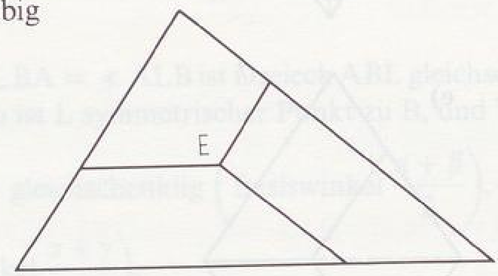


(geht nicht, wenn Basislänge
$\leq 2 \cdot$ Schenkellänge)

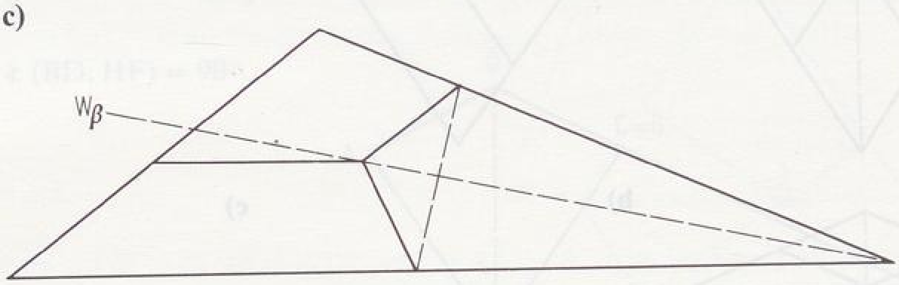
29/28. **a)** W ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.



b) E beliebig



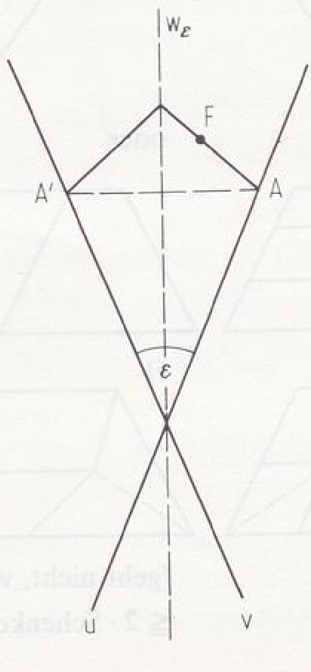
c)



29/29. **a)** Man errichtet im Mittelpunkt der Winkelhalbierenden [VU] das Lot. Es klappt nicht, wenn $UV \perp p$.

b) analog **a)**.

29/30.



29/31. **a)** $\gamma := \sphericalangle(f; g)$. Man konstruiert w_γ und fällt von P aus das Lot auf w_γ.

b) $\gamma := \sphericalangle(f; g)$. Man konstruiert w_γ und die Parallele durch P (zur Geraden, die von P den größeren Abstand hat).

29/32. **a)** $\varepsilon = 90° - \frac{\alpha}{2}$

b) ΔXYZ ist gleichschenklig wegen $\sphericalangle Y = \sphericalangle Z = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

29/33. $\sphericalangle E + \sphericalangle A = 180°$. Da ΔAEB gleichschenklig ist, gilt $\sphericalangle BEA = \sphericalangle BAE$.

$\sphericalangle E + \sphericalangle A = 45° + \sphericalangle BEA + 90° + \sphericalangle BAE = 180°$

$\Rightarrow \sphericalangle BEA = \sphericalangle BAE = 22{,}5°$

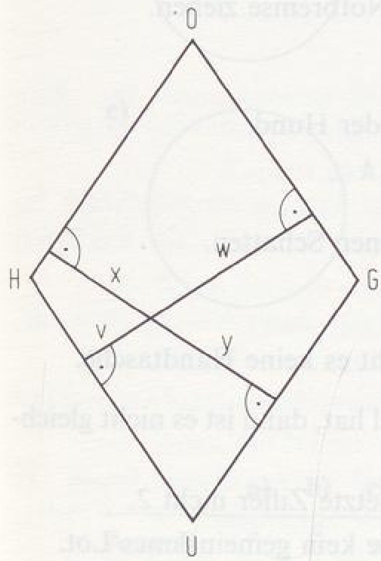
$\sphericalangle A = 112{,}5° = \sphericalangle D, \ \sphericalangle E = 67{,}5° = \sphericalangle F.$

30/34. Man errechnet: $\alpha = 75°, \ \beta = 60°, \ \gamma = 45°$.

Also $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, d.h., E liegt auf AF.

30/35. $x + y = v + w$

$\Rightarrow x - v = w - y.$



2. Kapitel

Aufgaben zu 2.1

36/1. **a)** V: Die Quersumme der Zahl ist 6.
B: Die Zahl ist durch 3 teilbar.
Wenn eine Zahl die Quersumme 6 hat, dann ist die Zahl durch 3 teilbar.

b) V: Das Viereck ist ein Parallelogramm.
B: 2 Winkel des Vierecks sind gleich groß.
Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann sind 2 Winkel gleich groß.

c) V: Das Viereck hat 3 rechte Winkel.
B: Das Viereck ist ein Rechteck.
Wenn ein Viereck 3 rechte Winkel hat, dann ist es ein Rechteck.

d) V: 2 Winkel sind Nebenwinkel.
B: Die Winkel ergänzen sich zu 180°.
Wenn 2 Winkel Nebenwinkel sind, dann ergänzen sie sich zu 180°.

36/2. **a)** V: Eine Gefahr liegt vor.
B: Notbremse ziehen
Wenn eine Gefahr vorliegt, dann soll man die Notbremse ziehen.

b) V: Keine Vorsicht
B: Der Hund beißt.
Wenn du nicht vorsichtig bist, dann beißt dich der Hund.

c) V: Das Wesen ist ein Geist.
B: Das Wesen wirft keinen Schatten.
Wenn ein Wesen ein Geist ist, dann wirft es keinen Schatten.

d) V: Das Wesen ist ein Känguruh.
B: Das Wesen braucht keine Handtasche.
Wenn ein Wesen ein Känguruh ist, dann braucht es keine Handtasche.

36/3. **a)** Wenn ein Dreieck nicht zwei gleich große Winkel hat, dann ist es nicht gleichschenklig.

b) Wenn eine Zahl Quadratzahl ist, dann ist ihre letzte Ziffer nicht 2.

c) Wenn sich 2 Geraden schneiden, dann haben sie kein gemeinsames Lot.

d) Wenn eine Zahl keine Primzahl ist, dann hat sie entweder weniger oder mehr als 2 Teiler.

36/4. **a)** Wenn es nicht hell ist, dann scheint die Sonne nicht.

b) Wenn die Konstruktion genau sein soll, dann mußt du sorgfältig zeichnen.

c) Wenn du im Lotto nicht gewinnst, dann hast du höchstens 2 Richtige.

d) Wenn du eine schlechtere Note als 2 bekommst, dann hast du wenigstens 4 Fehler.

36/5. **a)** Wenn ein Viereck kein Quadrat ist, dann sind seine 4 Winkel nicht gleich groß oder seine vier Seiten nicht gleich lang.

b) Wenn eine Zahl nicht durch 12 teilbar ist, dann ist sie nicht durch 4 oder nicht durch 6 teilbar.

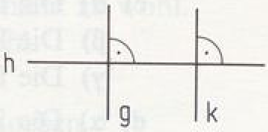
36/6. **a)** Wenn ein Parallelogramm kein Rechteck ist, dann hat es keinen Umkreis und keine 2 gleich große benachbarte Winkel.

b) Wenn eine Zahl nicht durch 37 teilbar ist, dann ist sie nicht durch 111 und nicht durch 74 teilbar.

Aufgaben zu 2.2

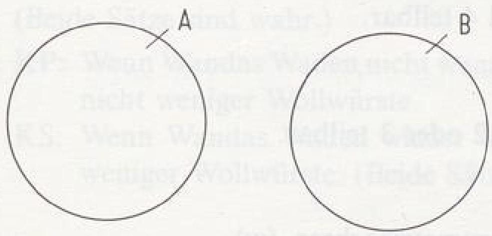
40/1. **a)** falsch, GB: Mancher Schüler. **b)** wahr
c) falsch, GB: Straßenreinigungsdienst besprengt die Straße.
d) wahr **e)** falsch, GB: Eine LP hat 2 Rillen.

40/2. **a)** falsch, GB: 16 **b)** wahr **d)** falsch, GB:

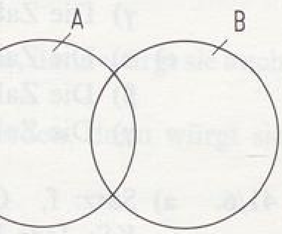


c) wahr

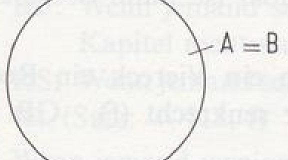
40/3. **a)**



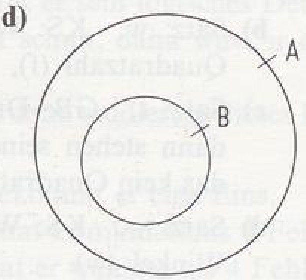
b)



c)



d)



	a)	b)	c)	d)	Gegenbeispiele: a)	b)	c)	d)
$A \Rightarrow B$	f	f	w	f	7	allg. DV		allg. Parallelogramm
$A \Rightarrow \bar{B}$	w	f	f	f		Raute	Raute	Rechteck
$\bar{A} \Rightarrow B$	f	f	f	f	10	Trapez	Rechteck	Trapez
$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$	f	f	w	w	6	Rechteck		
$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	f	f	w	f	7	allg. DV		allg. Parallelogramm
$B \Rightarrow \bar{A}$	w	f	f	f		Raute	Raute	Rechteck
$\bar{B} \Rightarrow A$	f	f	f	f	10	Trapez	Rechteck	Trapez
$B \Rightarrow A$	f	f	w	w	6	Rechteck		

Da jeder Satz mit seiner Kontraposition gleichwertig ist, genügt es, vier dieser acht Sätze zu überprüfen.

41/4. **a)** notwendig **b)** hinreichend **c)** weder notwendig noch hinreichend
d) notwendig und hinreichend

41/5. α) notwendig β) hinreichend γ) notwendig und hinreichend

a) α) Das Viereck hat einen 90°-Winkel.
β) Das Viereck ist ein Rechteck, dessen Seiten jeweils die Länge 2 haben.
γ) Das Viereck ist ein Rechteck mit gleich langen Seiten.

b) α) Die Differenz zweier Seiten ist kleiner als 1.
β) Das Dreieck hat zwei 45°-Winkel.
γ) Das Dreieck besitzt eine Symmetrieachse.

c) α) Die Dreiecke stimmen jeweils in den Winkeln überein.
β) Die Dreiecke liegen symmetrisch bezüglich einer Achse.
γ) Die Dreiecke stimmen jeweils in den Seitenlängen überein.

d) α) Die Zahl ist durch 2 teilbar.
β) Die Zahl ist durch 3, 4 und 5 teilbar.
γ) Die Zahl ist durch 3 und 4 teilbar.

e) α) Die Zahl heißt nicht 24.
β) Die Zahl ist Primzahl.
γ) Die Zahl ist nicht durch 2 oder 3 teilbar.

41/6. **a)** Satz: f, GB: Rechteck,
KS: Jede Raute hat zwei Symmetrieachsen (w).

b) Satz: w, KS: Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie eine gerade Quadratzahl (f), GB: 20.

c) Satz: f, GB: Drachenviereck, KS: Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann stehen seine Diagonalen aufeinander senkrecht (f), GB: Rechteck, das kein Quadrat ist.

d) Satz: w, KS: Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann hat es zwei 60°-Winkel (w).

e) Satz: f, GB: gleichseitiges Dreieck, KS: Jedes rechtwinklige Dreieck hat einen Umkreis (w).

f) Satz: w, KS: Wenn 2 Dreiecke kongruent sind, dann liegen sie punktsymmetrisch (f), GB: Achsensymmetrische Dreiecke.

41/7. **a)** KP: Wenn es nicht donnert, dann hat es nicht geblitzt.
KS: Wenn es donnert, dann hat es geblitzt.
(Beide Sätze sind wahr.)

b) KP: Wenn man sich nicht erholt hat, war man nicht im Urlaub.
KS: Wenn man sich erholt hat, war man im Urlaub.
(Beide Sätze sind falsch.)

c) KP: Wenn die Wellen nicht hochgehen, dann fegt kein Sturm übers Wasser.
KS: Wenn die Wellen hochgehen, dann fegt der Sturm übers Wasser.
(Satz wahr, KS falsch)

d) KP: Wenn man nicht im Lotto gewinnt, dann hat man kein Glück.
KS: Wenn man im Lotto gewinnt, dann hat man Glück.
(Satz falsch, KS wahr)

e) KP: Wenn man vorn und hinten nicht vertauscht sieht, dann schaut man nicht in den Spiegel.
KS: Wenn man vorn und hinten vertauscht sieht, dann schaut man in den Spiegel. (Satz und KS wahr)

f) KP: Wenn einer nichts erzählen kann, dann war er nicht auf Reisen.
KS: Wenn einer was erzählen kann, dann war er auf Reisen.
(Satz wahr, KS falsch)

g) KP: Wenn sich ein Dritter nicht freut, haben zwei andere sich nicht gestritten.
KS: Wenn sich ein Dritter freut, haben zwei andere sich gestritten.
(Satz und KS falsch)

h) KP: Wenn der Esel nicht aufs Eis geht, dann ist es ihm nicht zu wohl.
KS: Wenn der Esel aufs Eis geht, dann ist es ihm zu wohl.
(Satz und KS falsch)

i) KP: Wenn sie heute nicht mehr leben, dann sind sie gestorben.
KS: Wenn sie heute noch leben, dann sind sie nicht gestorben.
(Beide Sätze sind wahr.)

j) KP: Wenn Wandas Waden nicht weniger wulstig werden, dann würgt sie auch nicht weniger Wollwürste.
KS: Wenn Wandas Waden wieder weniger wulstig werden, dann würgt sie weniger Wollwürste. (Beide Sätze sind falsch.)

42/8. a) Wenn jemand dieses Kapitel studiert, dann schult er sein logisches Denken.
KP: Wenn jemand sein logisches Denken nicht schult, dann wird er dieses Kapitel nicht studieren.
KS: Wenn jemand sein logisches Denken schult, dann studiert er dieses Kapitel. (Satz: w, KS; f)

b) Wenn jemand weniger als 4 Fehler hat, dann bekommt er eine Eins.
KP: Wenn jemand keine Eins bekommt, dann hat er mindestens 4 Fehler.
KS: Wenn jemand eine Eins bekommt, dann hat er weniger als 4 Fehler.
(Satz: w, KS: w)

c) Wenn die Nacht klar ist, dann sind die Sterne sichtbar.
KP: Wenn die Sterne nicht sichtbar sind, dann ist die Nacht nicht klar.
KS: Wenn die Sterne sichtbar sind, dann ist die Nacht klar.
(Satz: w, KS: w)

d) Wenn Hunde bellen, dann beißen sie nicht.
KP: Wenn Hunde beißen, dann bellen sie nicht.
KS: Wenn Hunde nicht beißen, dann bellen sie.
(Satz: w, KS: f)

e) Wenn man sich liebt, dann neckt man sich.
KP: Wenn man sich nicht neckt, dann liebt man sich nicht.
KS: Wenn man sich neckt, dann liebt man sich.
(Satz: w, KS: f)

f) Wenn irgendwo eine Lichtquelle ist, dann sieht man einen Schatten.
KP: Wenn man keinen Schatten sieht, dann ist nirgends eine Lichtquelle.
KS: Wenn man Schatten sieht, dann ist irgendwo eine Lichtquelle.
(Satz: f, KS: w)

g) Wenn du nicht fleißig bist, dann bekommst du keinen Preis.
KP: Wenn du einen Preis bekommst, dann warst du fleißig.
KS: Wenn du keinen Preis bekommst, dann warst du nicht fleißig.
(Satz: f, KS: f)

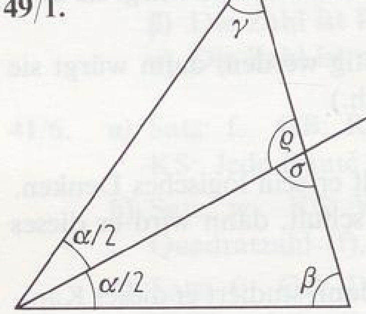
42/9. a) E, 5 b) N, 8
c) Wenn auf einer Kartenseite ein Vokal steht, dann steht auf der anderen Seite eine ungerade Zahl.

42/10. a) Evas Vorwurf erfolgt zu Unrecht; sie verwechselt „wenn–dann" mit „genau dann–wenn".
b) Auch Tino verwechselt „wenn–dann" mit „genau dann–wenn".

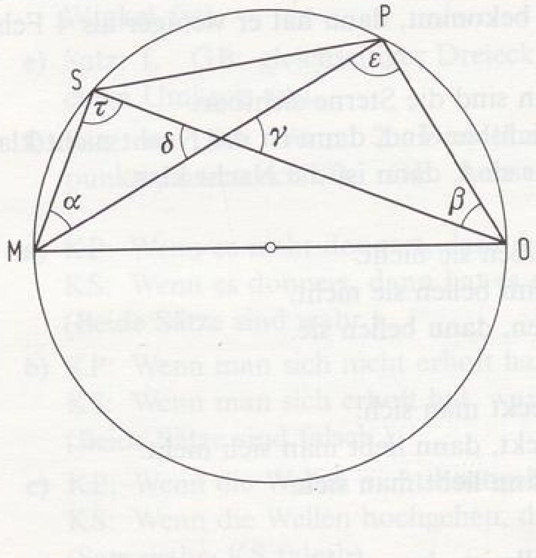
Aufgaben zu 2.3

Beweise durch Nachrechnen

49/1. $|\varrho - \sigma| = \left|180° - \left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) - 180° + \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\right| = |\beta - \gamma|$



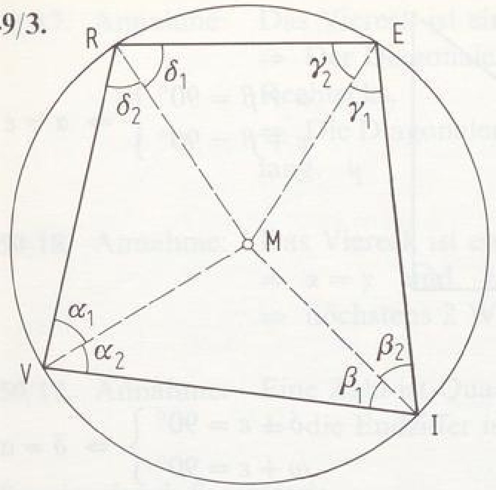
49/2.



$\tau = \varepsilon = 90°$ (Thales)
$\delta = \gamma$ (Scheitelwinkel)
$\Rightarrow \alpha = \beta$ (Winkelsumme im Dreieck)

49/3. Aus der Gleichschenkligkeit der Dreiecke folgt:

$\alpha_2 = \beta_1, \quad \beta_2 = \gamma_1, \quad \gamma_2 = \delta_1, \quad \delta_2 = \alpha_1$



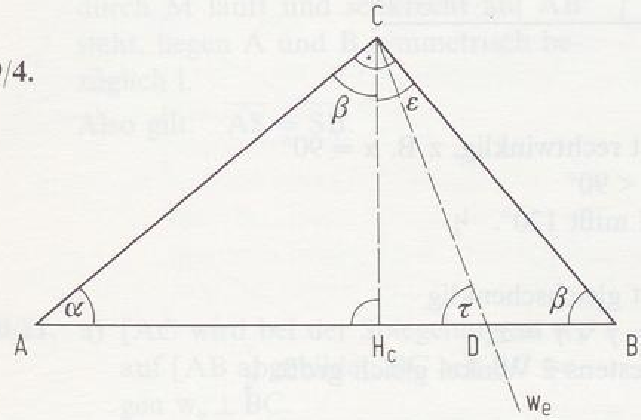
(Falls M außerhalb des Sehnenvierecks liegt, verläuft der Beweis ähnlich, Differenz bilden!)

Wegen $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 = 360°$

gilt also: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_2 + \alpha_1 = 360°$

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 180°.$

49/4.



$\sphericalangle\, ACD = \beta + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\tau = \beta + \dfrac{\varepsilon}{2}$ (Außenwinkel)

$\Rightarrow \triangle ADC$ ist gleichschenklig.

49/5. Mit $a = \overline{AB}$ gilt: $A_{\text{Quadrat}} = a^2$

$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 5a = 7{,}5\,a^2.$

49/6. Die Parallele zu a durch D schneide b in E.

$\sphericalangle\, CDE = \sphericalangle\, DCB = \beta$ (Z-Winkel)

$\sphericalangle\, EDA = \sphericalangle\, CBA = \beta$ (Stufenwinkel)

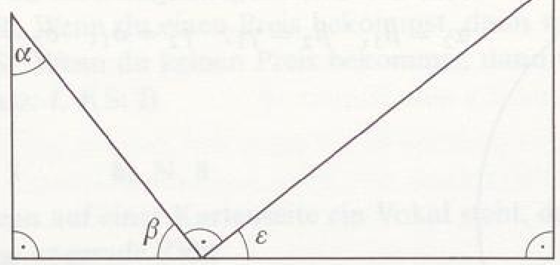
49/7. Die Ziffernfolge der Zahl sei $\ldots\, wxyz = \ldots + 1000\,w + 100\,x + 10\,y + z$, wobei $10\,y + z$ durch 4 teilbar ist.
Da die Stufenzahlen 100, 1000, ... durch 4 teilbar sind, ist auch die Zahl durch 4 teilbar.

49/8. $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1, \quad (n \geqq 1)$

50/9. $(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = 3\underbrace{n\,(n+1)}_{\text{gerade Zahl}} + 1$

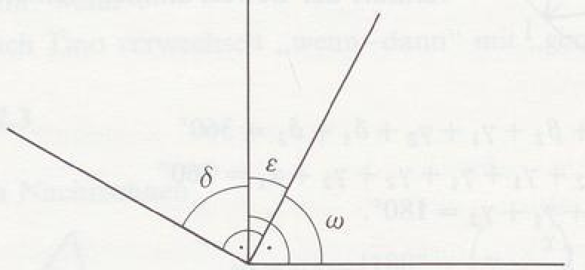
50/10. $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4\underbrace{n\,(n+1)}_{\text{gerade Zahl}} + 1 = 8k + 1$

50/11. a)



$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = 90^\circ \\ \varepsilon + \beta = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \varepsilon$$

b)



$$\left.\begin{array}{l}\delta + \varepsilon = 90^\circ \\ \omega + \varepsilon = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \omega$$

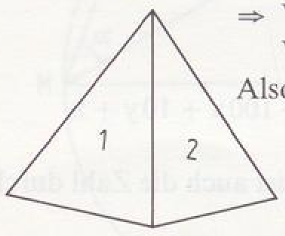
Beweise durch Widerspruch

50/12. Annahme: Das Dreieck ist rechtwinklig, z. B. $\alpha = 90^\circ$
$\Rightarrow \beta < 90^\circ \wedge \gamma < 90^\circ$
$\Rightarrow$ kein Winkel mißt 120°. ↯

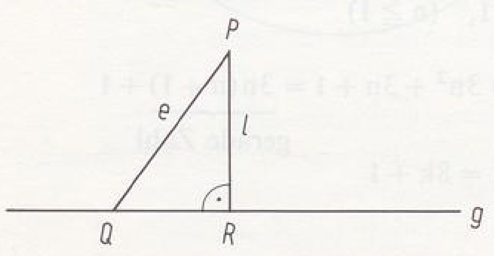
50/13. Annahme: Das Dreieck ist gleichschenklig
$\Rightarrow \alpha = \beta \vee \beta = \gamma \vee \gamma = \alpha$
also sind mindestens 2 Winkel gleich groß. ↯

50/14. Annahme: ABCD ist ein Parallelogramm
$\Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$ (E-Winkel)
also kann nicht gelten: $\alpha + \beta = 179^\circ$. ↯

50/15. Annahme: Die beiden Teildreiecke eines Dreiecks sind spitzwinklig.
$\Rightarrow$ Wenn man beide Teildreiecke zusammensetzt, so ergibt sich ein Winkel, der kleiner als 180° ist.
Also sind die Dreiecke nicht Teildreiecke eines Dreiecks. ↯



50/16. Annahme: $e > l$



$\Rightarrow$ e ist Hypotenuse im Dreieck PQR,
also ist e nicht Lot auf g. ↯

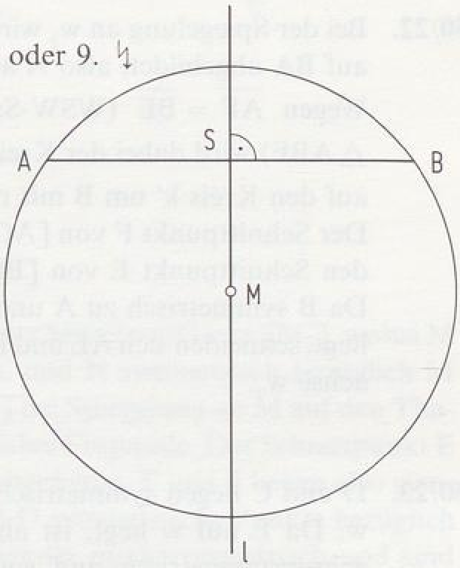
50/17. Annahme: Das Viereck ist ein Rechteck.
$\Rightarrow$ Der Diagonalenschnittpunkt ist Mittelpunkt des Umkreises des Rechtecks.
$\Rightarrow$ Die Diagonalen sind Durchmesser desselben Kreises, also gleich lang. ↯

50/18. Annahme: Das Viereck ist ein Parallelogramm
$\Rightarrow \alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$
$\Rightarrow$ höchstens 2 Winkel sind verschieden groß. ↯

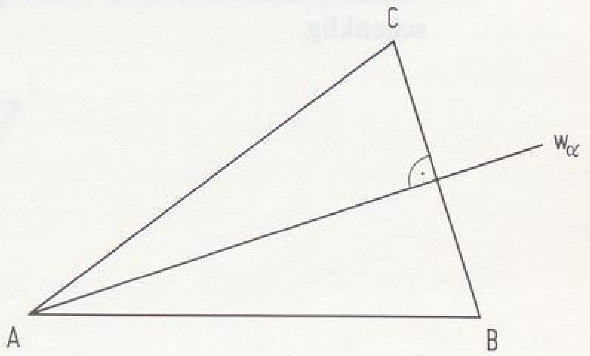
50/19. Annahme: Eine Zahl ist Quadratzahl
$\Rightarrow$ die Endziffer ist 0, 1, 4, 5, 6 oder 9. ↯

Beweise durch Symmetrie

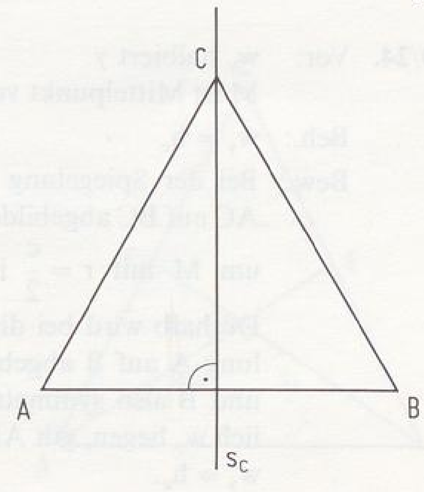
50/20. Wegen $\overline{AM} = \overline{MB}$ ist $\triangle AMB$ gleichschenklig mit der Basis [AB]. Da l durch M läuft und senkrecht auf AB steht, liegen A und B symmetrisch bezüglich l.
Also gilt: $\overline{AS} = \overline{SB}$.



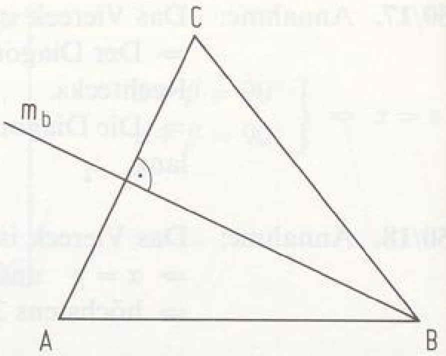
50/21. a) [AC wird bei der Spiegelung an w_α auf [AB abgebildet, BC auf BC wegen $w_\alpha \perp BC$.
Der Schnittpunkt von [AC und BC, also C, wird auf den Schnittpunkt von AB und BC, nämlich B abgebildet.
Also ist $\triangle ABC$ achsensymmetrisch und damit gleichschenklig.



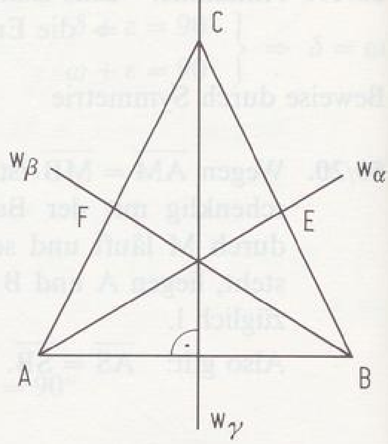
b) Wegen $s_c = h_c$ wird [AB] von s_c senkrecht halbiert. Da außerdem C auf s_c liegt, ist $\triangle ABC$ achsensymmetrisch, also gleichschenklig.



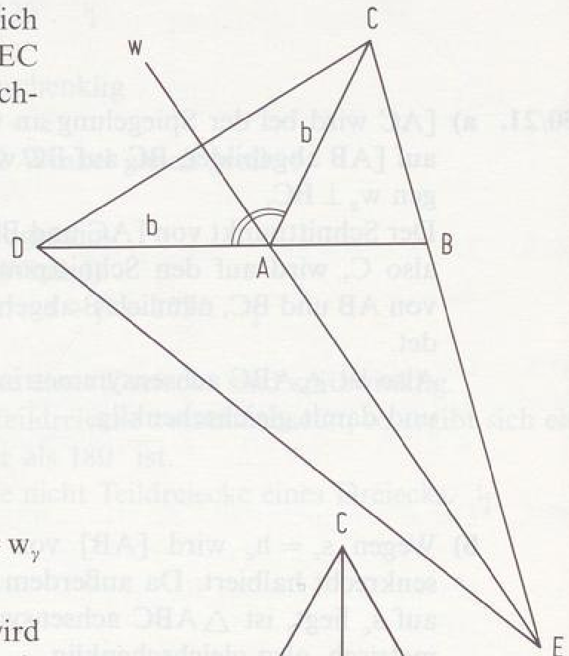
c) Wegen $m_b = h_b$ wird $[AC]$ von m_b senkrecht halbiert. Da außerdem B auf m_b liegt, ist $\triangle ABC$ achsensymmetrisch, also gleichschenklig.



50/22. Bei der Spiegelung an w_γ wird AC auf BC und AB auf BA abgebildet, also A auf B.
Wegen $\overline{AF} = \overline{BE}$ (WSW-Satz für $\triangle ABF$ und $\triangle ABE$) wird dabei der Kreis k um A mit $r = \overline{AF}$ auf den Kreis k' um B mit $r' = \overline{BE}$ abgebildet.
Der Schnittpunkt F von $[AC]$ und k wird also auf den Schnittpunkt E von $[BC]$ und k' abgebildet.
Da B symmetrisch zu A und E symmetrisch zu F liegt, schneiden sich AE und BF auf der Symmetrieachse w_γ.



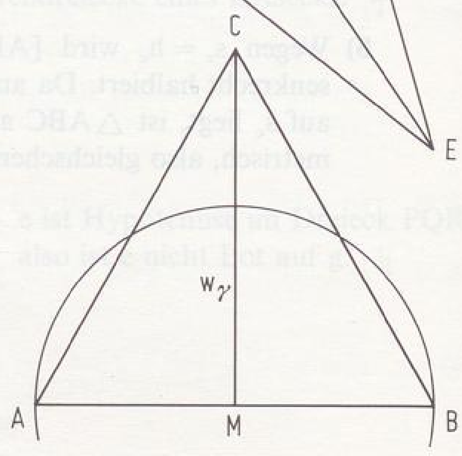
50/23. D und C liegen symmetrisch bezüglich w. Da E auf w liegt, ist also $\triangle DEC$ achsensymmetrisch und somit gleichschenklig.



50/24. Vor.: w_γ halbiert γ
M ist Mittelpunkt von c, $M \in w_\gamma$

Beh.: $w_\gamma = h_c$

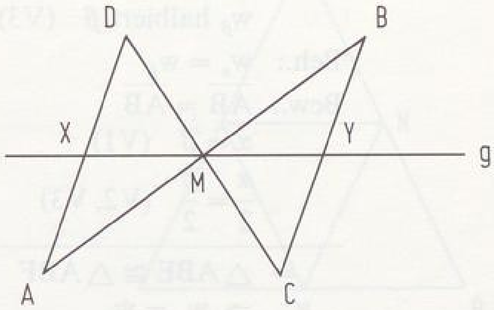
Bew.: Bei der Spiegelung an w_γ wird AC auf BC abgebildet, der Kreis um M mit $r = \frac{c}{2}$ ist Fixkreis.
Deshalb wird bei dieser Spiegelung A auf B abgebildet. Da A und B also symmetrisch bezüglich w_γ liegen, gilt $AB \perp w_\gamma$, d.h. $w_\gamma = h_c$.



51/25. Vor.: $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\overline{CM} = \overline{MD}$, $M \in g$
$g \cap AD = \{X\}$, $g \cap BC = \{Y\}$

Beh.: $\triangle MCY \cong \triangle MDX$

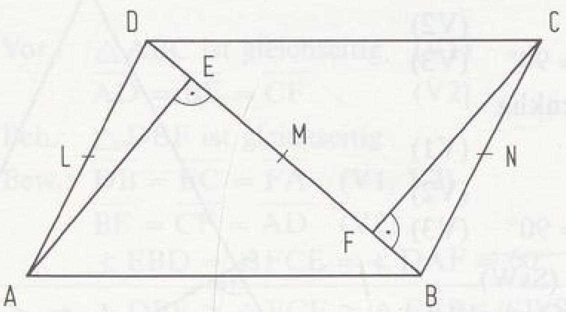
Bew.: ACBD ist ein Parallelogramm, also gilt AD$\|$BC. [XY] ist Querstrecke von AD und BC durch M, also folgt: $\overline{XM} = \overline{MY}$. Deshalb sind D und C bzw. X und Y symmetrische Punkte bezüglich M. Die Dreiecke MDX und MCY sind also punktsymmetrisch und damit kongruent.



51/26. Vor.: ABCD ist ein Parallelogramm
$AE \perp BD$, $CF \perp BD$

Beh.: $\overline{ED} = \overline{FB}$

Bew.: Es sei L der Mittelpunkt von [AD], N der Mittelpunkt von [BC], wobei M der Diagonalenschnittpunkt ist. Da L und N symmetrisch bezüglich M liegen, wird der Thaleskreis über [AD] bei Spiegelung an M auf den Thaleskreis über [BC] abgebildet; DB ist dabei Fixgerade. Der Schnittpunkt E wird bei dieser Spiegelung also auf F abgebildet. E und F liegen also symmetrisch bezüglich M. Da auch B und D symmetrische Punkte bezüglich M sind, liegen [ED] und [FB] zueinander punktsymmetrisch und sind gleich lang.



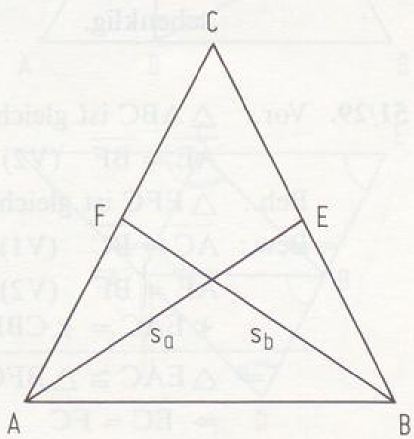
Beweise durch Kongruenz

51/27. a) Vor.: $\overline{AC} = \overline{BC}$, also $\alpha = \beta$ (V1)
F halbiert b (V2)
E halbiert a (V3)

Beh.: $s_a = s_b$

Bew.: $\overline{AB} = \overline{AB}$
$\alpha = B$ (V1)
$\overline{BE} = \overline{AF}$ (V2, V3)

$\Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ABF$ (SWS)
$\Rightarrow s_a = s_b$

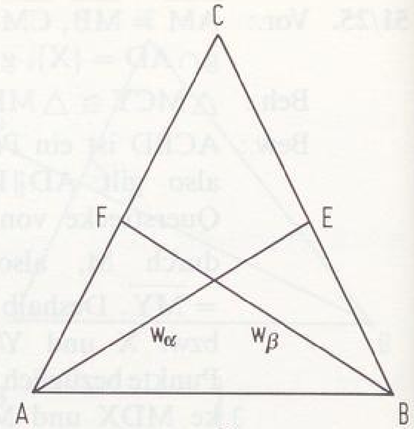


b) Vor.: $\overline{AC} = \overline{BC}$, also $\alpha = \beta$ (V1)
w_α halbiert α (V2)
w_β halbiert β (V3)

Beh.: $w_\alpha = w_\beta$

Bew.: $\overline{AB} = \overline{AB}$
$\alpha = \beta$ (V1)
$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$ (V2, V3)

$\Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ABF$ (WSW)
$\Rightarrow w_\alpha = w_\beta$

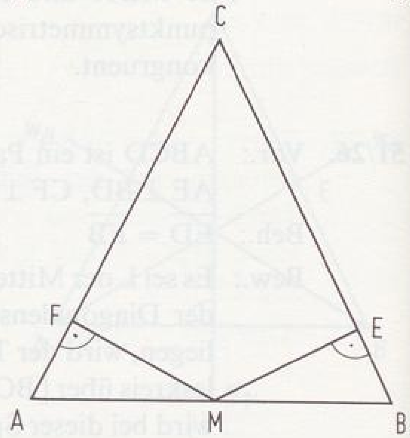


c) Vor.: $\alpha = \beta$ (V1)
$\overline{AM} = \overline{MB}$ (V2)
$\sphericalangle AFM = \sphericalangle MEB = 90°$ (V3)

Beh.: $\overline{ME} = \overline{MF}$

Bew.: $\alpha = \beta$ (V1)
$\overline{AM} = \overline{MB}$ (V2)
$\sphericalangle AFM = \sphericalangle MEB = 90°$ (V3)

$\Rightarrow \triangle AMF \cong \triangle MBE$ (SWW)
$\Rightarrow \overline{ME} = \overline{MF}$



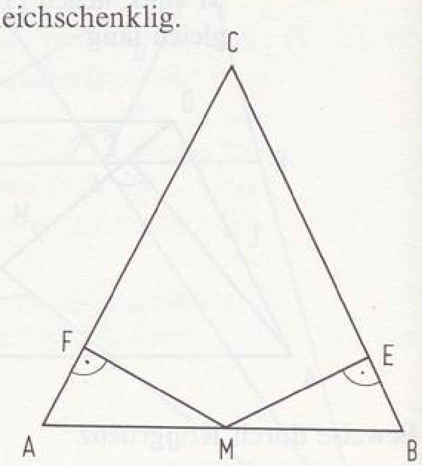
51/28. Wenn in einem Dreieck die Lote von einer Seitenmitte auf die beiden anderen Seiten gleich lang sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

Vor.: M halbiert [AB] (V1)
$\overline{ME} = \overline{MF}$ (V2)
$\sphericalangle AFM = \sphericalangle MEB = 90°$ (V3)

Beh.: $\triangle ABC$ ist gleichschenklig

Bew.: $\overline{AM} = \overline{MB}$ (V1)
$\overline{ME} = \overline{MF}$ (V2)
$\sphericalangle AFM = \sphericalangle MEB = 90°$ (V3)

$\Rightarrow \triangle AMF \cong \triangle MBE$ (SsW)
$\Rightarrow \alpha = \beta$, d.h. $\triangle ABC$ ist gleichschenklig.

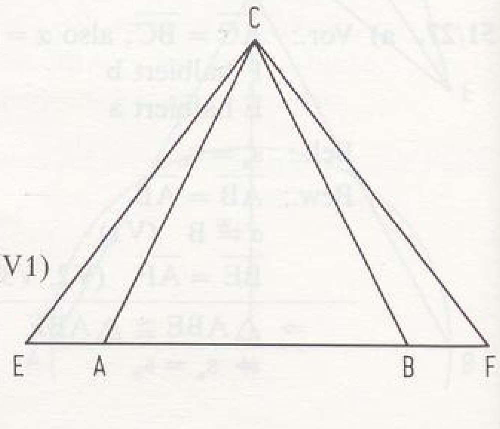


51/29. Vor.: $\triangle ABC$ ist gleichschenklig (V1)
$\overline{AE} = \overline{BF}$ (V2)

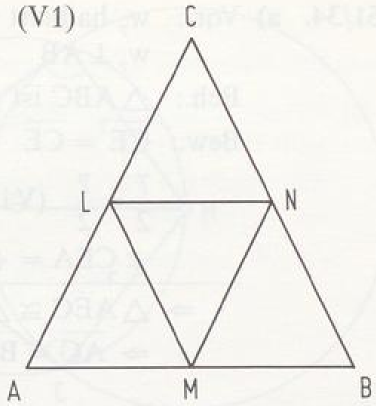
Beh.: $\triangle EFC$ ist gleichschenklig

Bew.: $\overline{AC} = \overline{BC}$ (V1)
$\overline{AE} = \overline{BF}$ (V2)
$\sphericalangle EAC = \sphericalangle CBF$ $(= 180° - \alpha)$ (V1)

$\Rightarrow \triangle EAC \cong \triangle BFC$ (SWS)
$\Rightarrow \overline{EC} = \overline{FC}$



51/30. Vor.: $\triangle ABC$ ist gleichschenklig, d.h. $\overline{AC} = \overline{BC}$ (V1)
L, M, N sind Seitenmitten (V2)

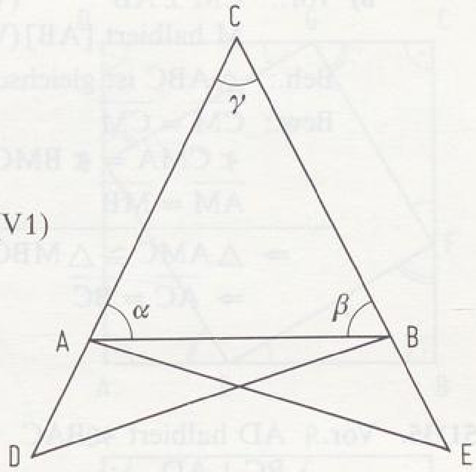


Beh.: $\triangle LMN$ ist gleichschenklig

Bew.: $\overline{AM} = \overline{MB}$ (V2)
$\overline{AL} = \overline{BN}$ (V2)
$\alpha = \beta$ (V1)

$\Rightarrow \triangle AML \cong \triangle MBN$ (SWS)
$\Rightarrow \overline{LM} = \overline{NM}$, d.h. $\triangle LMN$ ist gleichschenklig.

51/31. **a)** Vor.: $\overline{AC} = \overline{BC}$, d.h. $\alpha = \beta$ (V1)
$\overline{AD} = \overline{BE}$ (V2)



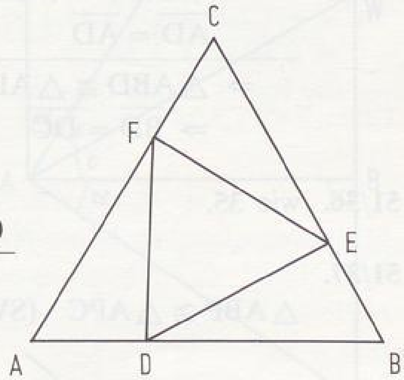
Beh.: $\overline{AE} = \overline{BD}$

Bew.: $\overline{AD} = \overline{BE}$ (V2)
$\overline{AB} = \overline{AB}$
$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE = 180° - \alpha$ (V1)

$\Rightarrow \triangle ADB \cong \triangle AEB$ (SWS)
$\Rightarrow \overline{AE} = \overline{BD}$

b) Da $\triangle DEC$ wegen $\overline{DC} = \overline{EC}$ gleichschenklig ist, folgt $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CED = (180° - \gamma) : 2 = \alpha$. $\Rightarrow \sphericalangle EDC = \sphericalangle BAC = \alpha \Rightarrow DE \| AB$

51/32. Vor.: $\triangle ABC$ ist gleichseitig (V1)
$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ (V2)

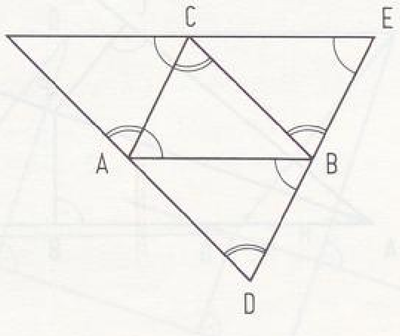


Beh.: $\triangle DEF$ ist gleichseitig

Bew.: $\overline{DB} = \overline{EC} = \overline{FA}$ (V1, V2)
$\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{AD}$ (V2)
$\sphericalangle EBD = \sphericalangle FCE = \sphericalangle DAF = 60°$ (V1)

$\Rightarrow \triangle DBE \cong \triangle ECF \cong \triangle FAB$ (SWS)
$\Rightarrow \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FD}$

51/33. Es entstehen 3 Parallelogramme.
Die Dreiecke sind z.B. wegen des SSS-Satzes kongruent.



51/34. a) Vor.: w_γ halbiert γ (V1)

$w_\gamma \perp AB$ (V2)

Beh.: $\triangle ABC$ ist gleichschenklig

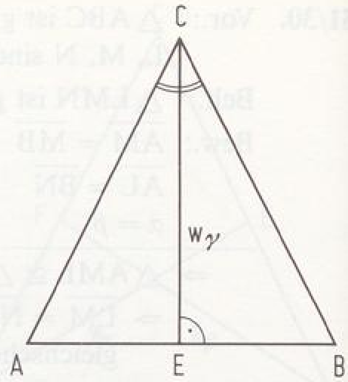
Bew.: $\overline{CE} = \overline{CE}$

$\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$ (V1)

$\sphericalangle CEA = \sphericalangle BEC = 90°$ (V2)

$\Rightarrow \triangle AEC \cong \triangle EBC$ (WSW)

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC}$



b) Vor.: $\overline{CM} \perp \overline{AB}$ (V1)

M halbiert [AB] (V2)

Beh.: $\triangle ABC$ ist gleichschenklig

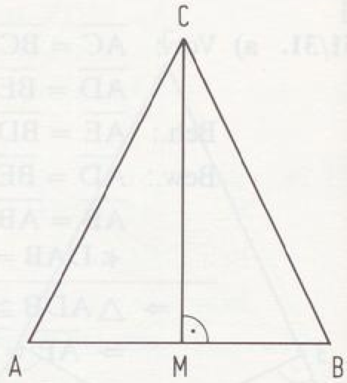
Bew.: $\overline{CM} = \overline{CM}$

$\sphericalangle CMA = \sphericalangle BMC = 90°$ (V1)

$\overline{AM} = \overline{MB}$ (V2)

$\Rightarrow \triangle AMC \cong \triangle MBC$ (SWS)

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{BC}$



51/35. Vor.: AD halbiert $\sphericalangle BAC$ (V1)

$BC \perp AD$ (V2)

Beh.: $\overline{CD} = \overline{DB}$

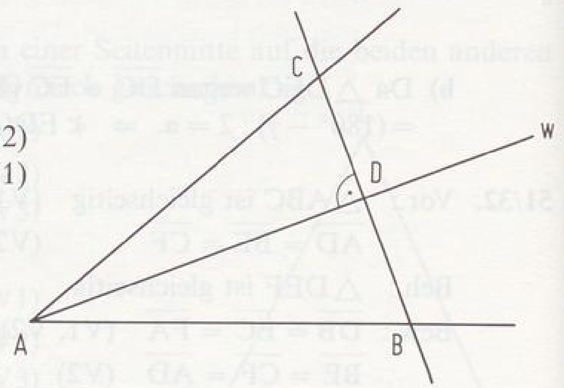
Bew.: $\sphericalangle CDA = \sphericalangle ADB = 90°$ (V2)

$\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAD$ (V1)

$\overline{AD} = \overline{AD}$

$\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ADC$ (WSW)

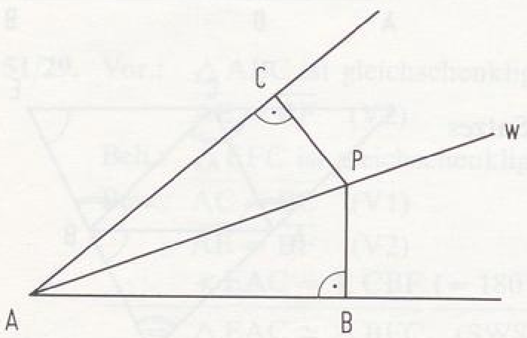
$\Rightarrow \overline{BD} = \overline{DC}$



51/36. wie 35.

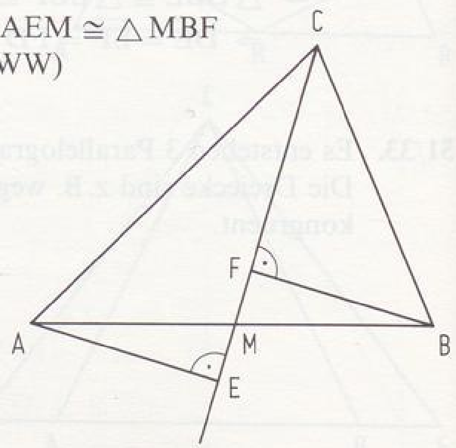
51/37.

$\triangle ABP \cong \triangle APC$ (SWW)

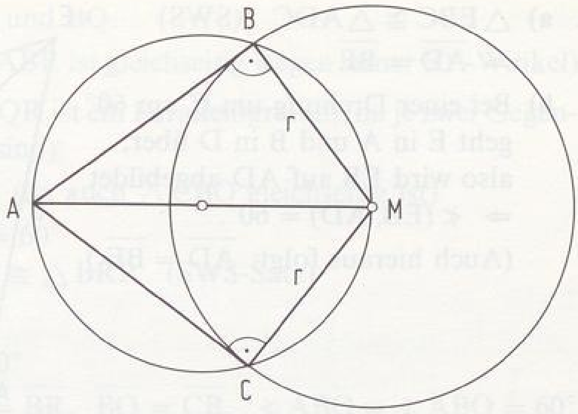


51/38.

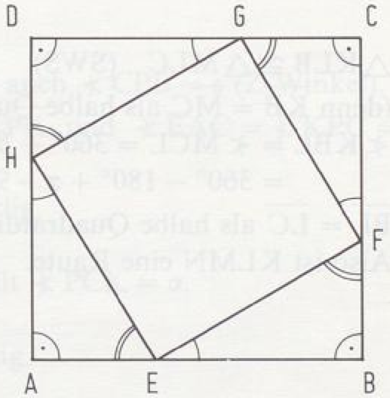
$\triangle AEM \cong \triangle MBF$ (SWW)



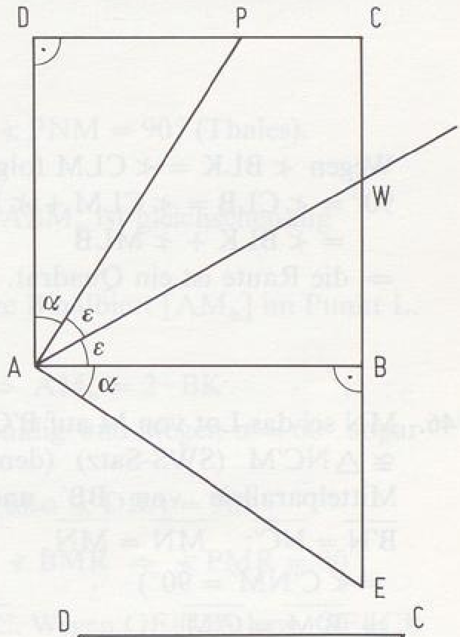
51/39. $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (SWS)
$\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (SWS)
$\triangle AED \cong \triangle BCE$ (SWW)



52/40.
$\triangle ACM \cong \triangle AMB$ (SsW)

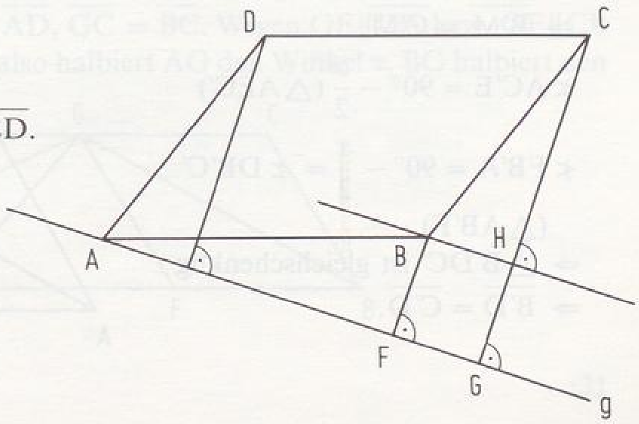


52/41.
$\triangle EBF \cong \triangle FCG \cong \triangle GHD \cong \triangle HAE$
(SWS)
Wegen $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$ ist EFGH eine Raute.
Wegen $\sphericalangle BEF + \sphericalangle EFB = 90°$ folgt
$\sphericalangle FEH = 90° \Rightarrow$ Die Raute ist ein Quadrat.



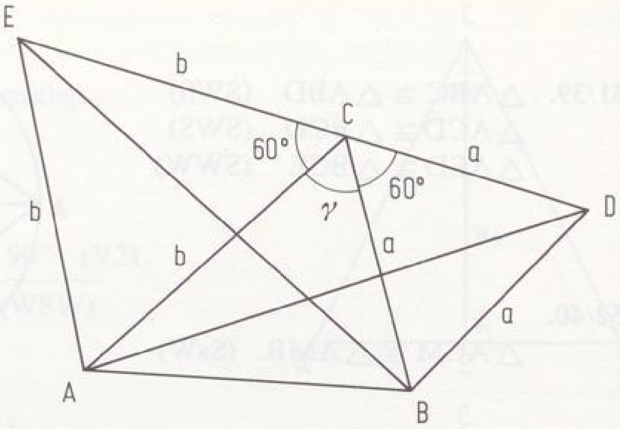
52/42. **a)**
b) $\triangle APD \cong \triangle AEB$ (SWS)
$\Rightarrow \sphericalangle PAD = \sphericalangle EAB$, also $\sphericalangle PAE = 90°$
c) $\alpha = \sphericalangle PAD = \sphericalangle EAB$
$\Rightarrow \sphericalangle EAW = 90° - \varepsilon$
$\sphericalangle AWB = \sphericalangle AWE = 90° - \varepsilon$
$\Rightarrow \triangle AWE$ ist gleichschenklig $\Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{AE} = \overline{WE}$
d) $\overline{AP} = \overline{AE} = \overline{EW} = \overline{EB} + \overline{BW} =$
$= \overline{PD} + \overline{BW}$

52/43. BH sei das Lot von B auf CG.
$\triangle AED \cong \triangle BHC$ (SWW)
$\Rightarrow \overline{ED} = \overline{HC}$
Da FGHB ein Rechteck ist,
folgt $\overline{FB} = \overline{GH}$.
$\Rightarrow \overline{GC} = \overline{GH} + \overline{HC} = \overline{BF} + \overline{ED}$.



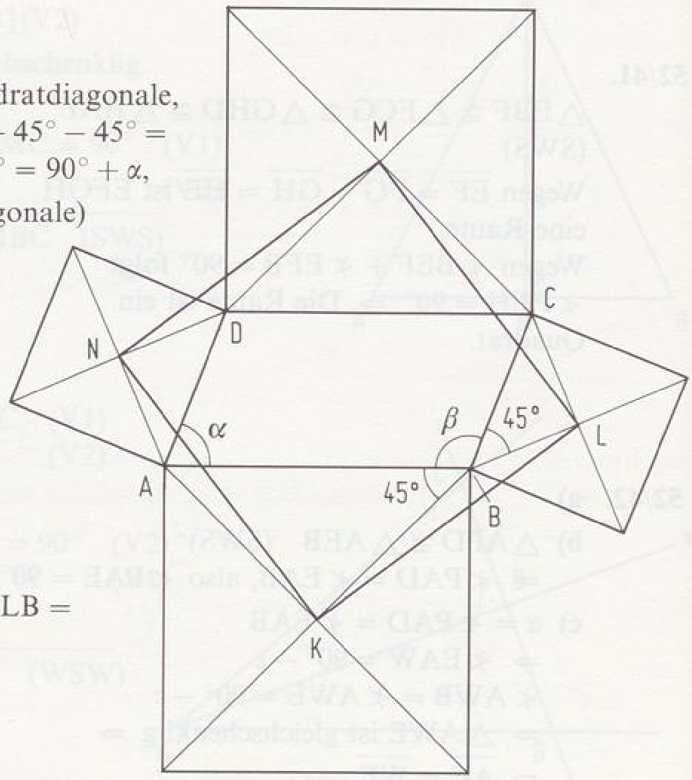
52/44. **a)** $\triangle EBC \cong \triangle ADC$ (SWS)
$\Rightarrow \overline{AD} = \overline{BE}$

b) Bei einer Drehung um C um 60°
geht E in A und B in D über,
also wird EB auf AD abgebildet
$\Rightarrow \sphericalangle(EB, AD) = 60°$.
(Auch hieraus folgt: $\overline{AD} = \overline{BE}$.)



52/45.

$\triangle KLB \cong \triangle MLC$ (SWS)
(denn $\overline{KB} = \overline{MC}$ als halbe Quadratdiagonale,
$\sphericalangle KBL = \sphericalangle MCL = 360° - \beta - 45° - 45° =$
$= 360° - 180° + \alpha - 90° = 90° + \alpha$,
$\overline{BL} = \overline{LC}$ als halbe Quadratdiagonale)
Also ist KLMN eine Raute.



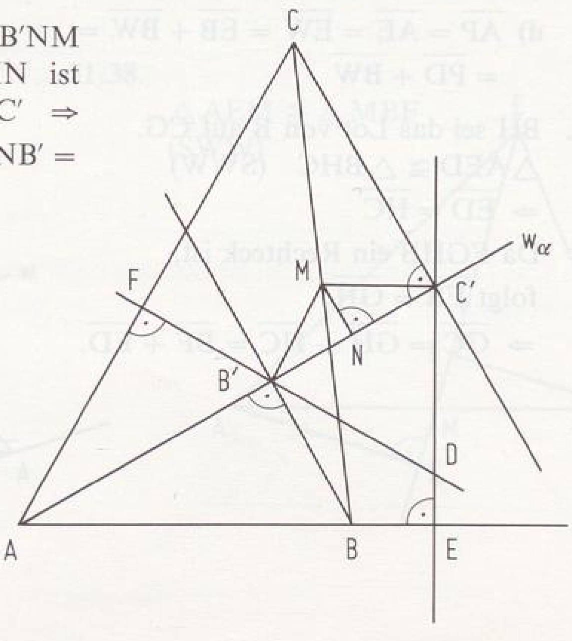
Wegen $\sphericalangle BLK = \sphericalangle CLM$ folgt:
$90° = \sphericalangle CLB = \sphericalangle CLM + \sphericalangle MLB =$
$= \sphericalangle BLK + \sphericalangle MLB$
$\Rightarrow$ die Raute ist ein Quadrat.

52/46. MN sei das Lot von M auf B′C′. $\triangle B'NM \cong \triangle NC'M$ (SWS-Satz) (denn MN ist Mittelparallele von BB′ und CC′ $\Rightarrow$ $\overline{B'N} = \overline{NC'}$; $\overline{MN} = \overline{MN}$, $\sphericalangle MNB' = = \sphericalangle C'NM' = 90°$)
$\Rightarrow \overline{B'M} = \overline{C'M}$.

$\sphericalangle AC'E = 90° - \frac{\alpha}{2}$ ($\triangle AEC'$)

$\sphericalangle FB'A = 90° - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle DB'C'$

($\triangle AB'F$)
$\Rightarrow \triangle B'DC'$ ist gleichschenklig
$\Rightarrow \overline{B'D} = \overline{C'D}$.



52/47. **a)** R sei der Schnittpunkt von AP und BQ.

Es gilt: 1. $\overline{AB} = \overline{RB}$ (denn $\triangle ABR$ ist gleichseitig wegen seiner 60°-Winkel)

2. $\overline{PR} = \overline{CQ}$ (denn PCQR ist ein Parallelogramm, da je zwei Gegenwinkel gleich groß sind)

$\Rightarrow \overline{PR} = \overline{CQ} = \overline{BQ}$ (da auch $\triangle CBQ$ gleichseitig ist)

3. $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle PRB = 60°$

Daraus folgt: $\triangle ABQ \cong \triangle BRP$ (SWS-Satz)

$\Rightarrow \overline{AQ} = \overline{BP}$

b) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60° \Rightarrow \sphericalangle R = 60°$

c) $\triangle ABQ \cong \triangle RCB$, denn $\overline{AB} = \overline{BR}$, $\overline{BQ} = \overline{CB}$, $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle ABQ = 60°$ (SWS-Satz).

Deswegen gilt auch $\varepsilon := \sphericalangle CRB = \sphericalangle BAQ$.

Mit **a)** folgt $\sphericalangle PBR = \varepsilon$. Wegen $RB \| PC$ ist auch $\sphericalangle CPB = \varepsilon$ (Z-Winkel).

$\triangle ACE \cong \triangle PCK$, denn $\overline{AC} = \overline{PC}$, $\overline{AE} = \overline{PK}$ und $\sphericalangle EAC = \sphericalangle KPC = \varepsilon$ (SWS-Satz)

$\Rightarrow \overline{EC} = \overline{CK}$, d.h. $\triangle ECK$ ist gleichschenklig.

Mit $\alpha := \sphericalangle ACE$ folgt: $\sphericalangle ECP = 60° - \alpha$.

Wegen der zuletzt bewiesenen Kongruenz gilt $\sphericalangle PCK = \alpha$.

$\Rightarrow \sphericalangle ECK = \sphericalangle ECP + \sphericalangle PCK = 60°$.

Damit ist das Dreieck ECK sogar gleichseitig.

Beweise durch Nachdenken

53/48. $k \cap]PS[= \{N\}$

$\triangle PMN \cong \triangle MSN$ (SsW),

denn $\overline{PM} = \overline{MS} = r$, $\overline{MN} = \overline{MN}$, $\sphericalangle MNS = \sphericalangle PNM = 90°$ (Thales).

$\Rightarrow \overline{PN} = \overline{NS}$

53/49. **a)** $\alpha = 60°$, $\sphericalangle BAM_b = \sphericalangle AM_bB = 30° \Rightarrow \triangle ABM_b$ ist gleichschenklig

$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BM_b}$, also $2 \cdot \overline{AB} = \overline{BC}$.

b) Die Höhe im Dreieck ABM_b durch die Spitze B halbiert $[AM_b]$ im Punkt L.

Das Lot von B auf d trifft d in K.

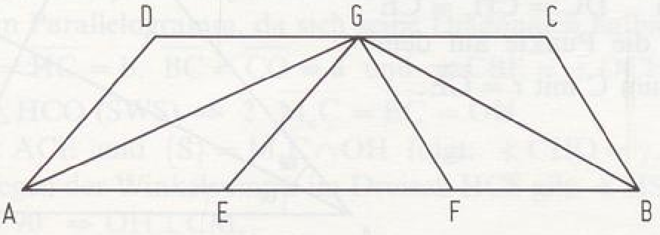
$\triangle ABL \cong \triangle ABK$ (SWW) $\Rightarrow \overline{AL} = \overline{BK} \Rightarrow \overline{AM_b} = 2 \cdot \overline{BK}$

c) Wegen $\overline{AB} = \overline{AM_d}$ ist $\triangle ABM_d$ gleichschenklig und wegen $\alpha = 60°$ sogar gleichseitig.

$\Rightarrow$ B liegt auf dem Thaleskreis über [AD], also $\sphericalangle DBA = 90°$.

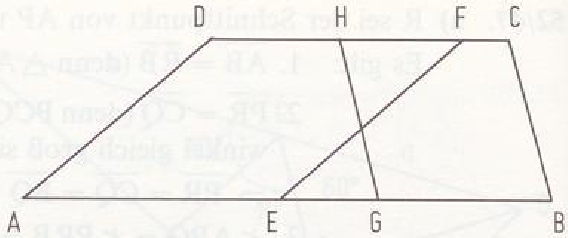
53/50. $\triangle APM \cong \triangle BRM$ (SWS) $\Rightarrow \sphericalangle AMP = \sphericalangle BMR \Rightarrow \sphericalangle PMR = 90°$

53/51. G liege so auf [DC], daß $\overline{DG} = \overline{AD}$, $\overline{GC} = \overline{BC}$. Wegen $GE \| DA$ bzw. $GF \| CB$ sind AEGD und FBCG Rauten, also halbiert AG den Winkel α, BG halbiert den Winkel β.



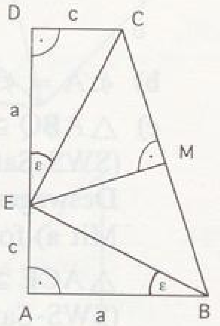
53/52. Durch Einzeichnen der Rauten AEFD bzw. GBCH erkennt man:

$w_\alpha \perp w_\delta \qquad w_\beta \perp w_\gamma$



53/53. **a)** Da die Dreiecke ABE und DEC kongruent sind wegen des SWS-Satzes, folgt $\overline{EB} = \overline{EC}$. Da die Seitenhalbierende durch die Spitze des Dreiecks aber zugleich Höhe ist, gilt also $EM \perp BC$.

b) Mit $\varepsilon = \sphericalangle ABE$ gilt: $\sphericalangle AEB = 90° - \varepsilon$ und $\sphericalangle DEC = \varepsilon \Rightarrow \sphericalangle CEB = 90°$. Wegen der Gleichschenkligkeit von Dreieck BEC gilt aber nach **a)** $\sphericalangle MEC = 45°$ und damit auch $\sphericalangle ECM = 45°$, also $\overline{EM} = \overline{MC}$.



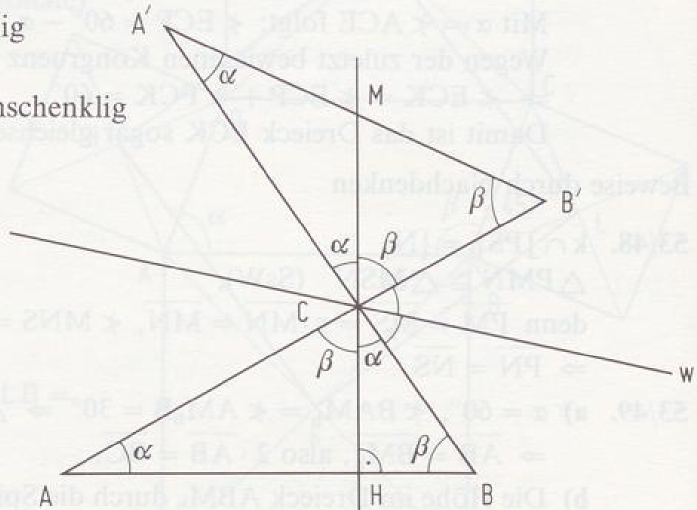
53/54. $\triangle A'CM$ ist gleichschenklig

$\Rightarrow \overline{A'M} = \overline{MC}$

Ebenso ist $\triangle CB'M$ gleichschenklig

$\Rightarrow \overline{CM} = \overline{MB'}$

Insgesamt: $\overline{A'M} = \overline{MB'}$



53/55. **a)** Wegen $\overline{DP} = \overline{QE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ und $DP \parallel QE$ ist QEPD ein Parallelogramm.

$\Rightarrow$ Die Diagonalen [DE] und [PQ] halbieren sich in M.

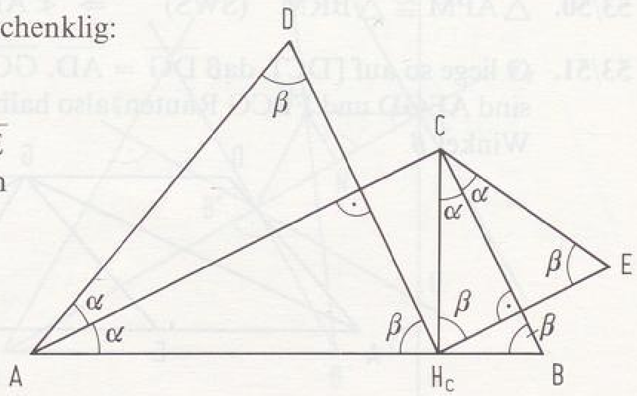
b) Wegen $PM_c = QM_c$ ist $\triangle PQM_c$ gleichschenklig mit der Spitze M_c. Deshalb ist die Seitenhalbierende M_cM zugleich Winkelhalbierende.

54/56. **a)** Beide Dreiecke sind gleichschenklig:

Winkel an der Spitze: 2α

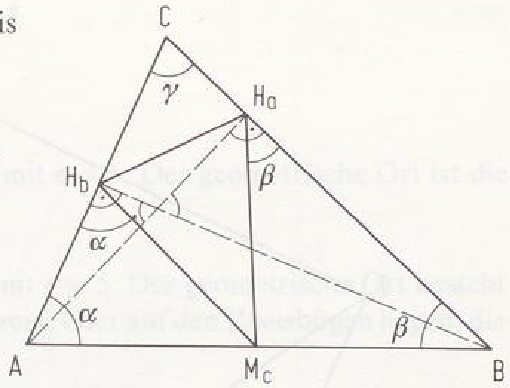
Basiswinkel: β

b) Wegen $\overline{DC} = \overline{CH_c} = \overline{CE}$ liegen die Punkte auf dem Kreis um C mit $r = \overline{CE}$.

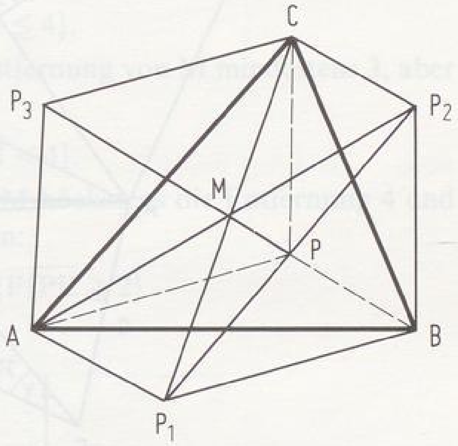


54/57. **a)** H_a und H_b liegen auf dem Thaleskreis über $[AB]$
$\Rightarrow \overline{M_cH_b} = \overline{M_cH_a}$

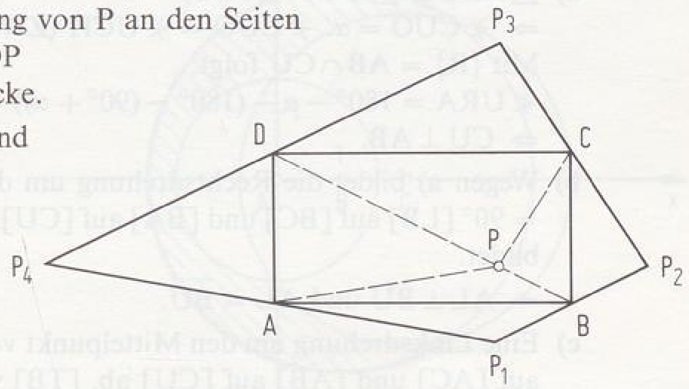
b) Da die Dreiecke AM_cH_b und BH_aM_c gleichschenklig sind, gilt:
$\sphericalangle H_aM_cH_b = 180° - (180° - 2\alpha) -$
$- (180° - 2\beta) =$
$= 2\alpha + 2\beta - 180° +$
$+ 2\gamma - 2\gamma =$
$= 180° - 2\gamma.$



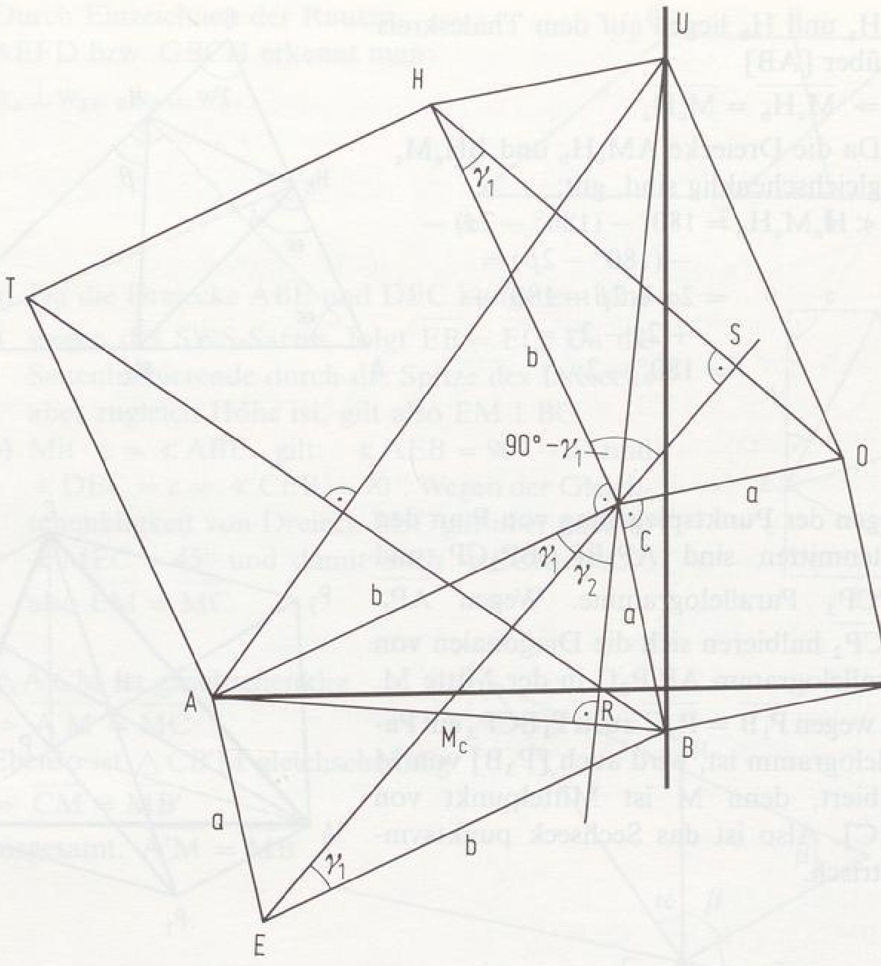
54/58. Wegen der Punktspiegelung von P an den Seitenmitten sind AP_1BP, BP_2CP und $APCP_3$ Parallelogramme. Wegen $\overline{AP_1} = \overline{CP_2}$ halbieren sich die Diagonalen von Parallelogramm AP_1P_2C in der Mitte M. Da wegen $\overline{P_1B} = \overline{P_3C}$ auch P_1BCP_3 ein Parallelogramm ist, wird auch $[P_3B]$ von M halbiert, denn M ist Mittelpunkt von $[P_1C]$. Also ist das Sechseck punktsymmetrisch.



54/59. Wegen der Achsenspiegelung von P an den Seiten sind AP_1BP, BP_2CP, CP_3DP und DP_4AP Drachenvierecke.
Wegen $\overline{PB} = \overline{BP_1} = \overline{BP_2}$ und $\sphericalangle P_2BP_1 = 2 \cdot \sphericalangle CBP + 2 \cdot \sphericalangle PBP_1 = 180°$ ist B die Mitte von $[P_1P_2]$ usw.



54/60. $[CM_c]$ wird um $\overline{CM_c}$ über M_c hinaus bis E verlängert. Das entstandene Viereck AEBC ist ein Parallelogramm, da sich seine Diagonalen halbieren.
Wegen $\overline{EB} = \overline{HC} = b$, $\overline{BC} = \overline{CO} = a$ und $\sphericalangle CBE = \sphericalangle OCH = 180° - \gamma$ gilt $\triangle EBC \cong \triangle HCO$ (SWS) $\Rightarrow 2 \cdot \overline{M_cC} = \overline{EC} = \overline{OH}$.
Mit $\gamma_1 = \sphericalangle ACE$ und $\{S\} = M_cC \cap OH$ folgt: $\sphericalangle CHO = \gamma_1$ und $\sphericalangle SCH = 90° - \gamma_1$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck HCS gilt: $\sphericalangle HSC = 180° - \gamma_1 - (90° - \gamma_1) = 90° \Rightarrow OH \perp CM_c$.



a) $\triangle ABC \cong \triangle UCO$ (SWS)
$\Rightarrow \sphericalangle CUO = \alpha.\ \sphericalangle CUO = \sphericalangle UCH$ (Z-Winkel).
Mit $\{R\} = AB \cap CU$ folgt:
$\sphericalangle URA = 180° - \alpha - (180° - (90° + \alpha)) = 90°$ (Winkelsumme im $\triangle ARC$)
$\Rightarrow\ CU \perp AB$.

b) Wegen **a)** bildet die Rechtsdrehung um den Mittelpunkt von BLOC mit $\varphi = 90°$ [LB] auf [BC] und [BA] auf [CU] ab. [LA] wird also auf [BU] abgebildet.
$\Rightarrow AL \perp BU$ und $\overline{AL} = \overline{BU}$.

c) Eine Linksdrehung um den Mittelpunkt von ACHT mit $\varphi = 90°$ bildet [TA] auf [AC] und [AB] auf [CU] ab. [TB] wird also auf [AU] abgebildet.
$\Rightarrow\ BT \perp AU$ und $\overline{AU} = \overline{BT}$.

3. Kapitel

Aufgaben zu 3.1

59/1. Man zeichnet um jede Ecke einen Kreis mit r = 5. Der geometrische Ort ist die Schnittmenge dieser 4 Kreisflächen.

59/2. Man zeichnet um jede Ecke einen Kreis mit r = 5. Der geometrische Ort besteht aus allen Punkten, die außerhalb dieser Kreise oder auf den Kreisbögen liegen, die dieses Gebiet begrenzen.

59/3. **a)** Geometrischer Ort aller Punkte, die von M mindestens die Entfernung 3 und höchstens die Entfernung 4 haben:

$\{P \mid 3 \leqq \overline{PM} \leqq 4\} = \{P \mid \overline{PM} \geqq 3\} \cap \{P \mid \overline{PM} \leqq 4\}.$

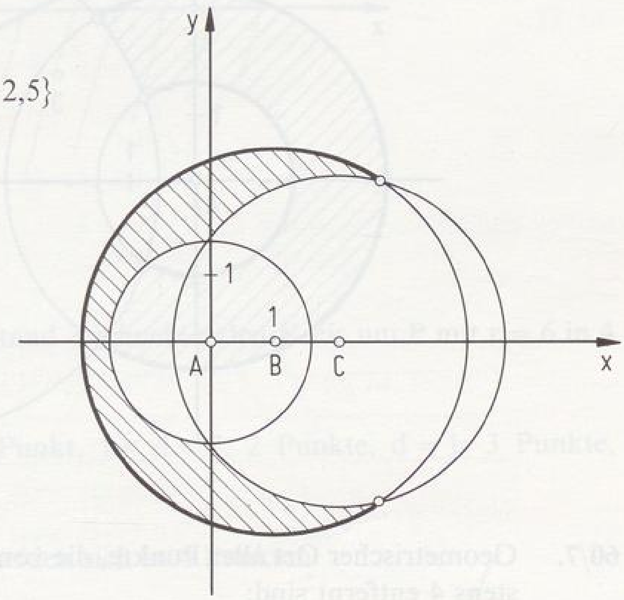
b) Geometrischer Ort aller Punkte, deren Entfernung von M mindestens 3, aber weniger als 4 beträgt:

$\{P \mid 3 \leqq \overline{PM} < 4\} = \{P \mid \overline{PM} \geqq 3\} \cap \{P \mid \overline{PM} < 4\}.$

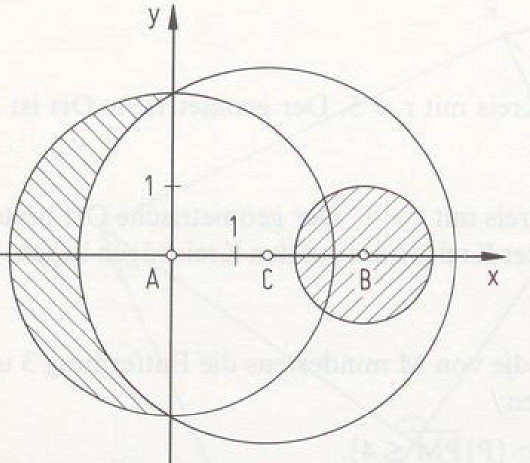
c) Geometrischer Ort aller Punkte, die von M höchstens die Entfernung 4 und von L mindestens die Entfernung 2 haben:

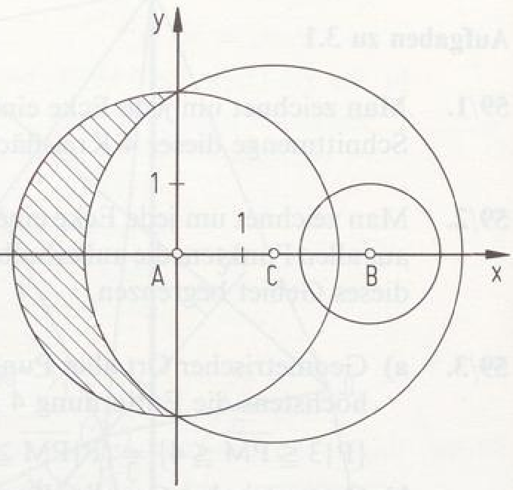
$\{P \mid \overline{PM} \leqq 4 \wedge \overline{PL} \geqq 2\} = \{P \mid \overline{PM} \leqq 4\} \cap \{P \mid \overline{PL} \geqq 2\}.$

59/4. $\{P \mid \overline{PA} > 1{,}5 \wedge \overline{PB} \leqq 3 \wedge \overline{PC} > 2{,}5\}$

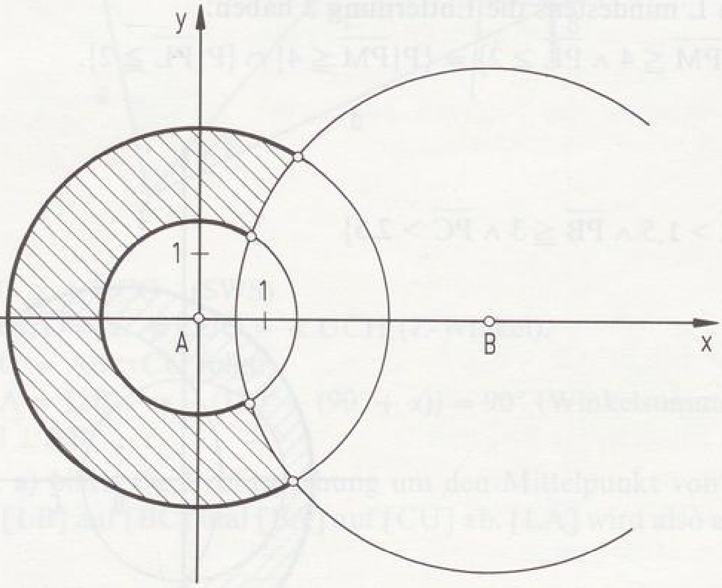


59/5. a) b)





60/6. $\{P \mid 1{,}5 \leqq \overline{PA} \leqq 3\} \cap \{P \mid \overline{PB} > 4\}$



60/7. Geometrischer Ort aller Punkte, die von M oder L jeweils mehr als 3 und höchstens 4 entfernt sind:

$\{P \mid 3 < \overline{PL} \leqq 4\} \cup \{P \mid 3 < \overline{PM} \leqq 4\}$

60/8. $k(A; r = 4)$

60/9. Der Kreis, in den die Sehnen gezeichnet werden, sei $k(M; r)$. Der geometrische Ort ist ein Kreis um M mit $r = \overline{MN}$ (Lotstreckenlänge), wobei N der Mittelpunkt einer beliebigen Sehne ist.

60/10. **a)** Die Mittelpunkte liegen auf m_{AB}.

b) $k(A; r = 2{,}5) \cap k(B; r = 2{,}5) = \{M_1, M_2\}$

c) $r_{min} = 2$

d) m_{AB}

60/11. M sei der Mittelpunkt von a.
Die Rechtecksmittelpunkte liegen auf $m_a \setminus \{M\}$.

60/12. Der Teil der Mittelsenkrechten zu s, der innerhalb des Kreises liegt.

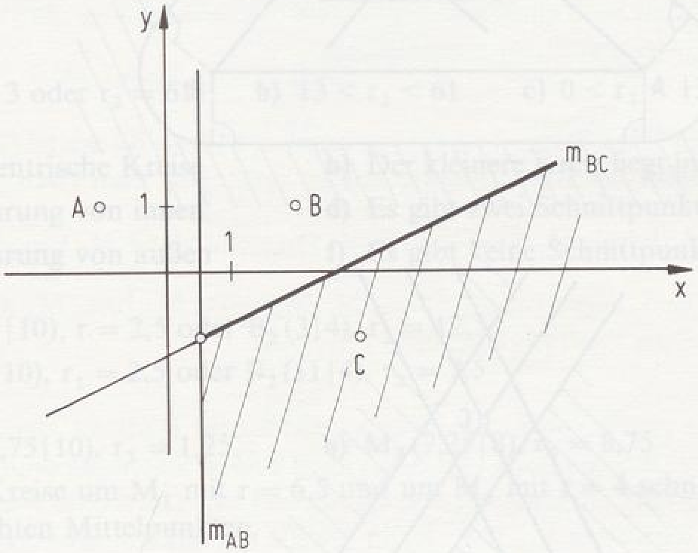
60/13. **a)** Halbebene (in der der Punkt A liegt) ohne m_{AB}.

b) Halbebene (in der der Punkt B liegt) einschließlich m_{AB}

c) $\{P \mid \overline{PA} < \overline{PB}\}$, $\{P \mid \overline{PB} \leqq \overline{PA}\}$

60/14. **a)** Halbebene rechts von m_{BC} einschließlich m_{BC}

b)

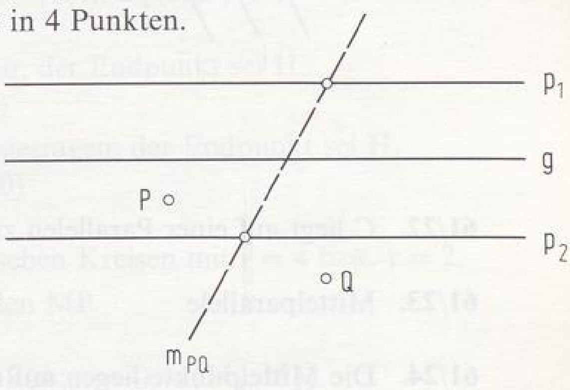


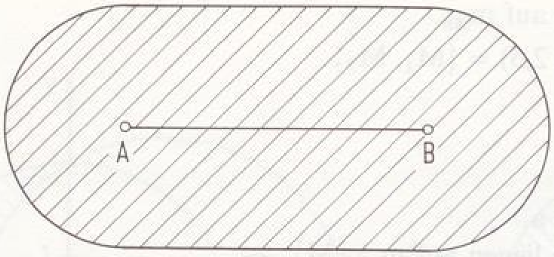
60/15. Das Parallelenpaar zu g im Abstand 3 schneidet den Kreis um P mit $r = 6$ in 4 Punkten.

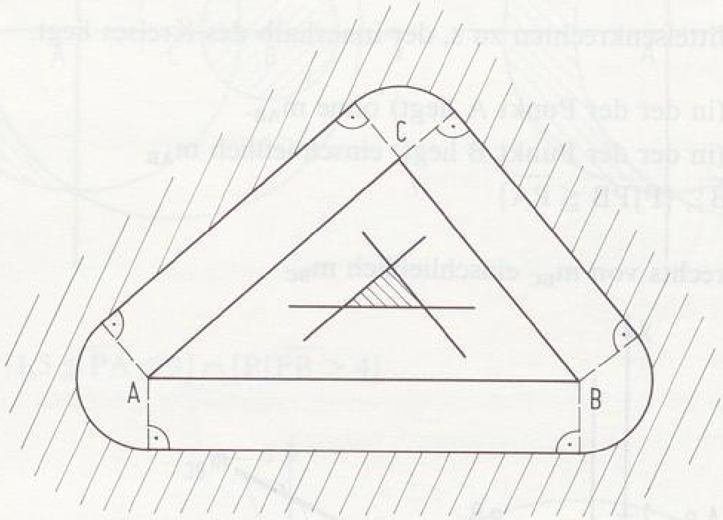
60/16. $d > 7$: kein Punkt, $d = 7$: ein Punkt, $1 < d < 7$: 2 Punkte, $d = 1$: 3 Punkte, $d < 1$: 4 Punkte.

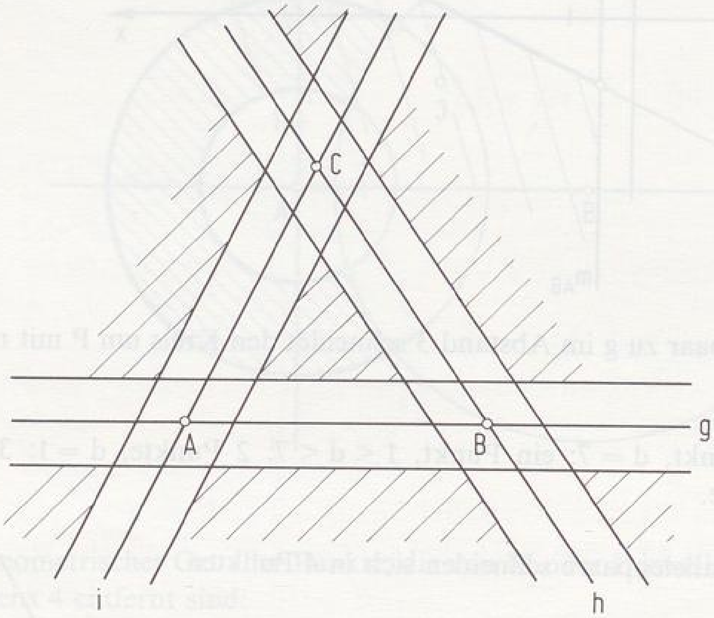
60/17. Die beiden Parallelenpaare schneiden sich in 4 Punkten.

61/18. Es gibt 2 Punkte, falls P und Q nicht auf einer Lotgeraden zu g liegen. Liegen P und Q auf einer Lotgeraden zu g, so gibt es unendlich viele Lösungen, falls $p_2 = m_{PQ}$ ist, sonst gibt es keine Lösung.



61/19. 

61/20. 

61/21. 

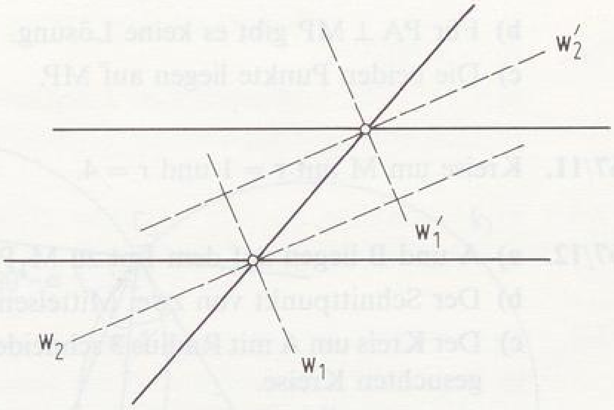
61/22. C liegt auf einer Parallelen zu AB im Abstand 6.

61/23. Mittelparallele

61/24. Die Mittelpunkte liegen auf einer Parallelen zu AB im Abstand 2.

61/25. Der Kreis um S mit $r = 2$ schneidet die Winkelhalbierenden in 4 Punkten.

61/26. Es gibt 2 Punkte.



Aufgaben zu 3.2

66/1. **a)** $r_2 = 13$ oder $r_2 = 61$ **b)** $13 < r_2 < 61$ **c)** $0 < r_2 < 13$ oder $r_2 > 61$

66/2. **a)** Konzentrische Kreise **b)** Der kleinere Kreis liegt im größeren Kreis.
c) Berührung von innen **d)** Es gibt zwei Schnittpunkte.
e) Berührung von außen **f)** Es gibt keine Schnittpunkte.

66/3. **a)** $B_1\,(11|10)$, $r = 2{,}5$ oder $B_2\,(3|4)$, $r_2 = 12{,}5$
b) $B_1\,(3|10)$, $r_1 = 2{,}5$ oder $B_2\,(11|4)$, $r_2 = 7{,}5$

66/4. **a)** $M_3\,(8{,}75|10)$, $r_3 = 1{,}25$ **b)** $M_4\,(7{,}25|8)$, $r_4 = 8{,}75$
c) Die Kreise um M_1 mit $r = 6{,}5$ und um M_2 mit $r = 4$ schneiden sich in den gesuchten Mittelpunkten.

66/5. **a)** $M_1\,(13|9{,}5)$ **b)** $m_{TB} \cap MT = \{M_2\} = \{A\}$
c) Wegen $m_{TC} \parallel MT$ gibt es keinen solchen Kreis. **d)** $M_4\,(7|6{,}5)$

66/6. Die gesuchten Kreise haben die Radien 1,25 oder 3,75.
$r_1 = 1{,}25$: $B_1\,(7{,}5|8)$, $B_2\,(9|10)$, bzw. $B_3\,(6{,}2|8{,}5)$, $B_4\,(6{,}4|11)$
$r_2 = 3{,}75$: $B_1\,(7{,}5|4)$, $B_2\,(3|10)$, bzw. $B_3\,(3{,}6|5{,}4)$, $B_4\,(10{,}9|7{,}1)$

66/7. **a)** Auf [AO wird r_2 von A aus abgetragen, der Endpunkt sei H.
$\{M\} = OA \cap m_{HP}$. $M\,(2|11)$, $B_2\,(7|8{,}5)$
b) Auf [AM $\subset$ OA wird r_2 von A aus abgetragen, der Endpunkt sei H.
$\{M\} = OA \cap m_{HP}$. $M\,(10|5)$, $B_2\,(12{,}5|0)$

66/8. **a)** Die Mittelpunkte liegen auf konzentrischen Kreisen mit $r = 4$ bzw. $r = 2$.
b) Die Mittelpunkte liegen auf der Geraden MP.

66/9. **a)** Kreis um A mit $r = 2$ **b)** $m_{AB} \cap k(A; r = 4) = \{M_1; M_2\}$

67/10. a) Der Kreis um P mit $r = 2$ und der Kreis um M mit $r = 6$ ergeben A_1 und A_2 (symmetrische Punkte).
MP schneidet die Mittelsenkrechte von $[PA_1]$ im gesuchten Mittelpunkt.
b) Für $PA \perp MP$ gibt es keine Lösung.
c) Die beiden Punkte liegen auf MP.

67/11. Kreise um M mit $r = 1$ und $r = 4$.

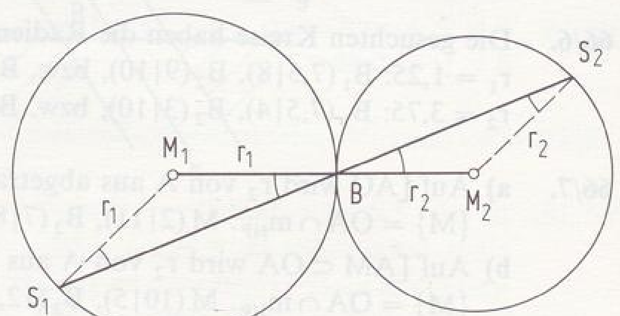
67/12. a) A und B liegen auf dem Lot zu M_1P durch M_1 im Abstand 6.
b) Der Schnittpunkt von zwei Mittelsenkrechten ergibt M_2.
c) Der Kreis um A mit Radius 3 schneidet M_2A in den Mittelpunkten der beiden gesuchten Kreise.

67/13. a) T und S liegen symmetrisch bezüglich MP $\Rightarrow$ $\overline{SP} = \overline{PT}$.
b) $\triangle MSP$ hat bei S einen rechten Winkel (Thaleskreis) $\Rightarrow$ $\overline{MS} = r = d(M; SP)$, also gibt es nur einen Schnittpunkt.

67/15. Aus Symmetriegründen sind die Endpunkte B_1 und B_2 des zu [AB] senkrechten Durchmessers die Berührpunkte auf k. Verlängert man $[MB_1$ bzw. $[MB_2$ um $\frac{\overline{AM}}{2}$, so erhält man H_1 bzw. H_2. Da die Dreiecke $M_1M_3H_1$ bzw. $M_1H_2M_4$ gleichschenklig sind, liegen die gesuchten Mittelpunkte M_3 bzw. M_4 auch auf der Mittelsenkrechten von $[M_1H_1]$, bzw. $[M_1H_2]$.

68/17. Die beiden gegebenen Kreise seien k_1 und k_2, ihr Radius r, der Mittelpunkt von $[M_1M_2]$ sei B. Man trägt von B aus nach beiden Seiten auf dem Lot zu $[M_1M_2]$ die Strecke r ab, die Endpunkte seien M_3 und M_4. Die Kreise um M_3 bzw. M_4 mit Radius r schneiden k_1, bzw. k_2 in jeweils 4 Punkten. Aus Symmetriegründen schneiden sich jeweils die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Schnittpunkte in den gesuchten Berührkreismittelpunkten.

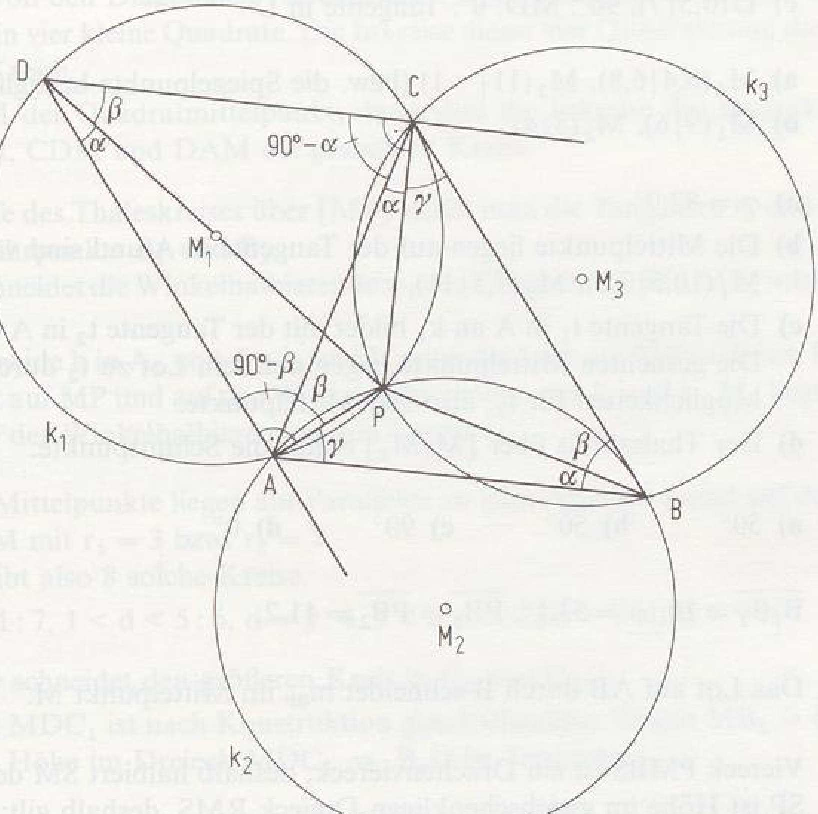
68/18. $\triangle S_1BM_1$ ist gleichschenklig, ebenso $\triangle BM_2S_2$.
Wegen $\sphericalangle S_1BM_1 = \sphericalangle S_2BM_2$ (Scheitelwinkel) folgt wegen der Gleichschenkligkeit auch $\sphericalangle M_1S_1B = \sphericalangle BS_2M_2$.
Die letztgenannten Winkel sind also Z-Winkel, d.h. $S_1M_1 \parallel S_2M_2$.



68/19. $\sphericalangle PQK_1 = \sphericalangle PQK_2 = 90°$ (Thaleskreise!)
$\Rightarrow \sphericalangle K_1QK_2 = 180°$, also liegt Q auf K_1K_2.

68/20. Genauso wie die Dreiecke liegen auch die Umkreise symmetrisch bezüglich M. Gäbe es neben M einen weiteren Schnittpunkt der Kreise, so müßte wegen der Punktsymmetrie noch ein Schnittpunkt existieren. 3 Schnittpunkte bei zwei Kreisen sind aber nicht möglich.

68/21.



M_1P schneidet k_1 in D. Man betrachtet nun die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$. Wegen des Umfangswinkelsatzes ergeben sich gleiche Winkel (siehe Skizze), da die Kreisradien übereinstimmen. Die 90°-Winkel bei A und C ergeben sich aus dem Satz von Thales.
Im $\triangle ABC$ gilt: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90° - (\alpha + \beta)$
$\Rightarrow \sphericalangle ACB = \alpha + \gamma = \alpha + 90° - (\alpha + \beta) = 90° - \beta = \sphericalangle DAC$.
Wegen $\overline{AC} = \overline{AC}$ und $\sphericalangle ABC = \alpha + \beta = \sphericalangle ADC$ sind damit die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ kongruent (SWW-Satz). Kongruente Dreiecke haben denselben Umkreisradius.

Kürzere Lösung von 68/21.: Man zeichnet im Aufgabenbild aus dem Buch die Rauten AM_1PM_3, BM_2PM_1 und CM_3PM_2 mit der Seitenlänge r ein. Ergänzt man das Dreieck AM_1B durch den Punkt M zur Raute AM_1BM mit der Seitenlänge r, so ist auch BM_2CM eine Raute mit der Seitenlänge r, denn es gilt $\overline{MB} = \overline{CM_2} = \overline{M_2B} = r$ und aus $MB \| AM_1 \| M_3P \| CM_2$ folgt $MB \| CM_2$. Also gilt auch $\overline{MC} = r$.

Aufgaben zu 3.3

72/1. Tangentenquerschnitt: $(4 \mid -4{,}5)$

72/2. **a)** $\varphi = 60{,}3^\circ$

b) $C(11 \mid 3{,}5)$, 1. Sekante: CA, 2. Sekante: CX mit $X(3{,}5 \mid 1)$

c) $D(0{,}5 \mid 7)$, 90°: MD, 0°: Tangente in D

72/3. **a)** $M_1(8{,}4 \mid 6{,}8)$, $M_2(11 \mid -1)$ (bzw. die Spiegelpunkte bezüglich AB)

b) $M_1(9 \mid 6)$, $M_2(3 \mid 4)$

73/4. **a)** $\varphi = 82{,}9^\circ$

b) Die Mittelpunkte liegen auf der Tangente in A und sind von A 2,5 entfernt; $M_1(10{,}5 \mid 7{,}5)$, $M_2(7{,}5 \mid 11)$.

c) Die Tangente t_1 in A an k_1 bildet mit der Tangente t_2 in A einen 60°-Winkel. Die gesuchten Mittelpunkte liegen auf dem Lot zu t_2 durch A. Es gibt zwei Möglichkeiten für t_2, also vier Mittelpunkte.

d) Der Thaleskreis über $[M_1M_2]$ ergibt die Schnittpunkte.

73/5. **a)** 50° **b)** 50° **c)** 90° **d)** 0°

73/6. $\overline{B_1B_2} = 10$, $\varphi = 53{,}1^\circ$, $\overline{PB_1} = \overline{PB_2} = 11{,}2$.

73/7. Das Lot auf AB durch B schneidet m_{BP} im Mittelpunkt M.

73/8. Viereck PMBS ist ein Drachenviereck, deshalb halbiert SM den Winkel $\sphericalangle$ BSP. SP ist Höhe im gleichschenkligen Dreieck RMS, deshalb gilt: $\varepsilon = \sphericalangle PSM$.
$\Rightarrow \varepsilon = \sphericalangle PSM = \sphericalangle MSB = \frac{1}{3}\varphi$.
Der Berührpunkt B wird nicht konstruiert!
Winkel φ mit $\varphi < 42{,}1^\circ$ lassen sich nicht dritteln.

74/9. **a)** Das Lot auf PQ durch M schneidet k in den Berührpunkten.

b) Man zeichnet eine Hilfsgerade h mit $\sphericalangle(h, PQ) = 53^\circ$. Das Lot auf h durch M schneidet k in den Berührpunkten.

c) Der gesuchte Punkt auf PQ sei R.
Da das Viereck MB_1RB_2 ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 ist, konstruiert man ein solches Quadrat mit einer Ecke M. Der Kreis um M mit der Diagonale als Radius schneidet PQ in den gesuchten Punkten $R_1(7 \mid 1)$ und $R_2(12{,}4 \mid 5)$.

d) Da das Viereck MB_1YB_2 ein Drachenviereck ist, konstruiert man ein solches Drachenviereck mit der Ecke M und einer Diagonale der Länge 6. Der Kreis um M mit der anderen Diagonale als Radius schneidet die y-Achse in den gesuchten Punkten $Y_1(0 \mid 6{,}25)$, $Y_2(0 \mid 9{,}75)$.

74/10. t sei die Tangente in P. MP schneidet die Winkelhalbierenden von t und g in den gesuchten Mittelpunkten.

74/11. **a)** W sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.
Die gesuchten Kreise sind die Inkreise der Drachenvierecke AM_cWM_b, BM_aWM_c und CM_bWM_a.
b) Die gesuchten Kreise sind die Inkreise der Dreiecke ABW, BCW und CAW.

74/12. **a)** Die von den Diagonalen verschiedenen Symmetrieachsen zerlegen das Quadrat in vier kleine Quadrate. Die Inkreise dieser vier Quadrate sind die gesuchten Kreise.
b) Ist M der Quadratmittelpunkt, dann sind die Inkreise der Dreiecke ABM, BCM, CDM und DAM die gesuchten Kreise.

74/13. Mit Hilfe des Thaleskreises über [MP] erhält man die Tangenten t_1 und t_2 durch die Berührpunkte B_1 und B_2.
MB_1 schneidet die Winkelhalbierende w_1 der Tangenten in M_1, MB_2 schneidet w_1 in M_2.
MP schneide k in A_1 und A_2, l_1 und l_2 seien die Lote auf MP in diesen Punkten. M_3 liegt auf MP und auf der Winkelhalbierenden von l_1 und t_1. M_4 liegt auf MP und auf der Winkelhalbierenden von l_2 und t_1.

74/14. **a)** Die Mittelpunkte liegen auf Parallelen zu g im Abstand 2 und auf dem Kreis um M mit $r_1 = 3$ bzw. $r_2 = 7$.
Es gibt also 8 solche Kreise.
b) $d = 1:7$, $1 < d < 5:6$, $d = 5:4$, $5 < d < 9:2$, $d = 9:1$, $d > 9:0$

74/15. Kreis ② schneidet den größeren Kreis in C_1 und C_2.
Dreieck MDC_1 ist nach Konstruktion gleichschenklig. Wegen $\overline{MB_1} = \overline{B_1C_1} = r$ ist B_1D Höhe im Dreieck $MDC_1 \Rightarrow B_1D$ ist Tangente.

75/16. **a)** $B_1(3{,}5|-1{,}5)$, $B_1'(1{,}5|0{,}5)$, $B_2(9{,}5|0{,}5)$, $B_2'(3{,}5|6{,}5)$
b) $B_1(12|5)$, $B_1'(14|7)$, $B_2(8|5)$, $B_2'(14|11)$
c) innere Tangenten:
$B_1(3{,}5|1{,}5)$, $B_1'(4{,}5|0{,}5)$ $\quad$ $B_2(6{,}5|0{,}5)$, $B_2'(3{,}5|3{,}5)$

äußere Tangenten:
$B_1(14|1)$, $B_1'(18|5)$
$B_2(2|5)$, $B_2'(14|17)$
d) $\overline{M_1M_2} = 11$: 4 Tangenten, $\overline{M_1M_2} = 8$: 3 Tangenten,
$\overline{M_1M_2} = 4$: 2 Tangenten, $\overline{M_1M_2} = 2$: 1 Tangente,
$\overline{M_1M_2} = 1$: keine Tangenten
e) Konstruktion der äußeren (bzw. inneren) Tangenten

76/18. **a)** Kreis um M mit Radius $\overline{MS}$, wobei S Sehnenmittelpunkt ist.
b) Man konstruiert den Kreis k_1 der Sehnenmittelpunkte und dann von P aus die Tangenten an k_1.

76/19. Man konstruiert um M_2 den Kreis k_3 der Sehnenmittelpunkte für Sehnen der Länge 5,5. Die gemeinsamen Tangenten an k_1 und k_3 leisten das Gewünschte.

76/20. **a)** c und α antragen; w_α schneidet die Parallele zu c im Abstand 2 in W (Inkreismittelpunkt).
Verdoppelung von $\sphericalangle$ ABW liefert a.

b) $\sphericalangle AWB = 119°$ und $\sphericalangle BWC = 128{,}5°$ bei W antragen. An einem Hilfspunkt C′ auf CW wird $\frac{\gamma}{2}$ angetragen. Das Lot von W auf den Schenkel schneidet den Inkreis im Berührpunkt P auf CB.

c) Teildreieck AH_aC ist konstruierbar aus $\sphericalangle CAH_a = 30°$, h_a und $\sphericalangle AH_aC = 90°$. w_γ und die Parallele zu AC im Abstand 2 schneiden sich in W. Verdoppelung von $\sphericalangle$ CAW liefert c.

76/21. Ein Parallelogramm mit Inkreis ist eine Raute!
a) $h_a = h_b = 3$
b) Der Mittelpunkt von [AC] sei M. M ist auch Inkreismittelpunkt. Der Thaleskreis über [AM] schneidet den Inkreis im Berührpunkt; außerdem liegt B auf dem Lot zu AC durch M.

76/22. Man trägt α an a an. Die Parallele zu AB im Abstand 5 schneidet den freien Schenkel von α in D. w_α und w_δ schneiden sich im Inkreismittelpunkt M. Verdoppelung des Winkels $\sphericalangle$ ABM liefert C.

76/23. **a)** Dreieck ABC konstruieren; die Parallelen zu AB und BC schneiden sich im Inkreismittelpunkt W.
Verdoppelung der Winkel $\sphericalangle$ BAW und $\sphericalangle$ BCW liefert D.

b) An d wird α angetragen, dann der Inkreis k konstruiert. k berührt AB in E. Aus $\sphericalangle EWB = 22{,}5°$ findet man B. Verdoppelung der Winkel $\sphericalangle$ ABW und $\sphericalangle$ ADW liefert C.

76/24. **a)** Dreieck ABC konstruieren und α antragen; w_α und w_β schneiden sich in W. Verdoppelung von $\sphericalangle$ BCW liefert D.

b) An a die Winkel α und β antragen; w_α und w_β schneiden sich in W. Der Inkreis berührt BC in E. Aus $\sphericalangle EWC = 40°$ findet man C und dann D.

c) Dreieck ABC konstruieren; D erhält man aus c und $d = 7 + 4 - 5 = 6$.

d) Dreieck ABC konstruieren; D erhält man aus c und $d = 5$. (Das konkave Viereck ist keine Lösung.)

76/25. m_{AB} schneidet die Parallele in C.
m_{AC} schneidet m_{AB} in M.

76/26. $w_\gamma \cap c = \{M\}$

76/27. Die Tangenten sind parallel zu PQ, oder sie laufen durch den Mittelpunkt von [PQ].
Da es jeweils 2 solche Tangenten gibt, erhält man insgesamt 4 Lösungen.

76/28. m sei die Mittelparallele von p und q.
a) m schneidet k_1 in den gesuchten Mittelpunkten.

b) Der Kreis um A mit $r = 3$ schneidet m in den Mittelpunkten.

c) Die Winkelhalbierenden im Schnittpunkt von p und a schneiden m in den Mittelpunkten.

d) Der Kreis um M_2 mit $r = 6$ schneidet m in den Mittelpunkten.

e) Der Kreis um M_3 mit $r = r_3 + 3$ (eventuell auch $r = r_3 - 3$) schneidet m in den Mittelpunkten.

77/29. **a)** Die Mittelpunkte liegen auf dem Parallelenpaar zu g im Abstand 2 und auf dem Kreis um P mit $r = 5$.

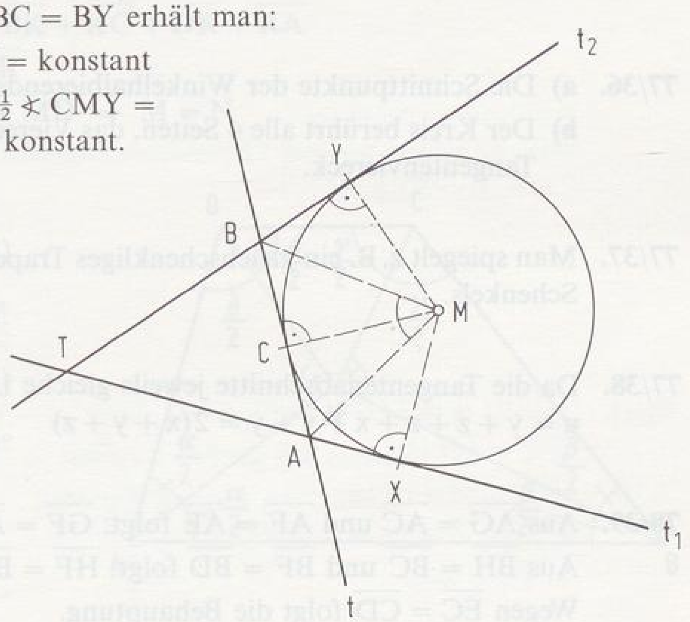
b) Die Mittelpunkte liegen auf dem Parallelenpaar zu g im Abstand 2 und auf dem Parallelenpaar zu h im Abstand 3.

77/30. Das Lot in G auf g schneidet h in H. Die Winkelhalbierenden in H schneiden g in den Mittelpunkten.

77/31. **a)** Wegen $\overline{AX} = \overline{AC}$ und $\overline{BC} = \overline{BY}$ erhält man:

$u = \overline{TX} + \overline{TY} = 2 \cdot \overline{TX} =$ konstant

b) $\sphericalangle AMB = \frac{1}{2} \sphericalangle XMC + \frac{1}{2} \sphericalangle CMY =$
$= \frac{1}{2} \sphericalangle XMY =$ konstant.



77/32. **a)** Man zeichnet eine Tangente t und trägt vom Berührpunkt aus auf t eine Strecke der Länge 3 ab; der Endpunkt sei A. Der geometrische Ort ist der Kreis um M mit $r = \overline{MA}$.

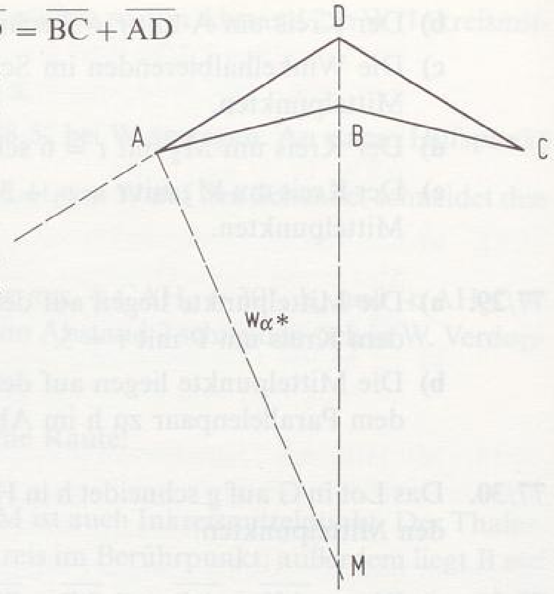
b) X liegt auf p und auf dem in **a)** konstruierten Kreis.

77/33. R liege auf [PQ] mit $\overline{PR} = 3$. Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen auf dem Lot zu PQ in R im Abstand 1,5.

77/34. **a)** Die Mittelpunkte liegen auf dem Kreis um M mit $r = 3{,}5$ und auf dem Parallelenpaar zu p im Abstand 1,5.

b) Das Lot zu p in A sei l. Trägt man von A aus auf l nach beiden Seiten Strecken der Länge 2 ab, so erhält man die Punkte C und D. Die Mittelsenkrechten m_{MC} bzw. m_{MD} schneiden l in den gesuchten Mittelpunkten.

77/35. a) Für einen Drachen gilt: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$



b) Es gibt unendlich viele Kreise, die AD und AB berühren. (Die Mittelpunkte liegen auf den Winkelhalbierenden.)
Wählt man den Kreis, dessen Mittelpunkt auch auf w_δ und außerhalb liegt, so berührt er wegen der Symmetrie auch die beiden Geraden BC und DC.

77/36. a) Die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden ergeben die Mittelpunkte.

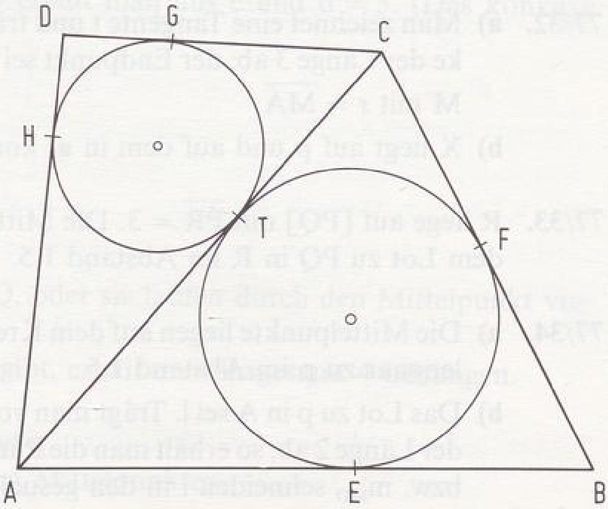
b) Der Kreis berührt alle 4 Seiten, das Viereck hat also einen Inkreis und ist ein Tangentenviereck.

77/37. Man spiegelt z. B. ein gleichschenkliges Trapez mit Inkreis am Mittelpunkt eines Schenkels.

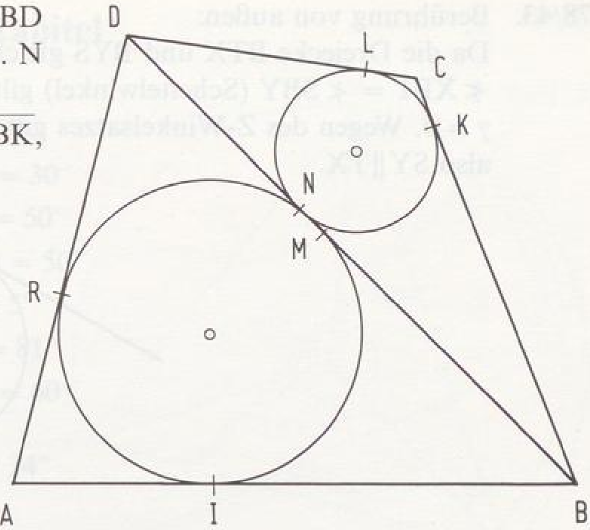
77/38. Da die Tangentenabschnitte jeweils gleiche Länge haben, gilt:
$u = y + z + z + x + x + y = 2(x + y + z)$

78/39. Aus $\overline{AG} = \overline{AC}$ und $\overline{AF} = \overline{AE}$ folgt: $\overline{GF} = \overline{AG} - \overline{AF} = \overline{AC} - \overline{AE} = \overline{EC}$.
Aus $\overline{BH} = \overline{BC}$ und $\overline{BF} = \overline{BD}$ folgt: $\overline{HF} = \overline{BH} - \overline{BF} = \overline{BC} - \overline{BD} = \overline{CD}$.
Wegen $\overline{EC} = \overline{CD}$ folgt die Behauptung.

78/40. a) $\overline{AH} = \overline{AT} = \overline{AE}$
$\overline{CF} = \overline{CT} = \overline{CG}$
$\overline{BE} = \overline{BF}$
$\overline{DG} = \overline{DH}$
$\Rightarrow \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$,
also ist ABCD ein Tangentenviereck.

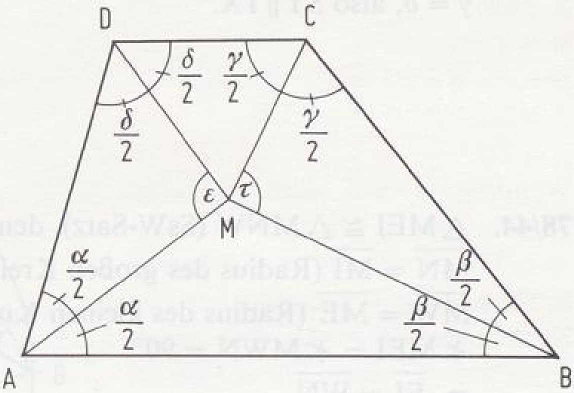


b) Die Inkreise der Dreiecke ABD und BCD sollen BD in M bzw. N berühren.
Dann gilt: $\overline{BI} = \overline{BM}$, $\overline{BN} = \overline{BK}$, $\overline{DL} = \overline{DN}$, $\overline{DM} = \overline{DR}$.



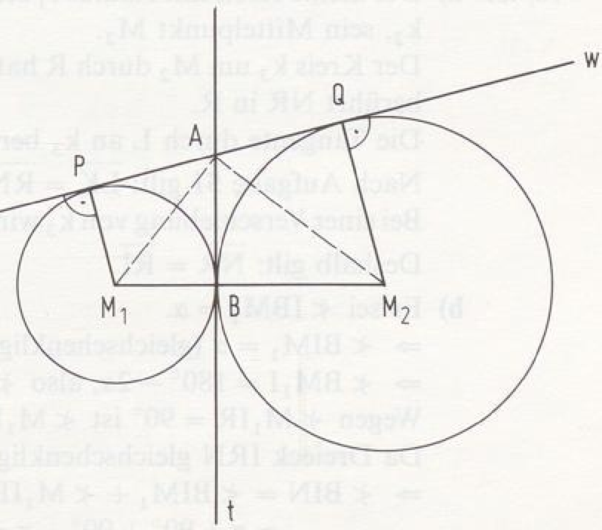
Da ABCD ein Tangentenviereck ist, gilt auch:
$\overline{AI} + \overline{IB} + \overline{CL} + \overline{LD} = \overline{BK} + \overline{KC} + \overline{DR} + \overline{RA}$
$\Rightarrow \overline{IB} + \overline{LD} = \overline{BK} + \overline{DR}$
oder $\overline{BM} + \overline{ND} = \overline{BN} + \overline{MD} \Rightarrow M = N$

78/41. $\alpha + \delta = 180°$ (Stufenwinkel)
$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2} = 90° \Rightarrow \varepsilon = 90°$
$\beta + \gamma = 180°$ (Stufenwinkel)
$\Rightarrow \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \Rightarrow \tau = 90°$

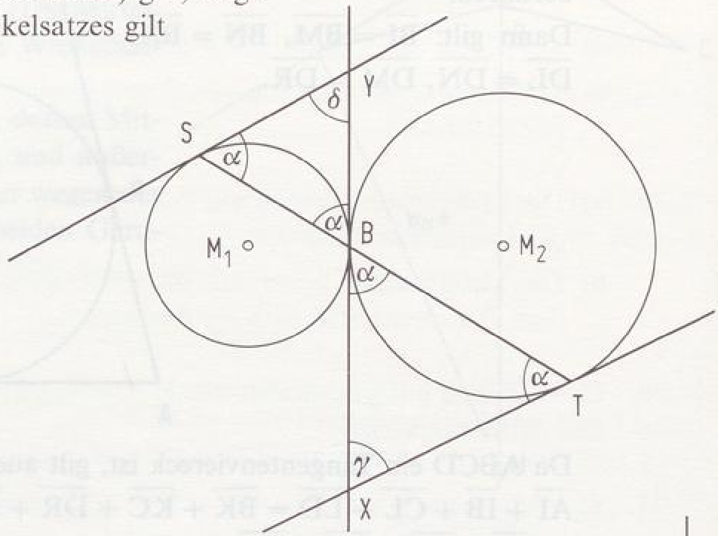


78/42. **a)** $\left.\begin{array}{l}\overline{AP} = \overline{AB}\\ \overline{AB} = \overline{AQ}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AP} = \overline{AQ}$

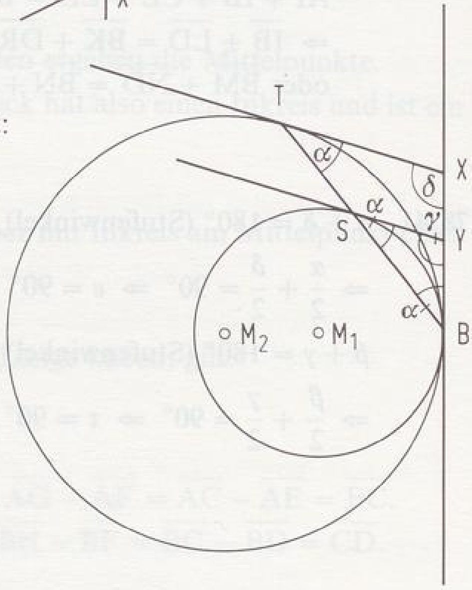
b) B liegt auf dem Thaleskreis über [PQ] (vgl. **a)**)
$\Rightarrow \sphericalangle PBQ = 90°$.
M_1A bzw. M_2A sind Winkelhalbierende in den Drachenvierecken M_1BAP bzw. M_2QAB
$\Rightarrow \sphericalangle M_1AM_2 = 90°$.



78/43. Berührung von außen:
Da die Dreiecke BTX und BYS gleichschenklig sind und
$\sphericalangle XBT = \sphericalangle SBY$ (Scheitelwinkel) gilt, folgt:
$\gamma = \delta$. Wegen des Z-Winkelsatzes gilt
also $SY \parallel TX$.



Berührung von innen:
Wie oben folgt aus der Gleichschenkligkeit:
$\gamma = \delta$, also $SY \parallel TX$.



78/44. $\triangle MEI \cong \triangle MNW$ (SsW-Satz), denn
$\overline{MN} = \overline{MI}$ (Radius des großen Kreises)
$\overline{MW} = \overline{ME}$ (Radius des kleinen Kreises)
$\sphericalangle MEI = \sphericalangle MWN = 90^\circ$
$\Rightarrow \overline{EI} = \overline{WN}$

78/45. **a)** Der kleine Kreis mit Radius r_1 sei k_1, sein Mittelpunkt M_1, der große Kreis sei k_2, sein Mittelpunkt M_2.
Der Kreis k_3 um M_2 durch R hat den Radius r_1, ist also kongruent zu k_1 und berührt NR in R.
Die Tangente durch L an k_3 berühre im Punkt K.
Nach Aufgabe **51** gilt: $\overline{LK} = \overline{RN}$.
Bei einer Verschiebung von k_3 wird M_2 auf M_1 abgebildet, [LK] fällt auf [RI].
Deshalb gilt: $\overline{NR} = \overline{RI}$.

b) Es sei $\sphericalangle IBM_1 = \alpha$.
$\Rightarrow \sphericalangle BIM_1 = \alpha$ (gleichschenkliges Dreieck BM_1I)
$\Rightarrow \sphericalangle BM_1I = 180^\circ - 2\alpha$, also $\sphericalangle IM_1M_2 = 2\alpha$.
Wegen $\sphericalangle M_1IR = 90^\circ$ ist $\sphericalangle M_1RI = 90^\circ - 2\alpha$, also $\sphericalangle IRN = 2\alpha$.
Da Dreieck IRN gleichschenklig ist, folgt: $\sphericalangle NIR = 90^\circ - \alpha$.
$\Rightarrow \sphericalangle BIN = \sphericalangle BIM_1 + \sphericalangle M_1IR + \sphericalangle RIN =$
$= \alpha + 90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$.

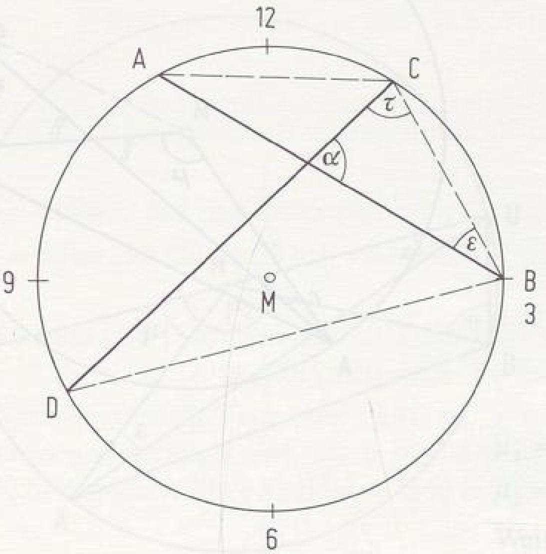
4. Kapitel

Aufgaben zu 4.1

87/1. **a)** $\varphi = 60°$, $\psi = 120°$, $\eta = 45°$, $\alpha = 30°$
b) $\mu = 80°$, $\psi = 140°$, $\varepsilon = 35°$, $\alpha = 50°$
c) $\mu = 140°$, $\varphi = 70°$, $\psi = 110°$, $\varepsilon = 50°$
d) $\varphi = 10°$, $\mu = 20°$, $\alpha = 80°$, $\varepsilon = 5°$
e) $\varphi = 9°$, $\psi = 171°$, $\mu = 18°$, $\alpha = 81°$
f) $\varphi = 30°$, $\mu = 60°$, $\psi = 150°$, $\alpha = 60°$

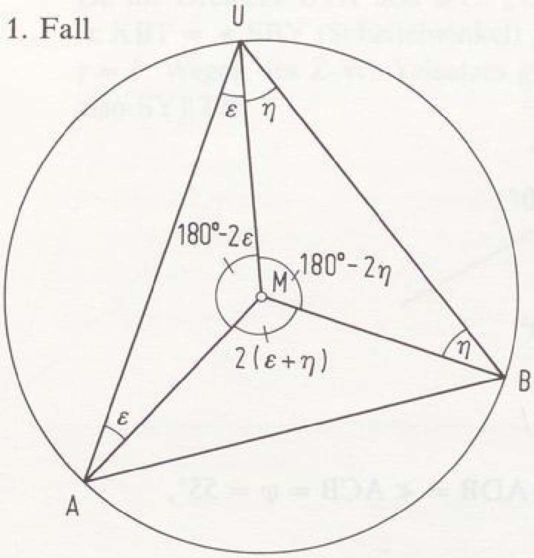
87/3. **a)** $\varrho = 360° - 24° - 58° - 244° = 34°$
b) $\varrho = 50°$
c) $\sphericalangle ABM = 35°$, $\sphericalangle AMB = 110°$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \psi = 55°$, $\omega = 90° - \psi = 35°$
d) $\varrho = 90°$, $\sigma = 45°$, $\tau = 22{,}5°$

88/4. $\sphericalangle CMA = 60° \Rightarrow \varepsilon = 30°$
$\sphericalangle DMB = 150° \Rightarrow \tau = 75°$
$\Rightarrow \alpha = 180° - 105° = 75°$



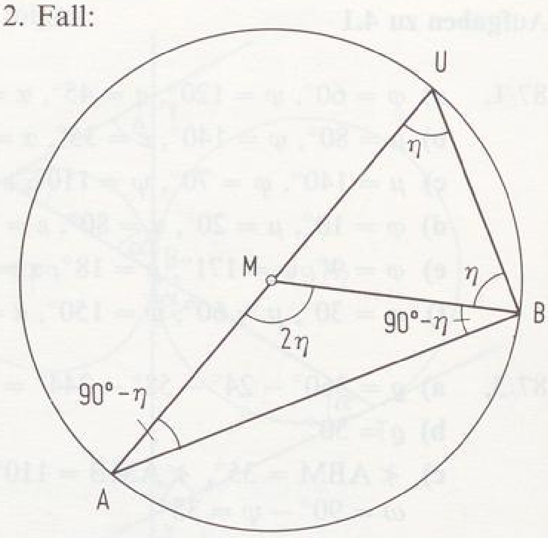
88/5. a)

1. Fall



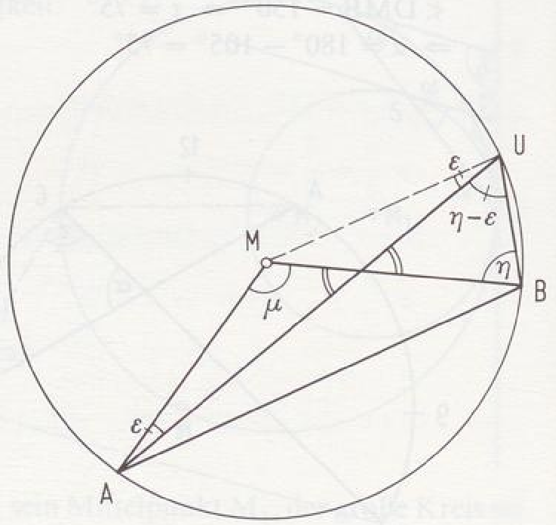
$\varphi = \varepsilon + \eta$
$\mu = 2(\varepsilon + \eta)$

2. Fall:

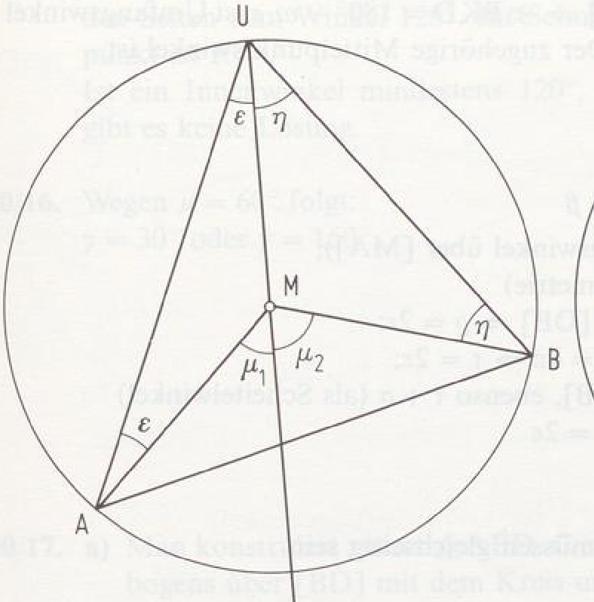


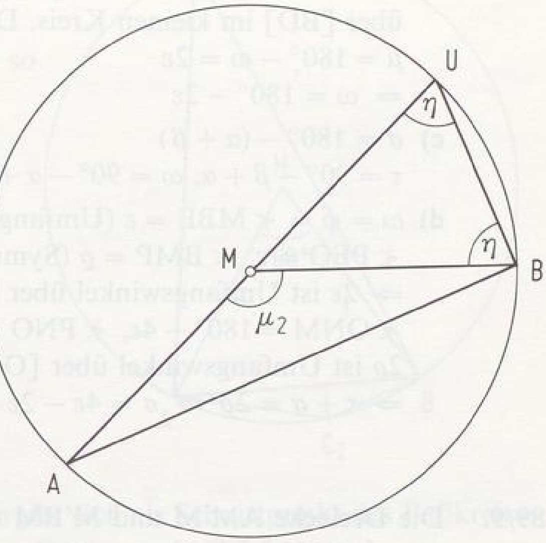
$\varphi = \eta$
$\mu = 2\eta$

3. Fall:
$\varphi = \eta - \varepsilon$
$\mu + \varepsilon = \eta - \varepsilon + \eta$
$\mu = 2\eta - 2\varepsilon$
$\mu = 2\varphi$
Wandert U auf dem größeren Kreisbogen, so gilt also stets: $2\varphi = \mu$. Da μ konstant ist, gilt dasselbe für φ. Liegt V auf dem kleineren Kreisbogen, so erhält man durch Einzeichnen des Durchmessers [VU]: $\sphericalangle$ AVB $= 180° - \varphi$.



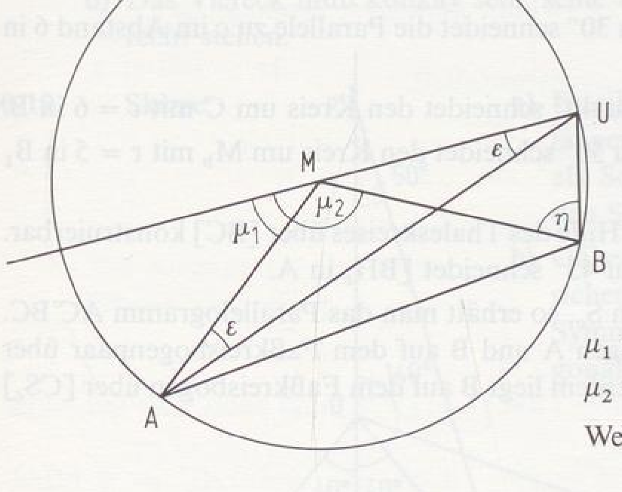
b) 1. Fall: 2. Fall:





$$\left.\begin{array}{l}\mu_1 = 2\varepsilon \\ \mu_2 = 2\eta\end{array}\right\} \Rightarrow \mu = 2(\varepsilon + \eta) = 2\varphi \qquad \left.\begin{array}{l}\mu_1 = 0^\circ \\ \mu_2 = 2\eta\end{array}\right\} \Rightarrow \mu = 2\eta = 2\varphi$$

3. Fall:



$$\left.\begin{array}{l}\mu_1 = 2\varepsilon \\ \mu_2 = 2\eta\end{array}\right\} \Rightarrow \mu = \mu_2 - \mu_1 = 2(\eta - \varepsilon) = 2\varphi$$

Weiter wie in **a)**.

88/6. **a)** $\varepsilon = 250^\circ$, $\eta = \tau = 35^\circ$ **b)** $5\varepsilon = 180^\circ \Rightarrow \varepsilon = 36^\circ$

c) $\sphericalangle \mathrm{DCA} = \gamma_1 = 40^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
(Der Sehnentangentenwinkel bei A ist 40°.)
$\Rightarrow \beta = 50^\circ \quad \Rightarrow \gamma = 120^\circ$

d) $\varphi = 60^\circ$ **e)** $5\varepsilon = 90^\circ \Rightarrow \varepsilon = 18^\circ$ **f)** $\omega = 18^\circ$

89/7. **a)** $\omega = \varepsilon$ (Das gezeichnete Lot durch M halbiert den Bogen $\widehat{BC}$.)

b) ω ist Umfangswinkel über [BD] $\Rightarrow \sphericalangle BKD = 180° - \omega$, ε ist Umfangswinkel über [BD] im kleinen Kreis. Der zugehörige Mittelpunktswinkel ist
$\mu = 180° - \omega = 2\varepsilon$
$\Rightarrow \omega = 180° - 2\varepsilon$

c) $\sigma = 180° - (\alpha + \beta)$
$\tau = 90° - \beta + \alpha$, $\omega = 90° - \alpha + \beta$

d) $\omega = \psi = \sphericalangle MBE = \varepsilon$ (Umfangswinkel über [MA]);
$\sphericalangle PEO = \varepsilon$, $\sphericalangle BMP = \varrho$ (Symmetrie)
$\Rightarrow 2\varepsilon$ ist Umfangswinkel über [OB] $\Rightarrow \varrho = 2\varepsilon$;
$\sphericalangle ONM = 180° - 4\varepsilon$, $\sphericalangle PNO = 4\varepsilon \Rightarrow \tau = 2\varepsilon$;
2ϱ ist Umfangswinkel über [OB], ebenso $\tau + \sigma$ (als Scheitelwinkel)
$\Rightarrow \tau + \sigma = 2\varrho \Rightarrow \sigma = 4\varepsilon - 2\varepsilon = 2\varepsilon$

89/9. Die Dreiecke AM′M und M′BM müssen gleichseitig sein
$\Rightarrow \varphi = 120°$.

89/10. **a)** Man faßt γ als Mittelpunktswinkel auf. Der Kreis um C mit $r = \overline{AC}$ und m_{AB} schneiden sich in C′.

b) Man faßt γ als Umfangswinkel auf. Der Mittelpunkt des zugehörigen Faßkreisbogens ist C′.

89/11. **a)** Der Faßkreisbogen über c zu 30° schneidet die Parallele zu c im Abstand 6 in C_1 und C_2.

b) Der Faßkreisbogen über b zu 40° schneidet den Kreis um C mit r = 6 in B.

c) Der Faßkreisbogen über b zu 50° schneidet den Kreis um M_b mit r = 5 in B_1 und B_2.

d) Das Teildreieck H_cBC ist mit Hilfe des Thaleskreises über [BC] konstruierbar. Der Faßkreisbogen über a zu 45° schneidet [BH_c in A.

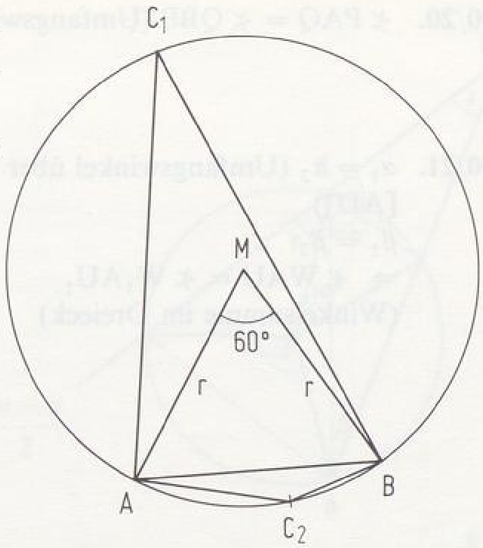
e) Spiegelt man den Punkt C an S_c, so erhält man das Parallelogramm AC′BC. Wegen $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 80°$ liegen A und B auf dem Faßkreisbogenpaar über [CC′] zum Winkel 80°. Außerdem liegt B auf dem Faßkreisbogen über [CS_c] zu 50°.

89/12. Man konstruiert das Faßkreisbogenpaar über [AB] zu 60° und das Faßkreisbogenpaar über [BC] zu 30°. Die Schnittpunkte sind die Lösung.

89/13. Entfernung: 8,6 m

90/14. S(8 | 11)

90/15. Man konstruiert die Faßkreisbögen über den Seiten zum Winkel 120°. Ihr Schnittpunkt ist P.
Ist ein Innenwinkel mindestens 120°, so gibt es keine Lösung.



90/16. Wegen $\mu = 60°$ folgt:
$\gamma = 30°$ oder $\gamma = 150°$.

90/17. **a)** Man konstruiert zuerst $\triangle ABD$. C ergibt sich als Schnittpunkt des Faßkreisbogens über [BD] mit dem Kreis um B mit $r = 6$. (2 Lösungen)

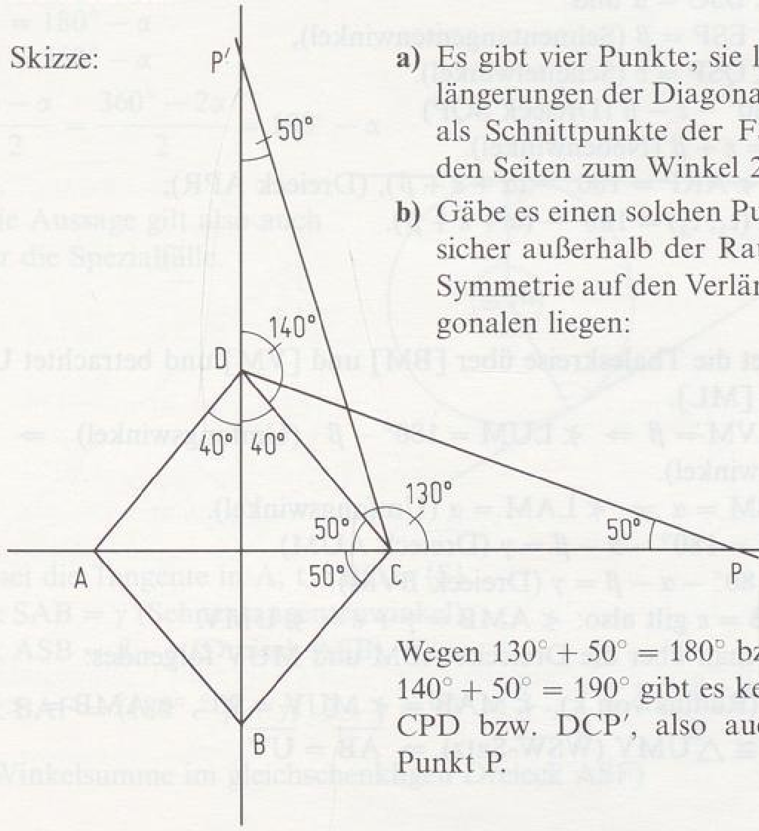
b) Man konstruiert zuerst $\triangle ABC$. D ergibt sich als Schnittpunkt des Faßkreisbogens über [AC] mit dem Kreis um B mit $r = 7$.

c) Man konstruiert zuerst $\triangle ABC$. D ergibt sich als Schnittpunkt des Thaleskreises über [AC] und des Faßkreisbogens über [AB].

90/18. **a)** Der Winkel ist 90°, P ist der Diagonalenschnittpunkt; denn $\sphericalangle APB = 90° = \sphericalangle BPC \Rightarrow \sphericalangle APC = 180°$, d. h., P liegt auf [AC]; ebenso muß P auf [BD] liegen.

b) Das Viereck muß konkav sein; seine Diagonalen müssen aufeinander senkrecht stehen.

90/19. Skizze:

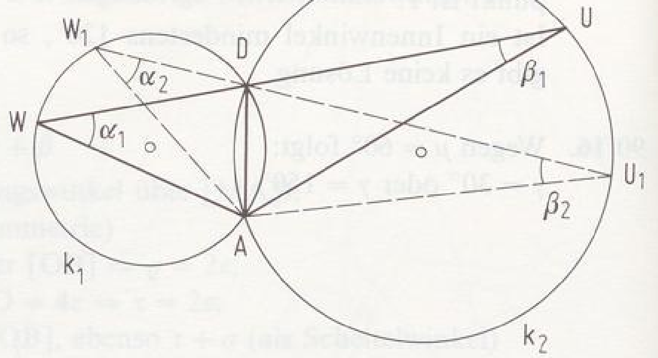


a) Es gibt vier Punkte; sie liegen auf den Verlängerungen der Diagonalen. Man erhält sie als Schnittpunkte der Faßkreisbögen über den Seiten zum Winkel 20°.

b) Gäbe es einen solchen Punkt P, so müßte er sicher außerhalb der Raute und wegen der Symmetrie auf den Verlängerungen der Diagonalen liegen:

Wegen $130° + 50° = 180°$ bzw. $140° + 50° = 190°$ gibt es kein solches Dreieck CPD bzw. DCP′, also auch keinen solchen Punkt P.

90/20. $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle QBP$ (Umfangswinkelsatz)



90/21. $\alpha_1 = \alpha_2$ (Umfangswinkel über [AD])
$\beta_1 = \beta_2$
$\Rightarrow \sphericalangle WAU = \sphericalangle W_1AU_1$
(Winkelsumme im Dreieck)

90/22. **a)** $\sphericalangle IWE = 180° - \alpha \Rightarrow \sphericalangle IRE = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (Umfangswinkel)

$\sphericalangle IWR = 180° - \gamma \Rightarrow \sphericalangle REI = 90° - \frac{\gamma}{2}$

$\sphericalangle EWR = 180° - \beta \Rightarrow \sphericalangle EIR = 90° - \frac{\beta}{2}$

b) Wäre ERI rechtwinklig, so müßte α, β oder γ 0° haben. **c)** siehe a)

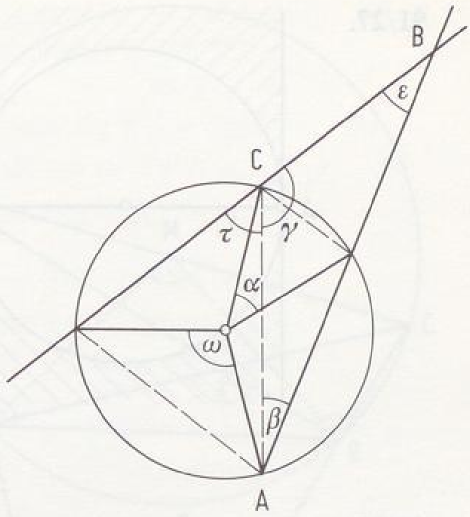
91/23. t_1 schneide AR in C und k_2 in D, t_2 schneide QR in E und k_1 in F.
$\sphericalangle SAB = \sphericalangle BSC = \alpha$ und
$\sphericalangle PQS = \sphericalangle ESP = \beta$ (Sehnentangentenwinkel),
$\sphericalangle ASB = \sphericalangle QSP = \varepsilon$ (Scheitelwinkel).
$\sphericalangle QPS = 180° - \varepsilon - \beta$ (Dreieck SQP)
$\Rightarrow \sphericalangle SPR = \varepsilon + \beta$ (Nebenwinkel).
Damit gilt: $\sphericalangle ARP = 180° - (\alpha + \varepsilon + \beta)$, (Dreieck APR);
$\sphericalangle CSP = \sphericalangle(t_1, t_2) = 180° - (\alpha + \varepsilon + \beta)$.

91/24. Man zeichnet die Thaleskreise über [BM] und [VM] und betrachtet Umfangswinkel über [ML].
Es sei $\sphericalangle LVM = \beta \Rightarrow \sphericalangle LUM = 180° - \beta$ (Umfangswinkel) $\Rightarrow \sphericalangle MUA = \beta$ (Nebenwinkel).
Es sei $\sphericalangle LBM = \alpha \Rightarrow \sphericalangle LAM = \alpha$ (Umfangswinkel).
$\Rightarrow \sphericalangle AMU = 180° - \alpha - \beta = \gamma$ (Dreieck AUM)
$\sphericalangle BMV = 180° - \alpha - \beta = \gamma$ (Dreieck BVM)
Mit $\sphericalangle UMB = \varepsilon$ gilt also: $\sphericalangle AMB = \gamma + \varepsilon = \sphericalangle UMV$.
Damit weiß man über die Dreiecke ABM und MUV folgendes:
$\overline{AM} = \overline{UM}$ (Radius von k), $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MUV = 90°$, $\sphericalangle AMB = \sphericalangle UMV$.
$\Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle UMV$ (WSW-Satz) $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{UV}$.

91/25. $\tau = \dfrac{\omega}{2}$ (Umfangswinkel)

$\gamma = 180° - \dfrac{\omega}{2}$ (Nebenwinkel)

$\beta = \dfrac{\alpha}{2}$ (Umfangswinkel)



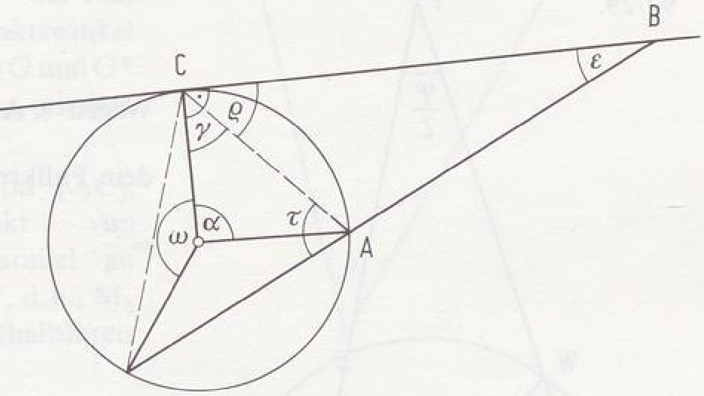
$\triangle$ABC: $\varepsilon = 180° - (\beta + \gamma) =$

$= 180° - \left(\dfrac{\alpha}{2} + 180° - \dfrac{\omega}{2}\right) = \dfrac{\omega - \alpha}{2}$

Spezialfall 1: Eine Gerade ist Tangente.

$\tau = \dfrac{\omega}{2}$

$\gamma = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$



$\Rightarrow \varrho = \dfrac{\alpha}{2}$

$\triangle$ABC: $\tau = \varrho + \varepsilon$

(Außenwinkel)

$\varepsilon = \dfrac{\omega}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$

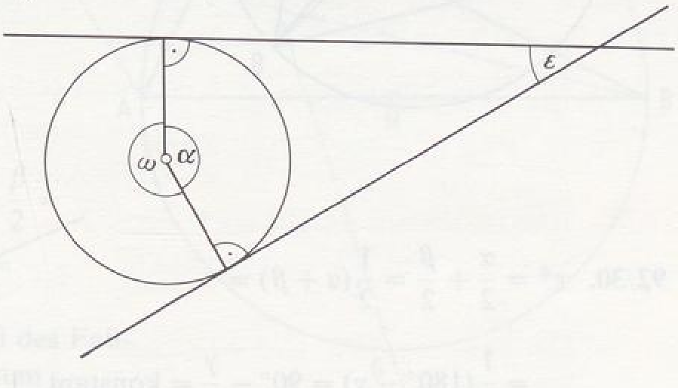
Spezialfall 2: Beide Geraden sind Tangenten.

$\varepsilon = 180° - \alpha$

$\omega = 360° - \alpha$

$\dfrac{\omega - \alpha}{2} = \dfrac{360° - 2\alpha}{2} = 180° - \alpha$

Die Aussage gilt also auch für die Spezialfälle.



91/26. t sei die Tangente in A; $t \cap BC = \{S\}$.

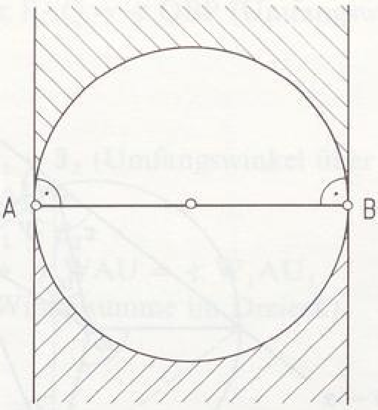
$\sphericalangle$ SAB $= \gamma$ (Sehnentangentenwinkel),

$\sphericalangle$ ASB $= \beta - \gamma$ (Dreieck ASB),

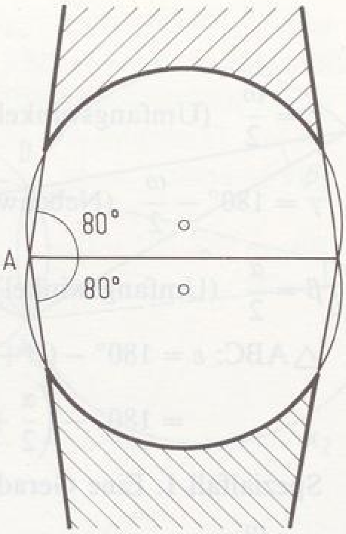
$\sphericalangle$ BAF $= (180° - \beta + \gamma) : 2 - \gamma = 90° - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$

(Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck ASF)

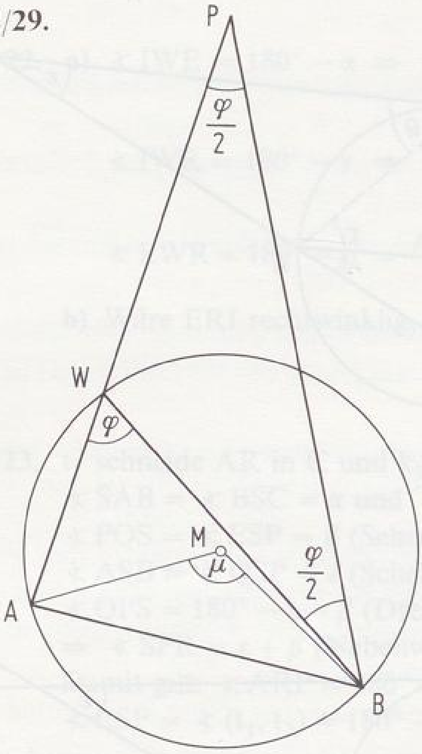
91/27.



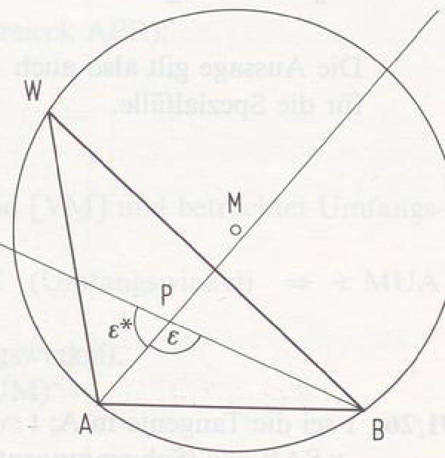
92/28.



92/29.



Wegen $\sphericalangle$ APB $= \dfrac{\varphi}{2} =$ konstant wandert P auf dem Faßkreisbogen über [AB] zum Winkel $\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\mu}{4}$.



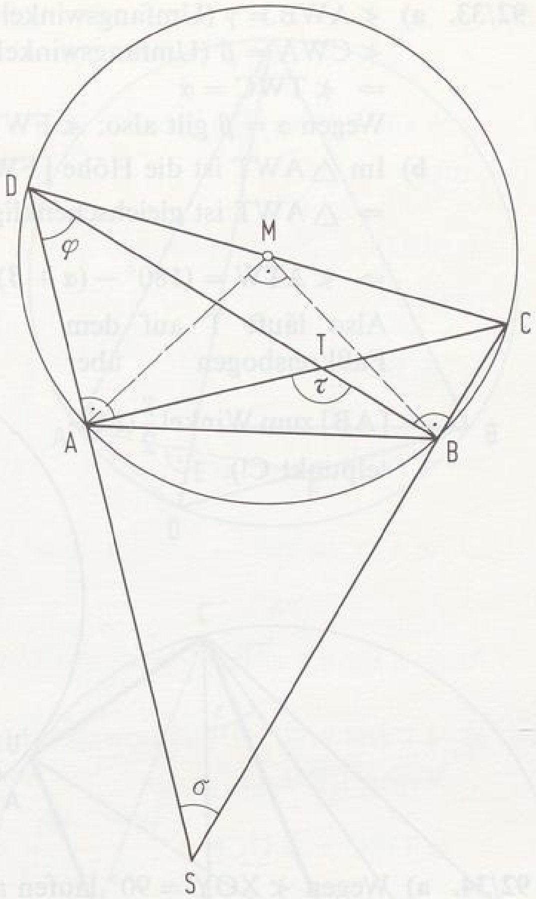
92/30. $\varepsilon^* = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta) =$

$= \dfrac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° - \dfrac{\gamma}{2} =$ konstant

$\Rightarrow \varepsilon = 90° + \dfrac{\gamma}{2}$

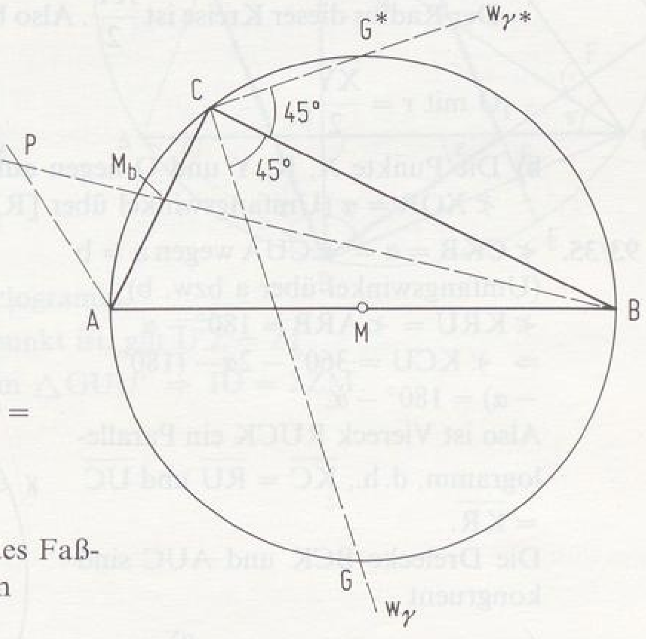
Also wandert P auf dem Faßkreisbogen über [AB] zum Umfangswinkel $\varphi = 90° + \dfrac{\gamma}{2}$.

92/31. $\varphi = 45°$ (Umfangswinkel über [AB])
$\Rightarrow \tau = 90° + 45° = 135°$
$\sigma = 45°$ ($\triangle$SBD)
S und T laufen also auf dem Faßkreisbogen über [AB] zum Winkel 45° bzw. 135°. Beide Faßkreisbögen ergeben zusammen einen Kreis.



92/32. **a)** Wegen $\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma^*}{2} = 45°$ sind beide Winkel Umfangswinkel über [GB] bzw. [BG*]. Da B fest bleibt, muß dies auch für G und G* der Fall sein. Da der Mittelpunktswinkel 90° sein muß, erhält man G und G* als Schnittpunkte von m_{AB} mit dem Kreis.

b) M_b ist Mittelpunkt von [AC], M ist Mittelpunkt von [AB] $\Rightarrow$ M_bM ist parallel zu BC $\Rightarrow \sphericalangle AM_bM = 90°$, d.h., M_b liegt auf dem Thales(halb)kreis über [AM].



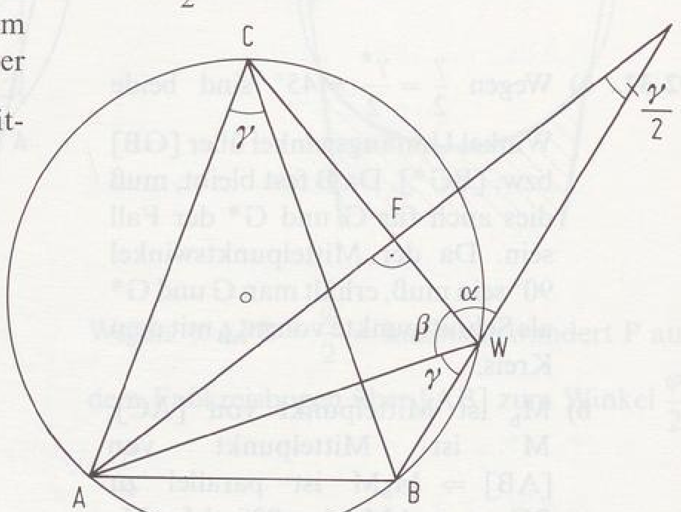
c) $\sphericalangle APB =$
$= 180° - \alpha - \frac{\alpha^*}{2} - \frac{\beta}{2} =$
$= 180° - \alpha - \frac{\beta}{2} - 45° - \frac{\beta}{2} =$
$= 180° - (\alpha + \beta) - 45° =$
$= 45°$
$\Rightarrow$ P läuft auf einem Teil des Faßkreisbogens über [AB] zum Winkel 45°.

92/33. **a)** $\sphericalangle$ AWB $= \gamma$ (Umfangswinkel über [AB])
$\sphericalangle$ CWA $= \beta$ (Umfangswinkel über [AC])
$\Rightarrow$ $\sphericalangle$ TWC $= \alpha$
Wegen $\alpha = \beta$ gilt also: $\sphericalangle$ FWT $=$ $\sphericalangle$ FWA.

b) Im $\triangle$AWT ist die Höhe [FW] zugleich Winkelhalbierende
$\Rightarrow$ $\triangle$AWT ist gleichschenklig, also $\overline{AW} = \overline{WT}$

$\Rightarrow$ $\sphericalangle$ ATW $= (180° - (\alpha + \beta)) : 2 = \frac{\gamma}{2} =$ konst.

Also läuft T auf dem Faßkreisbogen über [AB] zum Winkel $\frac{\gamma}{2}$ (Mittelpunkt C!).



92/34. **a)** Wegen $\sphericalangle$ XOY $= 90°$ laufen alle Thaleskreise über [XY] (um M) durch O.

Der Radius dieser Kreise ist $\frac{\overline{XY}}{2}$. Also bewegt sich M auf dem Viertelkreis um

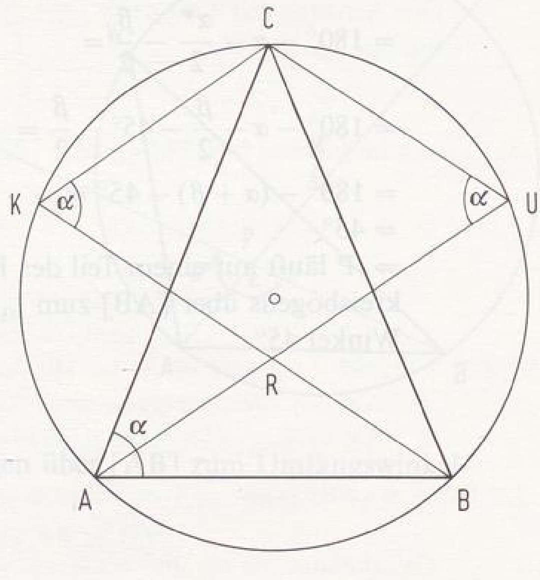
O mit $r = \frac{\overline{XY}}{2}$.

b) Die Punkte X, R, Y und O liegen auf dem Thaleskreis über [XY]. Wegen $\sphericalangle$ XOR $= \alpha$ (Umfangswinkel über [RX]) läuft R auf der Geraden OR.

93/35. $\sphericalangle$ CKB $= \alpha =$ $\sphericalangle$ CUA wegen a = b (Umfangswinkel über a bzw. b)
$\sphericalangle$ KRU $=$ $\sphericalangle$ ARB $= 180° - \alpha$
$\Rightarrow$ $\sphericalangle$ KCU $= 360° - 2\alpha - (180° - \alpha) = 180° - \alpha$.
Also ist Viereck RUCK ein Parallelogramm, d.h., $\overline{KC} = \overline{RU}$ und $\overline{UC} = \overline{KR}$.
Die Dreiecke BCK und AUC sind kongruent

$\left(a = b, \sphericalangle K = \sphericalangle U, \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow$

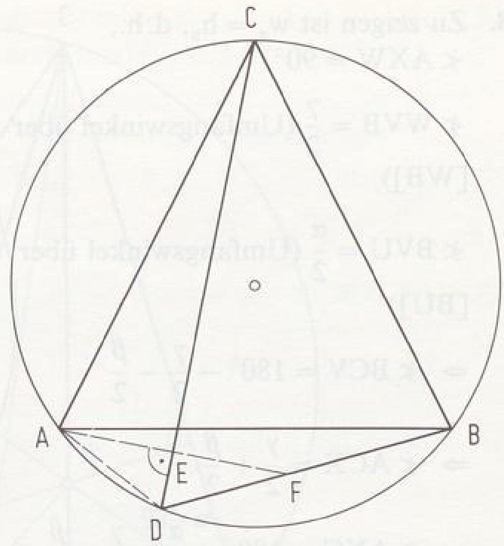
$\Rightarrow \overline{KC} = \overline{UC}$.
RUCK hat damit 4 gleich lange Seiten und ist eine Raute.



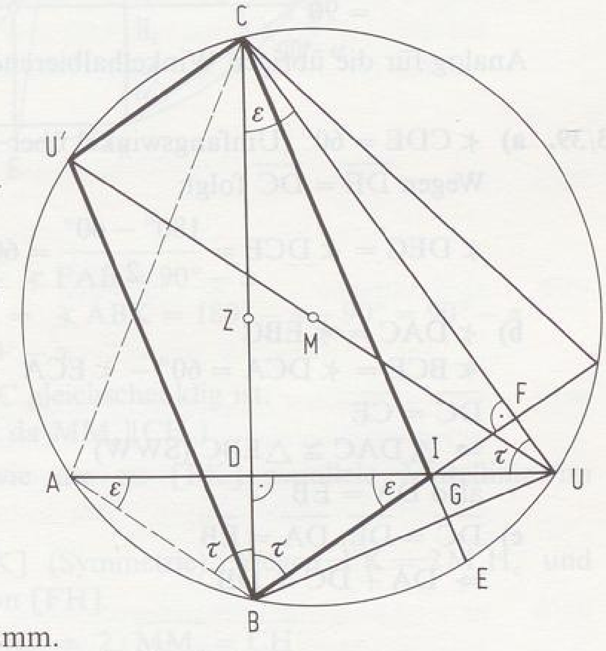
93/36. **a)** E wandert auf dem Thaleskreis über [AC].

b) Wegen $\triangle ADE \cong \triangle DFE$ ([DE] ist gemeinsame Seite, $\sphericalangle AED = \sphericalangle FED = 90°$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDF$ als Umfangswinkel wegen $a = b$) gilt $\overline{AE} = \overline{EF}$. Da $\sphericalangle AED = 90°$ ist, wird [AF] von CD senkrecht halbiert, d.h., A und F liegen symmetrisch bezüglich CD.

c) Nach **b)** gilt $\overline{AC} = \overline{FC}$. Da $\overline{AC}$ konstant ist, wandert F auf dem Kreis um C mit $r = \overline{CA}$.



93/37. **a)** BI schneidet CU in F.
Es ist zu zeigen: $BF \perp CU$.
$\sphericalangle DCU + \sphericalangle CUD = 90°$, da $\sphericalangle UDC = 90°$.
$\sphericalangle ABC = \sphericalangle AUC$ (Umfangswinkel)
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBI$ (Symmetrie)
$\Rightarrow \sphericalangle CBF + \sphericalangle BCF = \sphericalangle AUC + \sphericalangle BCF = 90°$,
also gilt $\sphericalangle BFC = 90°$.



b) $\sphericalangle U'BU = 90° = \sphericalangle CGB$
$\Rightarrow U'B \parallel CI$
$\sphericalangle BFC = 90° = \sphericalangle U'CU$
$\Rightarrow U'C \parallel BI$
also ist CIBU' ein Parallelogramm.

c) Da Z Diagonalenschnittpunkt ist, gilt $\overline{U'Z} = \overline{ZI}$
$\Rightarrow$ [ZM] ist Mittellinie im $\triangle GUU'$ $\Rightarrow$ $\overline{IU} = 2\overline{ZM}$.

93/38. Zu zeigen ist $w_\alpha = h_u$, d.h.,

$\sphericalangle AXW = 90°$.

$\sphericalangle WVB = \frac{\gamma}{2}$ (Umfangswinkel über [WB])

$\sphericalangle BVU = \frac{\alpha}{2}$ (Umfangswinkel über [BU])

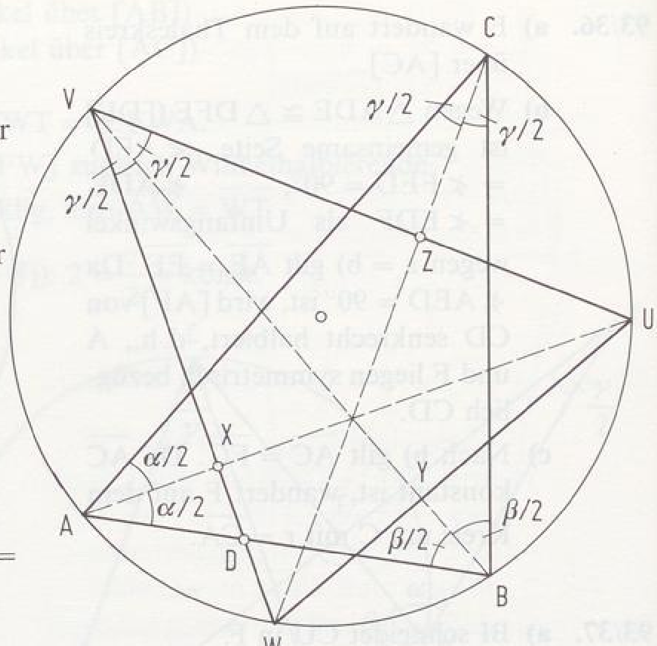
$\Rightarrow \sphericalangle BCV = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$

$\Rightarrow \sphericalangle ACX = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2}$

$\Rightarrow \sphericalangle AXC = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} =$

$= 90°$.

Analog für die übrigen Winkelhalbierenden.



93/39. **a)** $\sphericalangle CDE = 60°$ (Umfangswinkel über [BC])

Wegen $\overline{DE} = \overline{DC}$ folgt:

$\sphericalangle DEC = \sphericalangle DCE = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$

b) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EBC$

$\sphericalangle BCE = \sphericalangle DCA = 60° - \sphericalangle ECA$

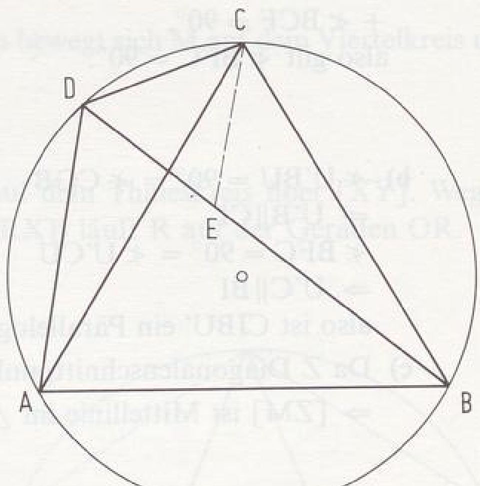
$\overline{DC} = \overline{CE}$

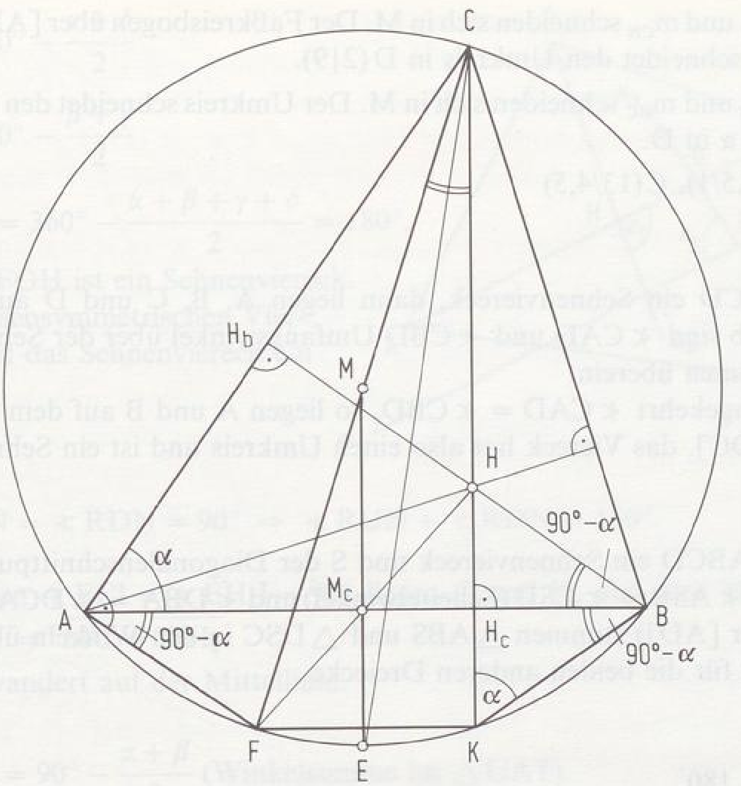
$\Rightarrow \triangle DAC \cong \triangle EBC$ (SWW)

also $\overline{DA} = \overline{EB}$

c) $\overline{DC} = \overline{DE}$, $\overline{DA} = \overline{EB}$

$\Rightarrow \overline{DA} + \overline{DC} = \overline{DB}$





93/40. **a)** $\sphericalangle FAC = 90°$ (Thaleskreis) $\Rightarrow$ $\sphericalangle FAB = 90° - \alpha$
$\sphericalangle CKB = \alpha$ (Umfangswinkel) $\Rightarrow$ $\sphericalangle ABK = 180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha$
$\sphericalangle ABH = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

b) $\sphericalangle MCE = \sphericalangle MEC$, da $\triangle MEC$ gleichschenklig ist.
$\sphericalangle MEC = \sphericalangle ECK$ (Z-Winkel, da $MM_c \parallel CH_c$)

c) $[M_cH_c]$ ist genauso lang wie die zu $[FK]$ parallele Mittellinie im $\triangle FKC \Rightarrow \overline{FK} = 2\overline{M_cH_c}$.

d) H_c ist Mittelpunkt von $[HK]$ (Symmetrie). Wegen $\overline{FK} = 2\overline{M_cH_c}$ und $M_cH_c \parallel FK$ ist M_c die Mitte von $[FH]$.

e) $[MM_c]$ ist Mittellinie im $\triangle FHC \Rightarrow 2 \cdot \overline{MM_c} = \overline{CH}$

f) Wegen $\overline{AF} = \overline{KB}$ gilt $\sphericalangle ACF = \sphericalangle KCB$. Wegen **b)** ist also w_γ Halbierende von $\sphericalangle MCH$.

Aufgaben zu 4.2

95/1. **a)** Im Kreis mit $r = 5$ wird b als Sehne abgetragen. Trägt man β an, so erhält man A als Schnittpunkt eines Schenkels mit dem Kreis. Nun liefert das Antragen von α bei A den Punkt D.

b) Man konstruiert $\triangle BCD$. Die Mittelsenkrechten m_c und m_b schneiden sich im Umkreismittelpunkt M. Der Kreis um D mit $r = 2$ schneidet den Umkreis in A.

c) Man konstruiert $\triangle ABC$. Die Mittelsenkrechten m_a und m_b ergeben den Umkreismittelpunkt M. Der Kreis um C mit $r = b$ ergibt D.

95/2. **a)** m_{AB} und m_{CB} schneiden sich in M. Der Faßkreisbogen über [AM] zum Winkel 45° schneidet den Umkreis in D(2|9).

b) m_{AB} und m_{BC} schneiden sich in M. Der Umkreis schneidet den freien Schenkel von α in D.

c) B(9,5/1), C(13/4,5)

95/3. Ist ABCD ein Sehnenviereck, dann liegen A, B, C und D auf einem Kreis. Deshalb sind $\sphericalangle$ CAD und $\sphericalangle$ CBD Umfangswinkel über der Sehne [DC], d.h., sie stimmen überein.
Gilt umgekehrt $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$, so liegen A und B auf dem Faßkreisbogen über [DC], das Viereck hat also einen Umkreis und ist ein Sehnenviereck.

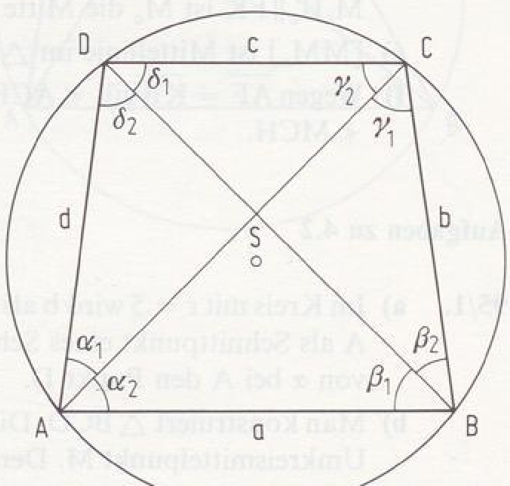
95/4. Es sei ABCD ein Sehnenviereck und S der Diagonalenschnittpunkt.
Wegen $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$ (Scheitelwinkel) und $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$ (Umfangswinkel über [AD]) stimmen $\triangle ABS$ und $\triangle DSC$ in den Winkeln überein.
Analog für die beiden anderen Dreiecke.

95/5. $\alpha + \gamma = 180°$

96/6. **a)** Rechtecke **b)** Quadrate **c)** gleichschenklige Trapeze

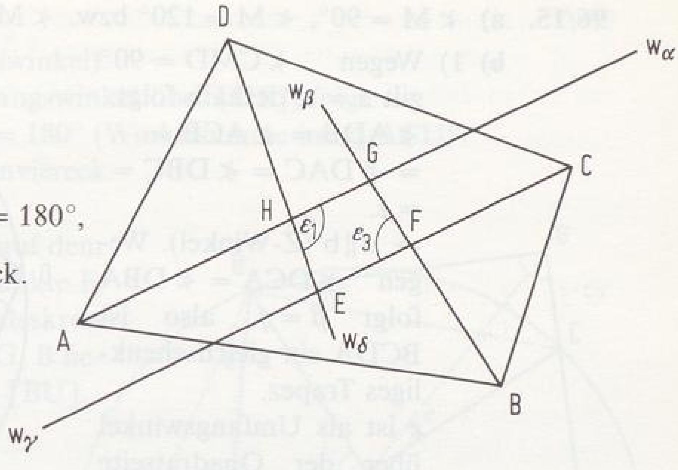
96/7. Sind die beiden rechten Winkel Nachbarwinkel, so ist der Drachen wegen der Achsensymmetrie ein Quadrat, also ein Sehnenviereck.
Sind die beiden rechten Winkel Gegenwinkel, so ist der Umkreis der Thaleskreis der beiden rechtwinkligen Teildreiecke.

96/8. Es sei ABCD ein Sehnenviereck mit b = d. Wegen $\alpha_1 = \beta_2$ (Umfangswinkel über [DC]), b = d und $\delta_2 = \gamma_1$ (Umfangswinkel über [AB]) folgt: $\triangle ASD \cong \triangle BCS$.
Deshalb sind die Dreiecke ABS und CDS gleichschenklig. Da die Winkel an der Spitze als Scheitelwinkel gleich sind, müssen auch die Basiswinkel übereinstimmen: $\beta_1 = \delta_1 \Rightarrow a \| c$.
Wegen $\beta_1 = \alpha_2$ folgt weiter: $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$, d.h., die Winkel an einer Basis des Trapezes sind gleich.



96/9. $\sphericalangle H_a + \sphericalangle H_b = 180°$.

96/10. $\varepsilon_1 = 180° - \frac{\alpha+\delta}{2}$



$\varepsilon_3 = 180° - \frac{\beta+\gamma}{2}$

$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 360° - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180°,$

d.h., EFGH ist ein Sehnenviereck. Bei achsensymmetrischen Vierecken ist das Sehnenviereck ein Punkt.

96/11. $\sphericalangle \text{RUN} = \sphericalangle \text{RDN} = 90° \Rightarrow \sphericalangle \text{RUN} + \sphericalangle \text{RDN} = 180°$

96/12. **a)** Wegen $\sphericalangle \text{ECI} = \sphericalangle \text{EH}_c\text{I} = 90°$ liegen C und H_c auf dem Thaleskreis über [EI] $\Rightarrow \overline{\text{MC}} = \overline{\text{MH}_c}$.

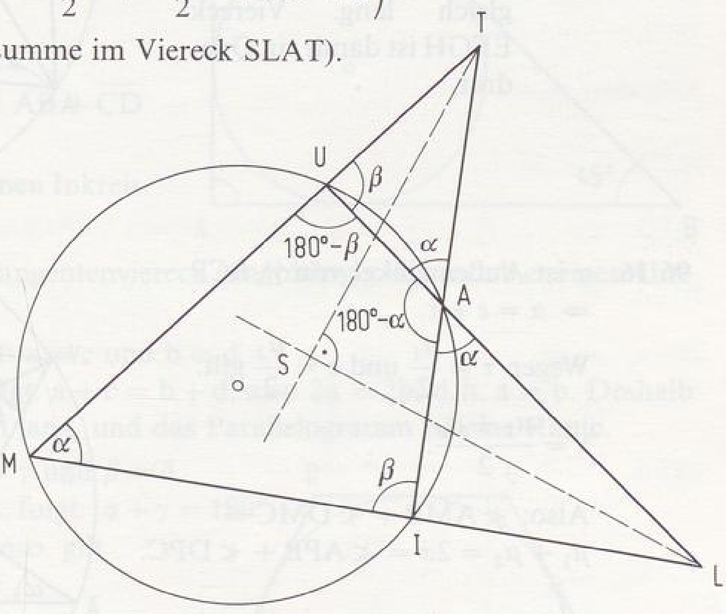
b) M wandert auf der Mittellinie.

96/13. $\sphericalangle \text{STA} = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2}$ (Winkelsumme im $\triangle$UAT)

$\sphericalangle \text{SLA} = \frac{\beta-\alpha}{2}$ (Winkelsumme im $\triangle$MLU)

$\Rightarrow \sphericalangle \text{TSL} = 360° - \left(90° - \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} + 180° + \alpha\right) =$

$= 90°$ (Winkelsumme im Viereck SLAT).

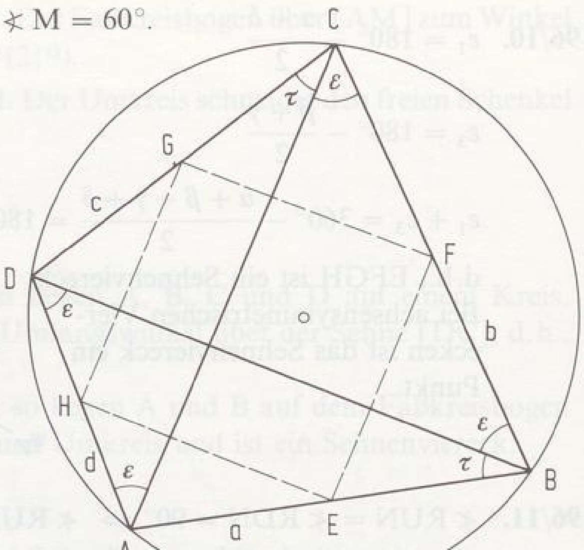


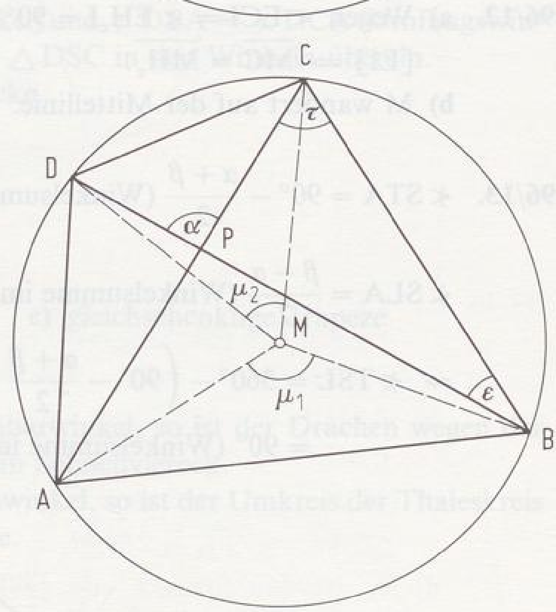
96/14. $\sphericalangle \text{UCA} = \sphericalangle \text{ABU}$ (Umfangswinkel über [AU]).
Wegen $\sphericalangle \text{HH}_b\text{C} = 90° = \sphericalangle \text{HH}_c\text{B}$ und $\sphericalangle \text{H}_b\text{HC} = \sphericalangle \text{H}_c\text{HB}$ (Scheitelwinkel) folgt $\sphericalangle \text{ABU} = \sphericalangle \text{H}_c\text{BH} = \sphericalangle \text{HCH}_b = \sphericalangle \text{HCA}$.
$\Rightarrow \sphericalangle \text{UCA} = \sphericalangle \text{ACH}$

96/15. **a)** $\sphericalangle M = 90°$, $\sphericalangle M = 120°$ bzw. $\sphericalangle M = 60°$.

b) 1) Wegen $\sphericalangle CMD = 90°$ gilt $a = c$, deshalb folgt: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = = \varepsilon$.
$\Rightarrow d \| b$ (Z-Winkel). Wegen $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA$ folgt $\beta = \gamma$, also ist BCDA ein gleichschenkliges Trapez.
ε ist als Umfangswinkel über der Quadratseite 45°, also stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

2) Die Seiten des Vierecks EFGH sind als Dreiecksmittellinien jeweils parallel zu den Diagonalen des Trapezes; daher sind die Innenwinkel jeweils 90°. Außerdem sind sie jeweils halb so lang wie eine Diagonale, also gleich lang. Viereck EFGH ist damit ein Quadrat.



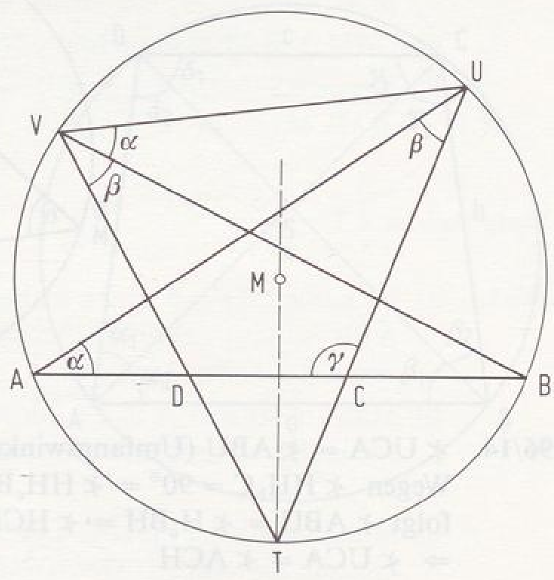


96/16. α ist Außenwinkel von $\triangle BCP$
$\Rightarrow \alpha = \varepsilon + \tau$

Wegen $\tau = \dfrac{\mu_1}{2}$ und $\varepsilon = \dfrac{\mu_2}{2}$ gilt:

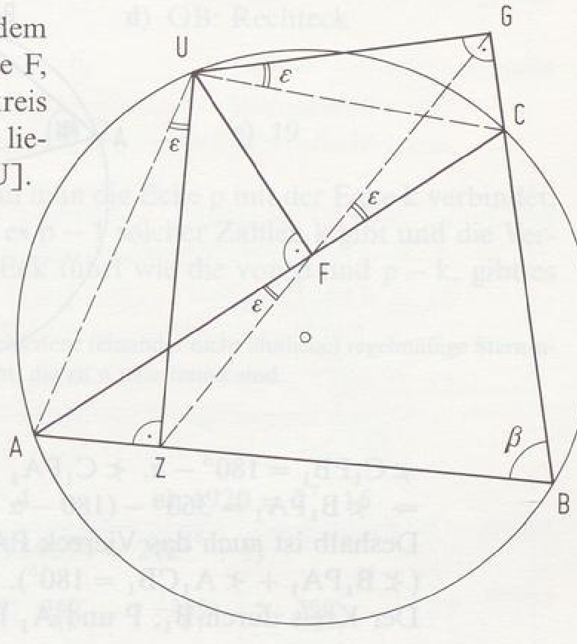
$\alpha = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2}$.

Also: $\sphericalangle AMB + \sphericalangle DMC = \mu_1 + \mu_2 = 2\alpha = \sphericalangle APB + \sphericalangle DPC$.

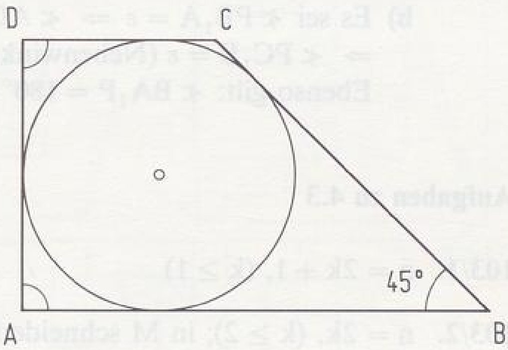


96/17. $\overline{TA} = \overline{TB}$ (Symmetrie)
$\Rightarrow \measuredangle BVD = \measuredangle CUA$ (Umfangswinkel).
Wegen $\measuredangle UAB = \measuredangle UVB$ (Umfangswinkel über [UB]) folgt:
$\measuredangle DCU + \measuredangle DVU = \gamma + \alpha + \beta = 180°$ (Winkelsumme im $\triangle ACU$)
$\Rightarrow$ Viereck DCUV ist ein Sehnenviereck.

97/18.
1. Die Punkte F, U, A, Z liegen auf dem Thaleskreis über [AU], die Punkte F, U, G, C liegen auf dem Thaleskreis über [UC], die Punkte Z, U, G, B liegen auf dem Thaleskreis über [BU].
2. ABCU ist ein Sehnenviereck
   $\Rightarrow \measuredangle AUC + \beta = 180°$
   ZBGU ist ein Sehnenviereck
   $\Rightarrow \measuredangle ZUG + \beta = 180°$.
3. $\measuredangle AUZ = \measuredangle AFZ$ (Umfangswinkel über [AZ]);
   $\measuredangle GUC = \measuredangle GFC$ (Umfangswinkel über [GC])
   Nach 2) gilt aber $\measuredangle AUZ = \measuredangle GUC$.
4. $\measuredangle GFZ = 90° - \varepsilon + 90° + \varepsilon = 180°$



97/19.
a) Gegenbeispiel:
Wegen $\beta + \delta = 135° \neq 180°$ gibt es keinen Umkreis.



b) Gegenbeispiel: Rechteck

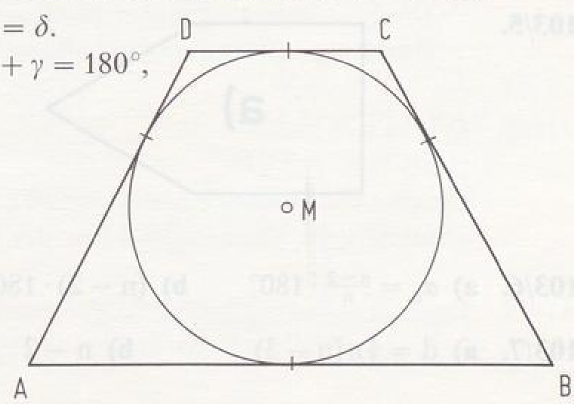
c) In jedem Drachen gilt: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$
$\Rightarrow$ Der Drachen hat einen Inkreis.

d) Jeder Drachen ist ein Tangentenviereck (unabhängig davon, ob er einen Umkreis hat).

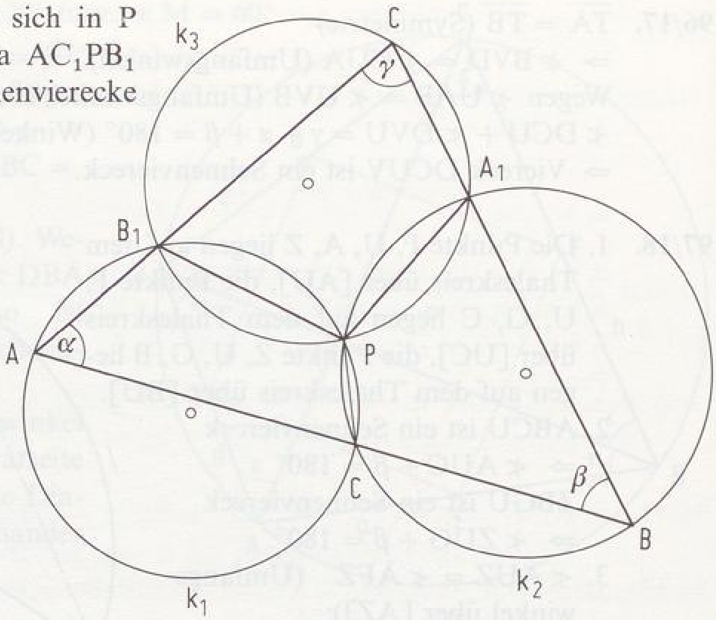
e) Im Parallelogramm gilt: $a = c$ und $b = d$.
Wegen des Inkreises folgt: $a + c = b + d$, also $2a = 2b$, d.h. $a = b$. Deshalb sind alle 4 Seiten gleich lang, und das Parallelogramm ist eine Raute.

f) In einer Raute gilt: $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$.
Wegen des Umkreises folgt: $\alpha + \gamma = 180°$, also $\alpha = \gamma = 90°$. Ebenso gilt $\beta = \delta = 90°$, die Raute ist also ein Quadrat.

g) Gegenbeispiel:
Gleichschenkliges Trapez mit Inkreis



97/20. **a)** k_1 und k_2 schneiden sich in P (i.a. gilt: $P \neq C_1$). Da AC_1PB_1 und C_1BA_1P Sehnenvierecke sind, gilt:



$\sphericalangle C_1PB_1 = 180° - \alpha$, $\sphericalangle C_1PA_1 = 180° - \beta$.
$\Rightarrow \sphericalangle B_1PA_1 = 360° - (180 - \alpha + 180° - \beta) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$.
Deshalb ist auch das Viereck PA_1CB_1 ein Sehnenviereck ($\sphericalangle B_1PA_1 + \sphericalangle A_1CB_1 = 180°$).
Der Kreis durch B_1, P und A_1 läuft also durch C und ist k_3.

b) Es sei $\sphericalangle PB_1A = \varepsilon \Rightarrow \sphericalangle AC_1P = 180° - \varepsilon$ (Sehnenviereck)
$\Rightarrow \sphericalangle PC_1B = \varepsilon$ (Nebenwinkel)
Ebenso gilt: $\sphericalangle BA_1P = 180° - \varepsilon$ und somit $\sphericalangle PA_1C = \varepsilon$.

Aufgaben zu 4.3

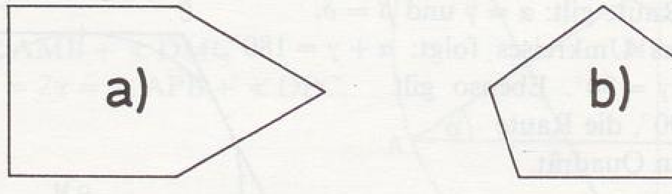
103/1. $n = 2k + 1$, $(k \geq 1)$

103/2. $n = 2k$, $(k \geq 2)$; in M schneiden sich $\frac{n}{2}$ Diagonalen.

103/3. **a)** $(12 - 2) \cdot 180° = 1800°$ **b)** $n = 100$, $\alpha_{100} = 176{,}4°$

103/4. **a)** $60°$ **b)** $90°$ **c)** $108°$ **d)** $156°$ **e)** $\frac{2700°}{17} \approx 158{,}8°$
f) $\frac{2940°}{17} \approx 172{,}9°$ **g)** $\frac{2988°}{17} \approx 175{,}8°$ **h)** $\frac{3036°}{17} \approx 178{,}6°$ **i)** $\frac{45900°}{257} \approx 178{,}6°$

103/5.



103/6. **a)** $\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$ **b)** $(n-2) \cdot 180°$ **c)** $360°$ **d)** $\frac{1}{2}\alpha_n$ **e)** $\mu = \frac{360°}{n}$

103/7. **a)** $d = \frac{1}{2}n(n-3)$ **b)** $n - 2$

103/8. a) Ein regelmäßiges n-Eck hat n Symmetrieachsen. Ist n gerade, so sind die $^n/_2$ Mittelsenkrechten und die $^n/_2$ Winkelhalbierenden Symmetrieachsen. Ist n ungerade, so fallen die Mittelsenkrechten mit den Winkelhalbierenden zusammen.

b) n-Ecke mit geradem n sind punktsymmetrisch.

103/9. a) GB: $n = 7$ c) GB: Raute d) GB: Rechteck

f) GB: Dreieck und Quadrat

103/10. a) 3 b) 3 c) 7 d) 2 e) 19

103/11. Ein regelmäßgies p-Eck entsteht, wenn man die Ecke p mit der Ecke k verbindet, wobei p und k teilerfremd sind. Weil es $p - 1$ solcher Zahlen k gibt und die Verbindung von p und k zum selben p-Eck führt wie die von p und $p - k$, gibt es $\frac{1}{2}(p - 1)$ regelmäßige p-Ecke.

Bemerkung: Für jedes n existieren so viele verschiedene (einander nicht ähnliche) regelmäßige Stern-n-Ecke, wie es ganze Zahlen k mit $1 < k < {}^n/_2$ gibt, die zu n teilerfremd sind.

103/12. a) $n = 50$ b) $n = 200$

104/14. a) $192 = 2^6 \cdot 3$ b) $512 = 2^7 \cdot 4$ c) $1920 = 2^7 \cdot 15$

d) $17408 = 2^{10} \cdot 17$ e) $8\,589\,934\,594 = 2(2^{2^5} + 1)$

104/15. Zum Beispiel: $\frac{360°}{51} = 6 \cdot \frac{360°}{17} - 1 \cdot \frac{360°}{3}$, $\frac{360°}{85} = 7 \cdot \frac{360°}{17} - 2 \cdot \frac{360°}{5}$

5. Kapitel

Aufgaben zu 5.1

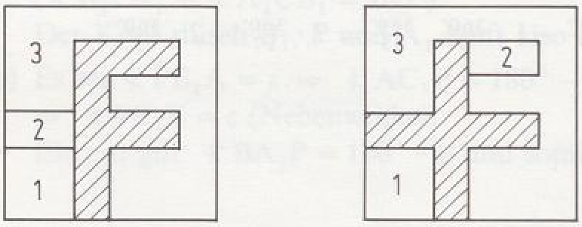
108/1. **a)** 16 **b)** 23,5 **c)** 27 **d)** 21

109/2. **a)** 396 **b)** 297 **c)** 306 **d)** 360 **e)** 567
Beim Maßstab II sinkt der Flächeninhalt auf das $\frac{1}{4}$-fache.
Beim Maßstab III steigt der Flächeninhalt auf das 4-fache.

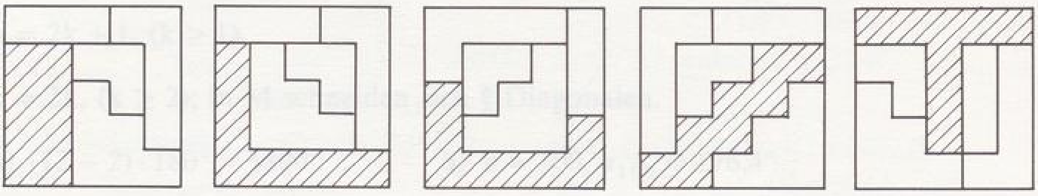
109/3. **a)** $\triangle ACD \cong \triangle BEF$ (SSS-Satz)
$\Rightarrow$ Die Parallelogramme sind flächengleich.
b) $\triangle AFD \cong \triangle BEC$ (SSS-Satz)
$\Rightarrow$ Die Parallelogramme sind flächengleich.
c) $\triangle AFD \cong \triangle BEC$ (SSS-Satz)
Durch Hinzufügen eines dieser Dreiecke zum Parallelogramm erhält man jeweils das Trapez ABED, also sind die Parallelogramme flächengleich.

109/4. Die Figuren sind jeweils zerlegungsgleich (z. B. Zerlegung in „halbe Kästchen").

109/5.



110/6.

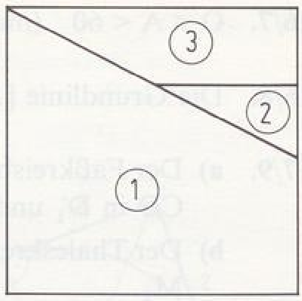


110/7. **a)** Man verbinde (0|3) und (9|6).
b) Man verbinde (0|2) und (15|7).
(Da jeweils beide Figuren punktsymmetrisch sind, werden sie von der Geraden durch ihre Mittelpunkte halbiert.)

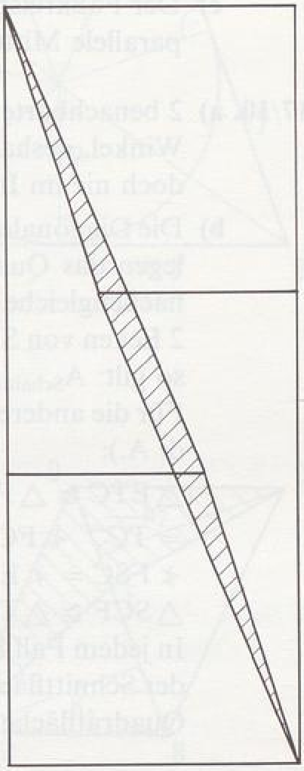
110/8. $\triangle UMT \cong \triangle MRT$
$\triangle OTN \cong \triangle TSN$
Da auch die Dreiecke AMN und MEN kongruent sind, folgt aus der Ergänzungsgleichheit die Flächengleichheit der beiden Parallelogramme.

110/9. Ergänzt man die schwarze Figur jeweils mit 4 kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, so erhält man das äußere Quadrat.

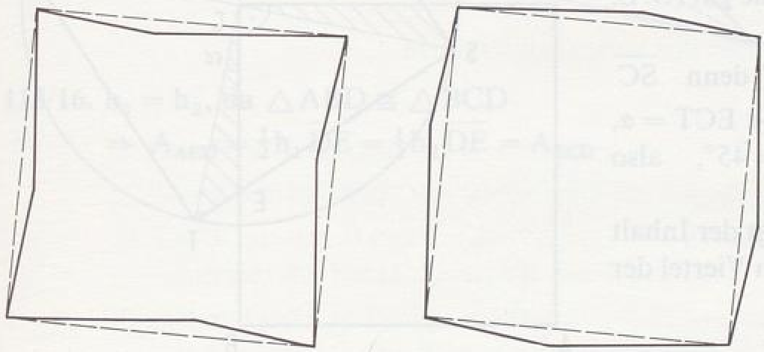
111/10. Alle Figuren bestehen aus folgenden 3 Teilflächen ①, ②, ③:



111/11. Die Verbindungslinie der Ecken im Rechteck ist nicht die Diagonale (Steigungen: $\frac{13}{5}$ bzw. $\frac{8}{3}$), d.h., in Wirklichkeit überlappen sich beim Rechteck die Dreiecke und die Trapeze.
(Inhalt der Überlappungsfläche: 169–168!)
Übertrieben gezeichnet!



111/12. Die Seiten der „Quadrate" sind jeweils geknickt, beim oberen nach innen, beim unteren nach außen.
Übertrieben gezeichnet!



Aufgaben zu 5.2

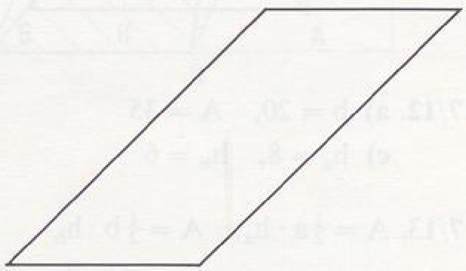
115/1. **a)** $A = 13{,}2$ **b)** $A = 4$ **c)** $A = 10$

116/2. **a)** $a = 9$ **b)** $h_b = 20$

116/3. $h_b = 3{,}22$

116/4. $h = 7$

116/5. Die Figuren 1, 2 und 3 sind jeweils paarweise kongruent.
$\Rightarrow A_R = g' \cdot h' = A_P$.
Der Beweis klappt z.B. nicht bei:



116/6. **a)** $\overline{KC} = \overline{ZI} = \frac{1}{2}\overline{TA}, \quad h_\triangle = 2 \cdot h_P$
b) wie **a)** **c)** folgt aus **a)** und **b)**.

116/7. $O < A < 60$ (max. Parallelogrammfläche : Rechtecksfläche)

116/8. Die Grundlinie $[AB]$ und die Höhe h_a bleiben jeweils gleich. (Scherung!)

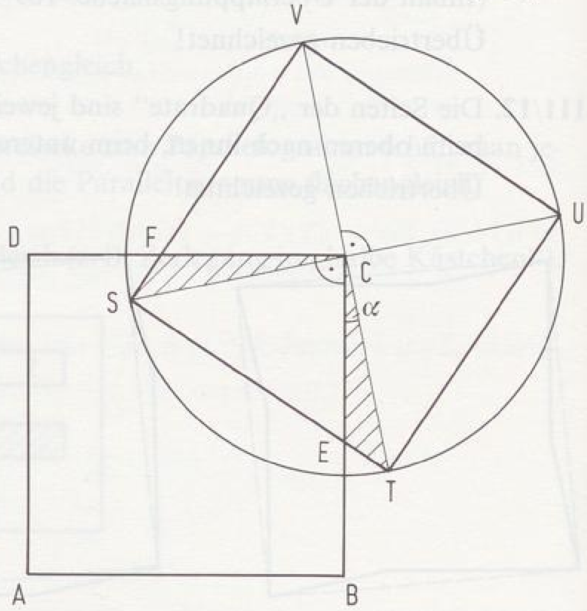
117/9. **a)** Der Faßkreisbogen über $[AB]$ zum Umfangswinkel $30°$ schneidet die Gerade CD in D'_1 und D'_2.

b) Der Thaleskreis über $[AB]$ schneidet die zu AB parallele Mittellinie in M_1 und M_2.

c) Der Faßkreisbogen über $[AB]$ zum Umfangswinkel $75°$ schneidet die zu AB parallele Mittellinie in M_1 und M_2.

117/10. **a)** 2 benachbarte Quadratecken von STUV bilden mit C als Scheitel einen $90°$-Winkel, deshalb können maximal 2 Ecken von STUV auf ABCD liegen, jedoch nie im Innern von ABCD.

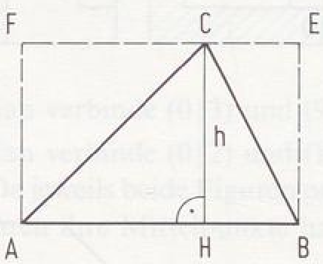
b) Die Diagonalen SU und VT zerlegen das Quadrat STUV in 4 flächengleiche Dreiecke. Liegen 2 Ecken von STUV auf ABCD, so gilt: $A_{\text{Schnittfläche}} = \frac{1}{4} A_{ABCD}$.
Für die anderen Fälle gilt (O. E. d. A.):
$\triangle ETC \cong \triangle FSC$, denn $\overline{SC} = \overline{TC}$, $\measuredangle FCS = \measuredangle ECT = \alpha$, $\measuredangle FSC = \measuredangle ETC = 45°$, also $\triangle SCF \cong \triangle TCE$.
In jedem Fall beträgt der Inhalt der Schnittfläche ein Viertel der Quadratfläche.



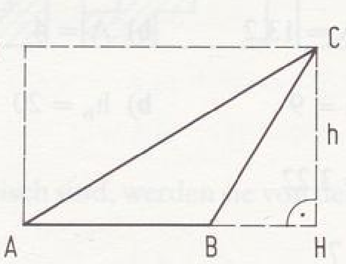
117/11. **a)** $A_{ABC} = A_{AHC} + A_{HBC} = \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot h + \frac{1}{2}\overline{HB} \cdot h = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} g \cdot h$

b) $A_{ABC} = A_{AHC} - A_{BHC} = \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot h - \frac{1}{2}\overline{BH} \cdot h = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} g \cdot h$

a)



b)



117/12. **a)** $b = 20$, $A = 35$ **b)** $h_a = 27$, $A = 216$

c) $h_a = 8$, $h_b = 6$ **d)** $a = 16$, $b = 12{,}8$

117/13. $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, $A = \frac{1}{2} b \cdot h_b$

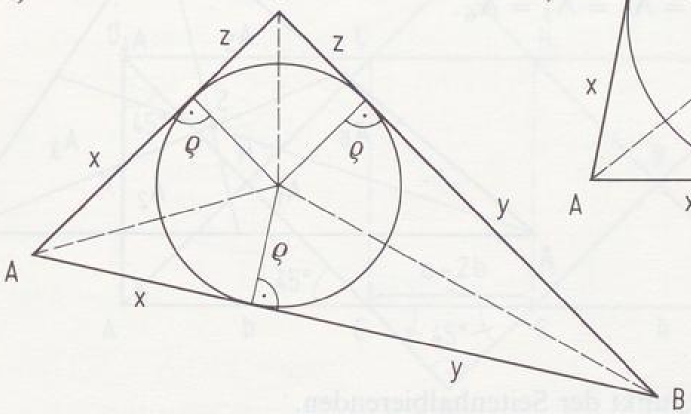
$\Rightarrow a \cdot h_a = b \cdot h_b \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{h_b}{h_a}$

117/14. a) 3mal so groß **b)** $A = 48$

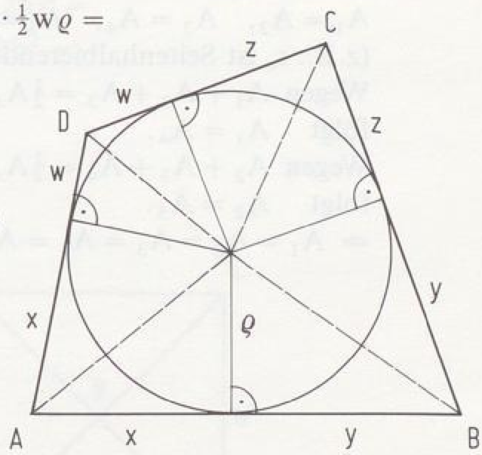
118/15. a) $A_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \varrho + 2 \cdot \frac{1}{2}y \cdot \varrho + 2 \cdot \frac{1}{2}z \cdot \varrho =$
$= \varrho(x+y+z) = \varrho \cdot s.$

b) $A_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2}x\varrho + 2 \cdot \frac{1}{2}y\varrho + 2 \cdot \frac{1}{2}z\varrho + 2\frac{1}{2}w\varrho =$
$= (x+y+z+w)\varrho =$
$= \frac{1}{2}u \cdot \varrho$

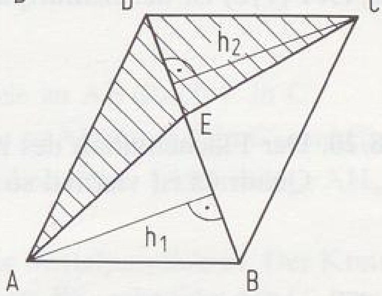
a)



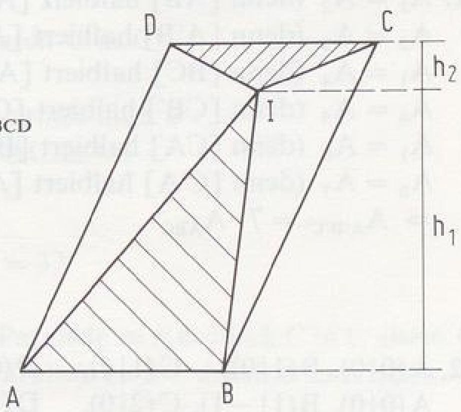
b)



118/16. $h_1 = h_2$, da $\triangle ABD \cong \triangle BCD$
$\Rightarrow A_{AED} = \frac{1}{2}h_1\,\overline{DE} = \frac{1}{2}h_2\,\overline{DE} = A_{ECD}$

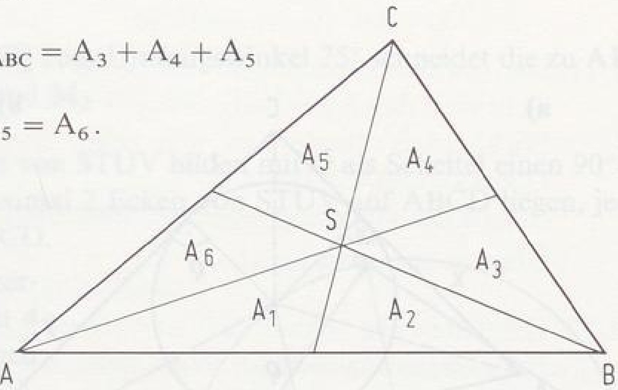


118/17. $A_{ABI} + A_{CDI} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h_1 + \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot h_2 =$
$= \frac{1}{2}\overline{AB}\,(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h_a = \frac{1}{2}A_{ABCD}$
Analog: $A_{BCI} + A_{DAI} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot h_b = \frac{1}{2}A_{ABCD}$



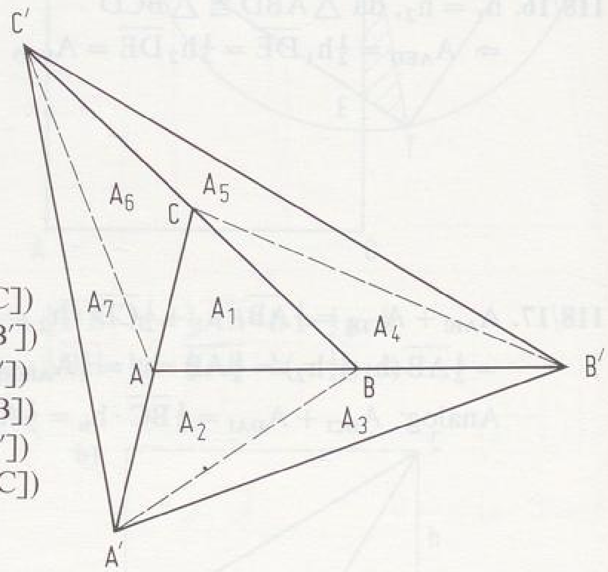
118/18. a) Die Seitenhalbierende zerlegt ein Dreieck in zwei Teildreiecke, die dieselbe Höhe und eine Grundlinie gleicher Länge haben.

b) Nach **a)** gilt:
$A_1 = A_2, \quad A_3 = A_4, \quad A_5 = A_6$
(z.B.: s_c ist Seitenhalbierende im $\triangle ABS$)
Wegen $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2}A_{ABC} = A_2 + A_3 + A_4$
folgt $A_1 = A_4$.
Wegen $A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2}A_{ABC} = A_3 + A_4 + A_5$
folgt $A_2 = A_5$.
$\Rightarrow A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6$.



118/19. P(7|6) ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

118/20. Der Flächeninhalt des neuen Quadrats ist viermal so groß.



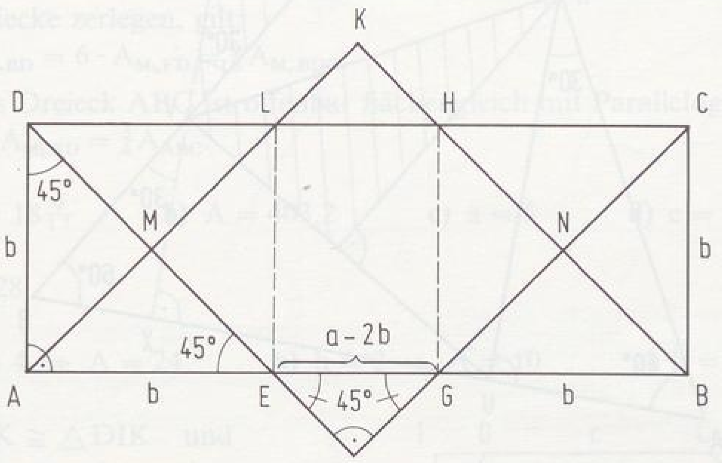
118/21. $A_1 = A_2$ (denn [AB] halbiert [A′C])
$A_2 = A_3$ (denn [A′B] halbiert [AB′])
$A_1 = A_4$ (denn [BC] halbiert [AB′])
$A_4 = A_5$ (denn [CB′] halbiert [C′B])
$A_1 = A_6$ (denn [CA] halbiert [BC′])
$A_6 = A_7$ (denn [C′A] halbiert [A′C])
$\Rightarrow A_{A'B'C'} = 7 \cdot A_{ABC}$.

118/22. A(0|0), B(1|0), C(1|1), D(0|1) $\Rightarrow$ A = 1
A(0|0), B(1|−1), C(2|0), D(1|1) $\Rightarrow$ A = 2
A(0|0), B(2|0), C(2|2), D(0|2) $\Rightarrow$ A = 4
A(0|0), B(1|−2), C(3|−1), D(2|1) $\Rightarrow$ A = 5
A(0|0), B(2|−2), C(4|0), D(2|2) $\Rightarrow$ A = 8
A(0|0), B(3|0), C(3|3), D(0|3) $\Rightarrow$ A = 9
A(0|0), B(1|−3), C(4|−2), D(3|1) $\Rightarrow$ A = 10
A(0|0), B(2|−3), C(5|−1), D(3|2) $\Rightarrow$ A = 13

118/23. $\overline{AE} = b$, da $\triangle DAE$ gleichschenklig ist, analog gilt $\overline{GB} = b$.

$\Rightarrow \overline{EG} = a - 2b$

$$A_{MFNK} = 2 \cdot A_{MEL} + A_{EGHL} + 2 \cdot A_{EFG} =$$
$$= 2 \cdot \tfrac{1}{4}b^2 + (a - 2b) \cdot b + 2 \cdot \tfrac{1}{4}(a - 2b)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}b^2 + ab - 2b^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - 2ab + 2b^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}a^2 - ab + \tfrac{1}{2}b^2 = \tfrac{1}{2}(a - b)^2$$



118/24. **a)** Der freie Schenkel von α' schneidet die Parallele zu AB durch C in C′.

b) Der Kreis um B mit $r = 9$ schneidet die Parallele zu AB durch C in C_1' und C_2'.

c) Der Kreis um B mit $r = 4$ schneidet den Thaleskreis über [AB] in $H_{b'}$. $AH_{b'}$ schneidet die Parallele zu AB durch C in C′.

d) AB und die Parallele g zu AB durch C haben die Mittelparallele m. Der Kreis um A mit $r = 7$ schneidet m in S_1 und S_2. BS_1 bzw. BS_2 schneidet g in C_1' bzw. C_2'.

e) m_{AB} schneidet die Parallele zu AB durch C in C′.

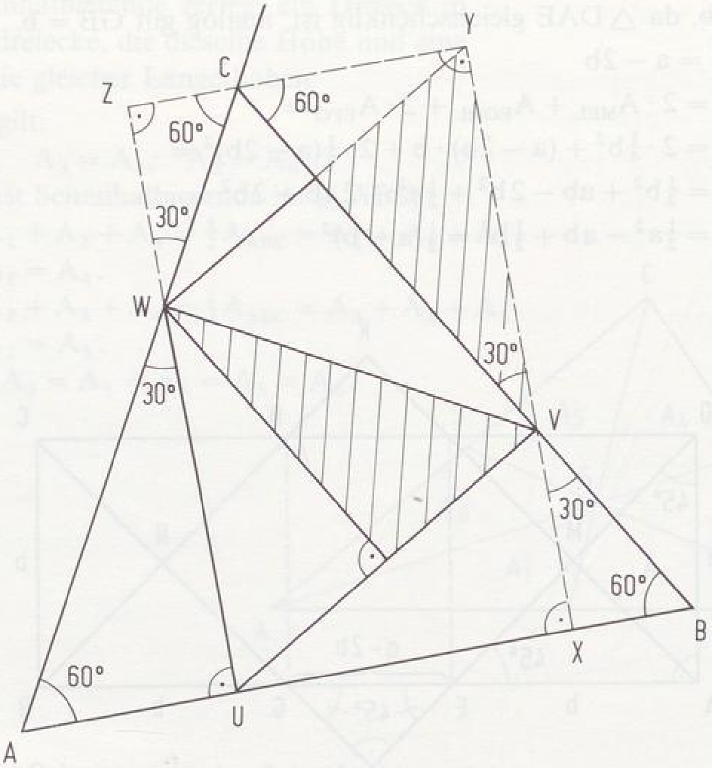
119/25. Trägt man c′ auf [AB von A aus an, so erhält man B′.
Die Parallele zu B′C durch B schneidet AC in C′.
Das gesuchte Dreieck ist $\triangle AB'C'$.

119/26. **a)** $A = 68$ **b)** $A = 32$ **c)** $A = 32$

119/27. Der Kreis um B mit $r = 10$ schneidet die Parallele zu AB durch C in C′ (bzw. C″).
Der Kreis um B mit $r = 5$ schneidet die Parallele zu BC′ durch A in A′ (bzw. A″).
$\triangle A'BC'$ erfüllt die Bedingungen.

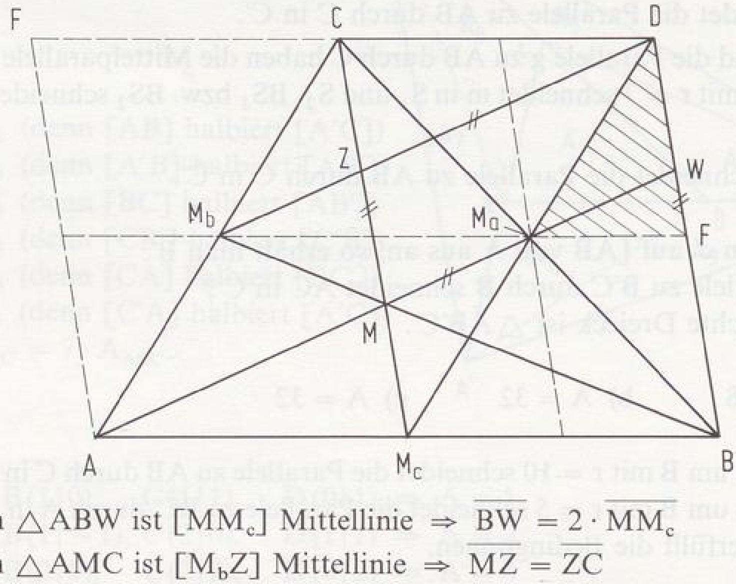
119/28. **a)** $A = 48$ **b)** $A = 80$ **c)** $A = 48$ **d)** $A = 92$

119/29. **a)** $\triangle UVW$ ist gleichseitig (drei 60°-Winkel). Man zeichnet zuerst $\triangle UVW$ und errichtet in U, V und W die Lote auf die Seiten. Diese Lote schneiden sich in den Punkten A, B und C des gleichseitigen Dreiecks ABC.



b) Es gilt: $\triangle XBV \cong \triangle CZW$ und $\triangle AUW \cong \triangle VYC$ (SWW-Satz).
Deshalb haben das Dreieck ABC und das Rechteck UXYZ denselben Flächeninhalt.
Da sich das Rechteck aus 6 kongruenten Dreiecken zusammensetzt, paßt das Dreieck UVW dreimal flächenmäßig in das $\triangle ABC$.

120/30.



a) Im $\triangle ABW$ ist $[MM_c]$ Mittellinie $\Rightarrow$ $\overline{BW} = 2 \cdot \overline{MM_c}$
Im $\triangle AMC$ ist $[M_bZ]$ Mittellinie $\Rightarrow$ $\overline{MZ} = \overline{ZC}$
Da der Schwerpunkt M die Strecke $[CM_c]$ im Verhältnis 2 : 1 teilt, gilt also $\overline{CZ} = \overline{ZM} = \overline{MM_c}$.
$[ZM]$ und $[DW]$ sind als parallele Querstrecken gleich lang, also gilt auch $\overline{DW} = \overline{MM_c}$.
Damit folgt: $\overline{M_cC} = 3 \cdot \overline{M_cM} = \overline{BD}$.

M_cBDC ist wegen $M_cC \parallel BD$ und $\overline{M_cC} = \overline{BD}$ ein Parallelogramm mit Mittelpunkt M_a. Wegen $\overline{M_cB} = \overline{CD}$ und $AM_c \parallel CD$ ist auch AM_cDC ein Parallelogramm, also $AC \parallel M_cD$. Da $[AM_a]$ und $[M_bD]$ parallele Querstrecken sind, haben sie dieselbe Länge.

b) M_cBDC und AM_cCE sind kongruente Parallelogramme, die durch die Diagonalen und Mittellinien jeweils in 8 kongruente Dreiecke zerfallen (siehe schraffiertes Dreieck).
Da die Seitenhalbierenden allgemein jedes Dreieck in 6 flächengleiche Teildreiecke zerlegen, gilt:
$A_{M_bBD} = 6 \cdot A_{M_aFD} = \frac{6}{8} A_{M_cBDC}$.
Das Dreieck ABC ist offenbar flächengleich mit Parallelogramm M_cBDC.
$\Rightarrow \; A_{M_bBD} = \frac{3}{4} A_{ABC}$.

120/31. **a)** $h = 18\frac{9}{17}$ **b)** $A = 403{,}2$ **c)** $a = 5$ **d)** $c = 5$

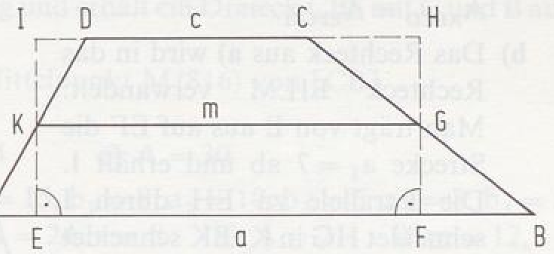
120/32. $A = 228$

120/33. **a)** $h = 4 \Rightarrow A = 24$ **b)** $h = 2 \Rightarrow A = 10$ **c)** $h = 2 \Rightarrow A = 10$

121/34. $\triangle AEK \cong \triangle DIK$ und
$\triangle FBG \cong \triangle HCG$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{2} = m$$

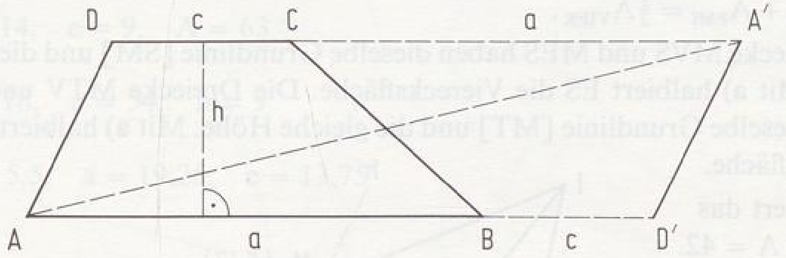
$$\Rightarrow A_{Trapez} = m \cdot h$$



121/35. $AD'A'D$ ist ein Parallelogramm.

$$A_{AD'A'D} = \overline{AD'} \cdot h = (a+c) \cdot h$$

$$\Rightarrow A_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot h$$



121/36. **b)** $M(5{,}5|4)$, $r = \frac{1}{2}h = 3$, $a + c = b + d \Rightarrow c = 7{,}5 + 6{,}5 - 10{,}5 = 3{,}5$

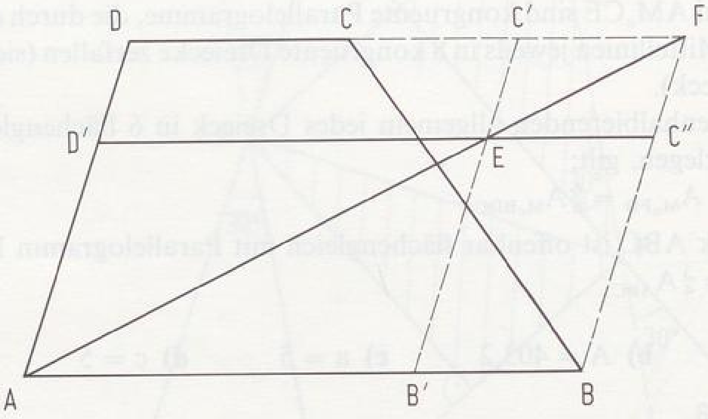
c) $A = \frac{1}{2} r \cdot u \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 28 = 42$

oder: $A = \dfrac{a+c}{2} h \Rightarrow A = \dfrac{10{,}5 + 3{,}5}{2} \cdot 6 = 42$

121/37. $a + c = b + d = 16$
$A = \frac{1}{2} r \cdot u = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 32 = 40$

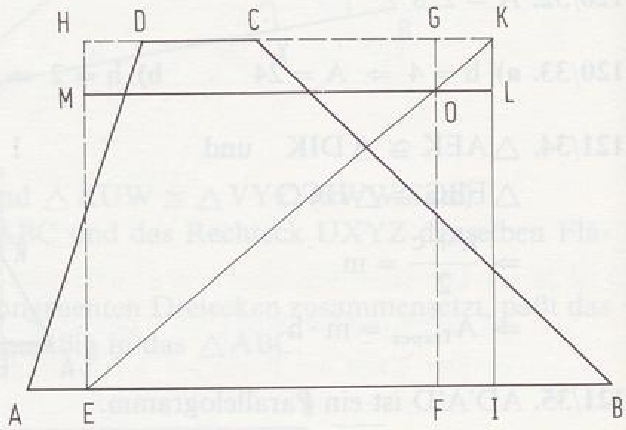
121/38. Die Mittelsenkrechte m_{AB} schneidet c in M. M ist Mittelpunkt von c′ wobei $c = c'$.

121/39. Man verwandelt das Trapez in das Parallelogramm $AB'C'D$. Die Parallele zu AD durch B schneidet DC in F. AF schneidet $B'C'$ in E, $D'C''$ ist die Parallele zu AB durch E. $ABC''D'$ ist das gesuchte Parallelogramm (vgl. Aufgabe 5.1. Nr. 8).



121/40. a) Eine Seite des Rechtecks ist so lang wie die Mittellinie, die andere ist die Höhe des Trapezes, also $A_{ABCD} = A_{EFGH}$.

b) Das Rechteck aus **a)** wird in das Rechteck EILM verwandelt: Man trägt von E aus auf EF die Strecke $a_1 = 7$ ab und erhält I. Die Parallele zu EH durch I schneidet HG in K. EK schneidet FG in O. Die Parallele zu EI durch O ergibt M und L. EILM ist das gesuchte Rechteck.

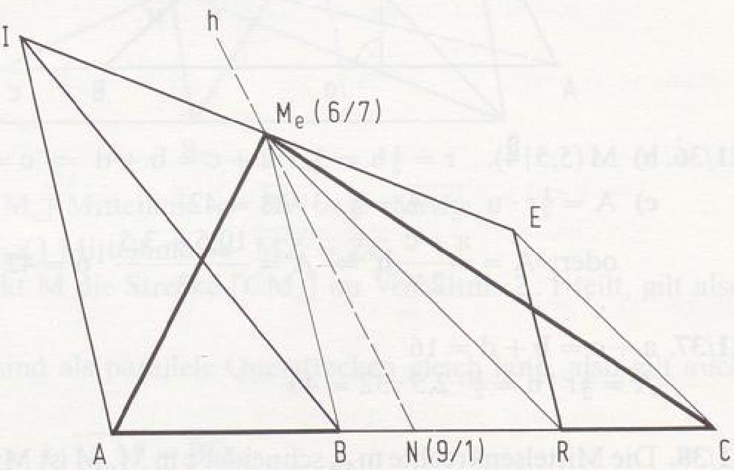


121/41. a) $M(7{,}5|3)$, VM halbiert $\triangle VIR$, EM halbiert $\triangle IER$
$\Rightarrow A_{VIM} + A_{EMI} = \frac{1}{2}A_{VIER}$.

b) Die Dreiecke MVS und MES haben dieselbe Grundlinie [SM] und die gleiche Höhe. Mit **a)** halbiert ES die Vierecksfläche. Die Dreiecke MTV und MTE haben dieselbe Grundlinie [MT] und die gleiche Höhe. Mit **a)** halbiert TV die Vierecksfläche.

c) RI halbiert das Viereck; $A = 42$.

121/42. $\triangle M_eIB$ wird in $\triangle M_eAB$ verwandelt.
$\triangle M_eRE$ wird in $\triangle M_eRC$ verwandelt.
N ist der Mittelpunkt von [AC]. $h = M_eN$.



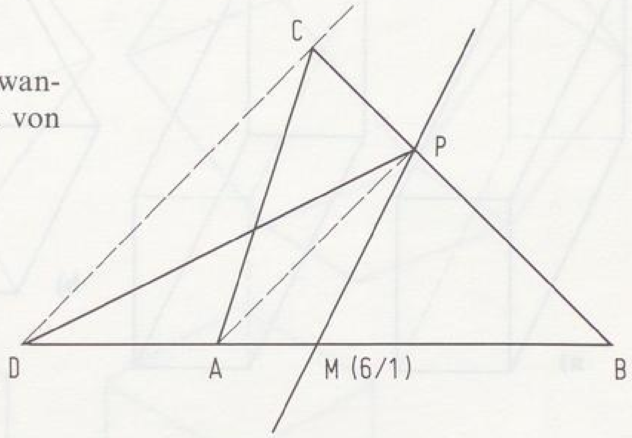
121/43. a) $g = DB$

b) h läuft durch den Mittelpunkt M $(7{,}5 | 4{,}5)$ des Parallelogramms und schneidet AD in $(4 | 6)$.

c) u läuft durch den Mittelpunkt M des Parallelogramms.

121/44. a) $g = s_b$

b) $\triangle APC$ wird in $\triangle ACD$ verwandelt. M ist der Mittelpunkt von [DB]. $h = PM$.



122/45. a) p läuft durch den Mittelpunkt der Mittellinie des Trapezes.

b) q läuft durch den Mittelpunkt der Mittellinie des Trapezes.

c) Man schert die Ecken T und P weg und erhält ein Dreieck CBS mit C und B auf RA.
Die Gerade s läuft durch den Mittelpunkt M $(8 | 6)$ von [CB].

122/46. a) $A = 24$ **b)** $x = 3, \quad A = 54$ **c)** $A = 30$
d) $A = d\,(a - d)$ **e)** $A = 120, a_1 = 15, b_1 = 8, a_2 = 10, b_2 = 6, a_3 = 8, b_3 = 5$
f) $A = 25, x = 10, A' = 25$ **g)** $A = 24, x = 8$ **h)** $A = 21$ **i)** $m = 12$, $A = 48$ **j)** $A = 21, \; x = 5$ **k)** $x_1 = 3a, \; x_2 = 1{,}5a$ **l)** $A = 36$
m) $A = 120$ **n)** $A = 50$

123/47. $a = 6, \quad b = 18$

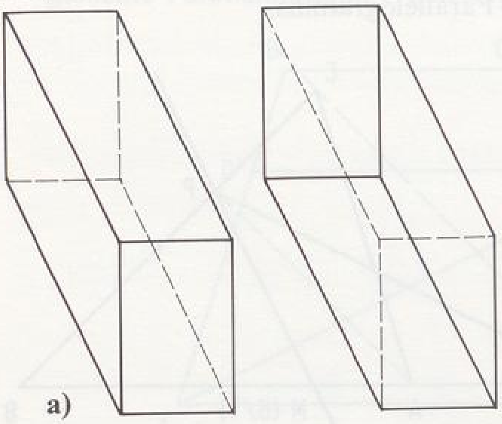
123/48. $f = 14, \quad e = 9, \quad A = 63$

124/49. $c = 18, \quad a = 54, \quad h = 9$

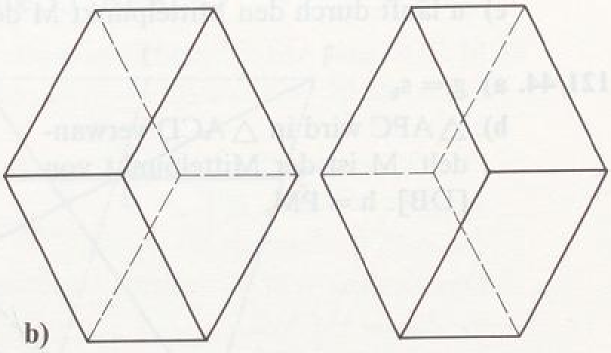
124/50. $h = 5{,}5, \quad a = 19{,}25, \quad c = 13{,}75$

6. Kapitel

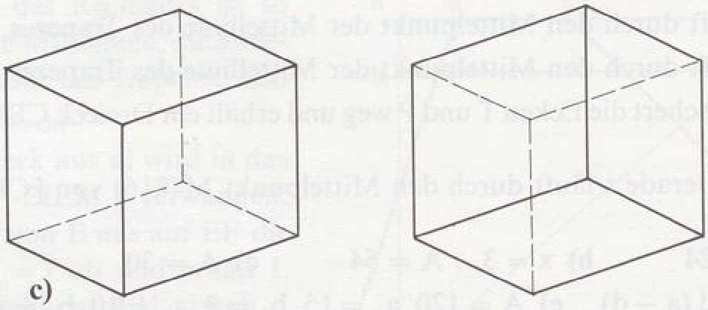
135/1.



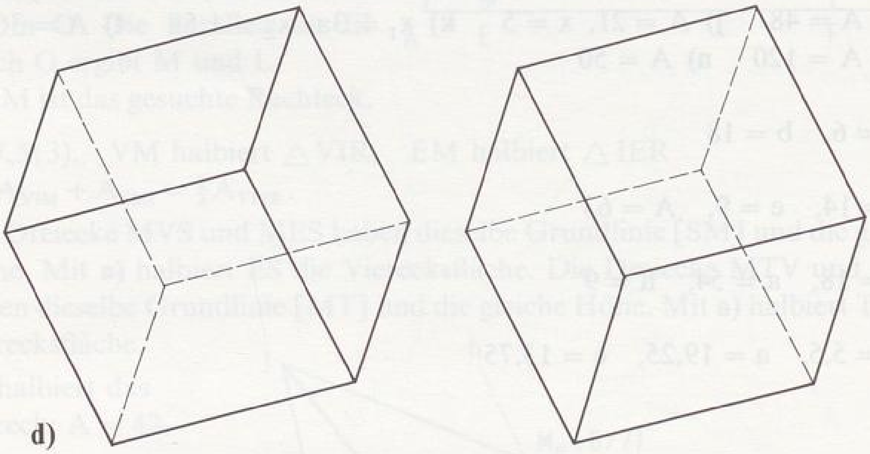
a)



b)



c)



d)

136/2. **a)** Je zwei Gegenseiten sind parallel und gleich lang, Gegenwinkel sind gleich groß. **b)** Regelmäßiges Sechseck **c)** Rechteck, Sechseck

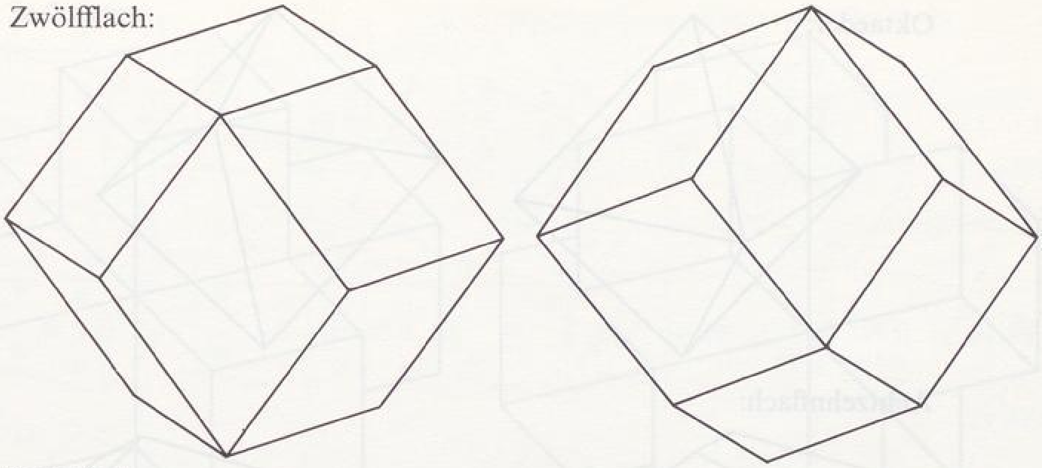
136/3. Eine, zwei oder drei Seitenflächen.

136/4. Vier, sieben oder neun Kanten.

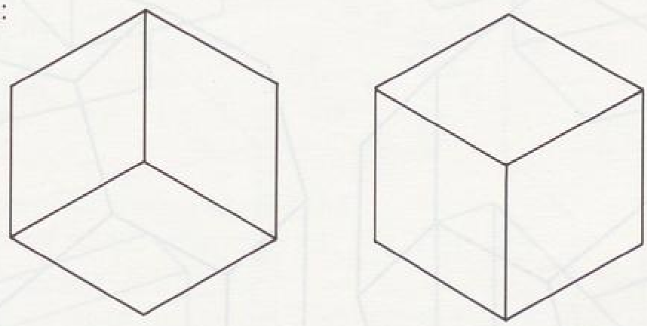
136/5. Vier, sechs oder sieben Ecken.

136/6. **a)** 3 Schnitte bzw. 6 Schnitte **b)** 8 bzw. 27 Teilquader.

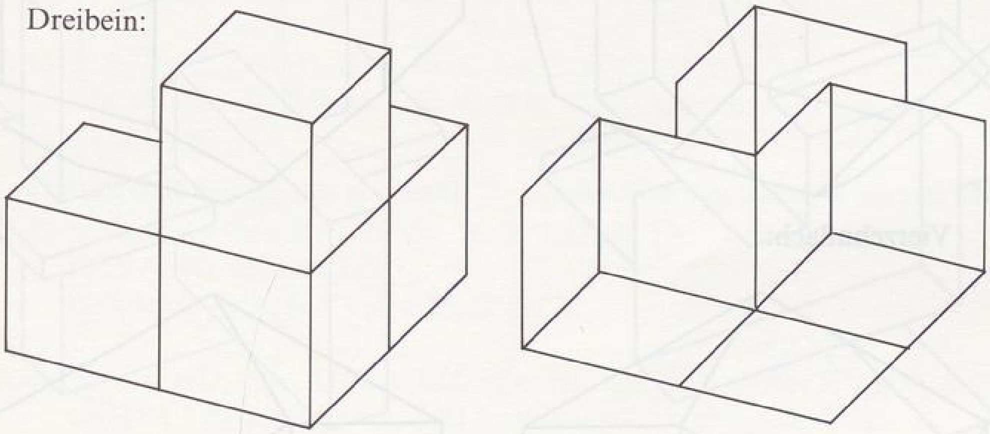
136/7. Zwölfflach:



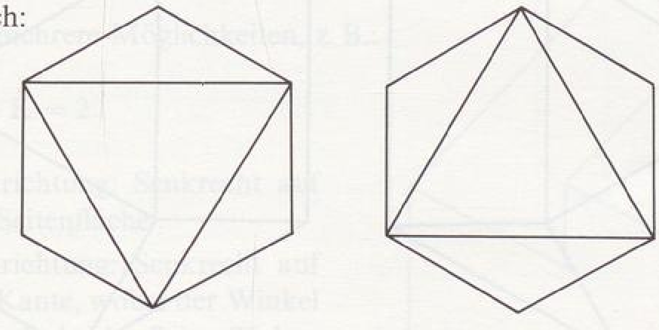
Sechsflach:



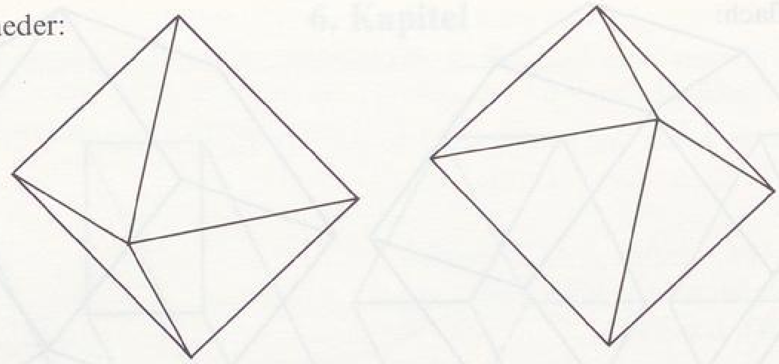
Dreibein:



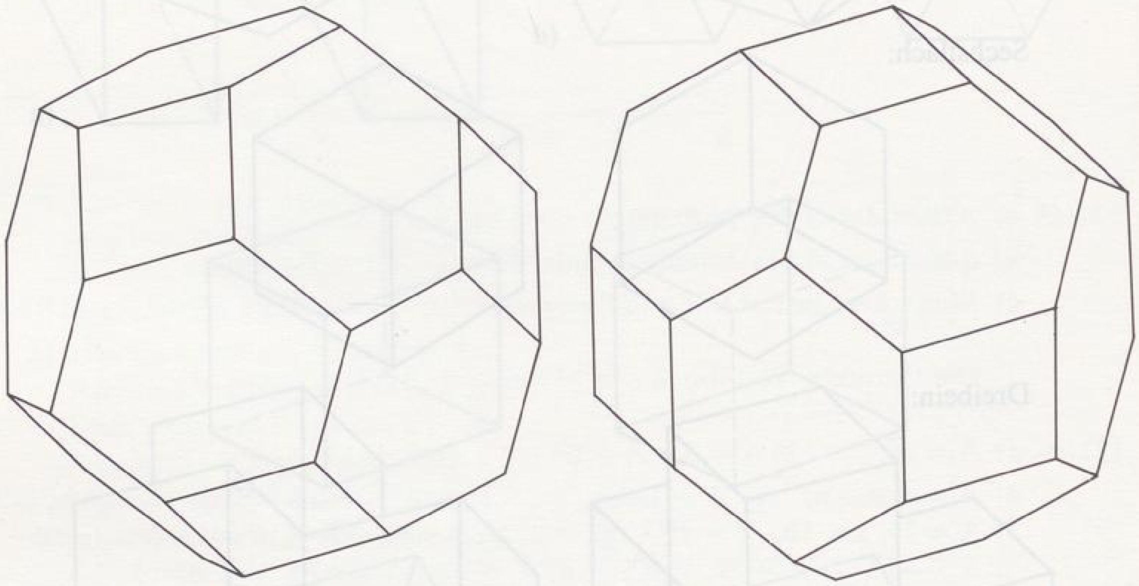
Achtflach:



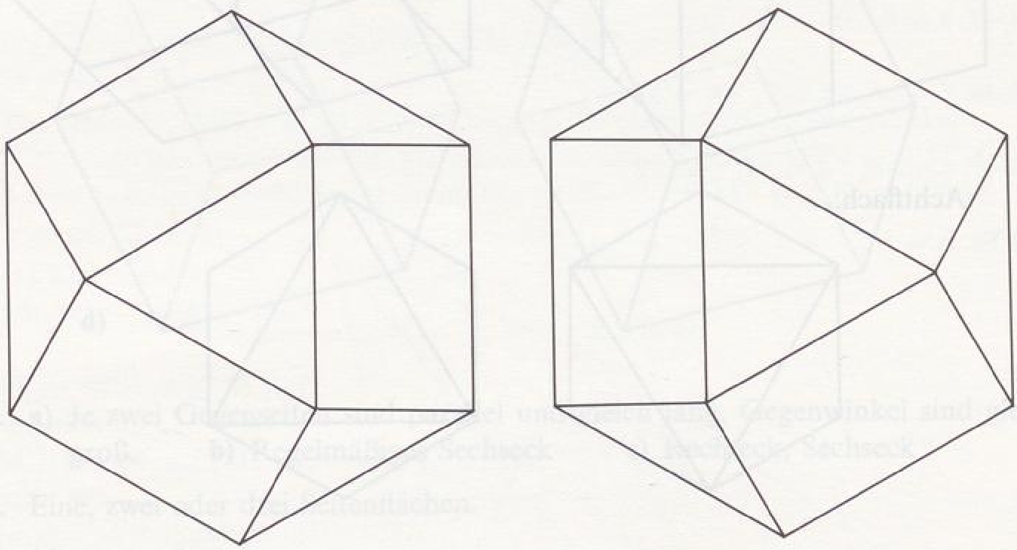
Oktaeder:



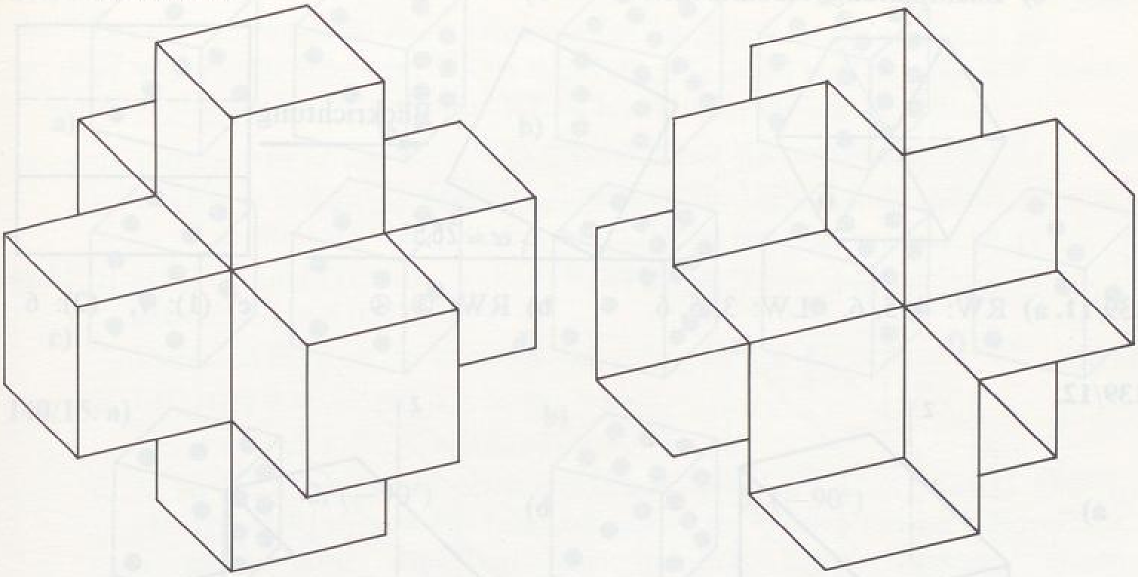
Achtzehnflach:



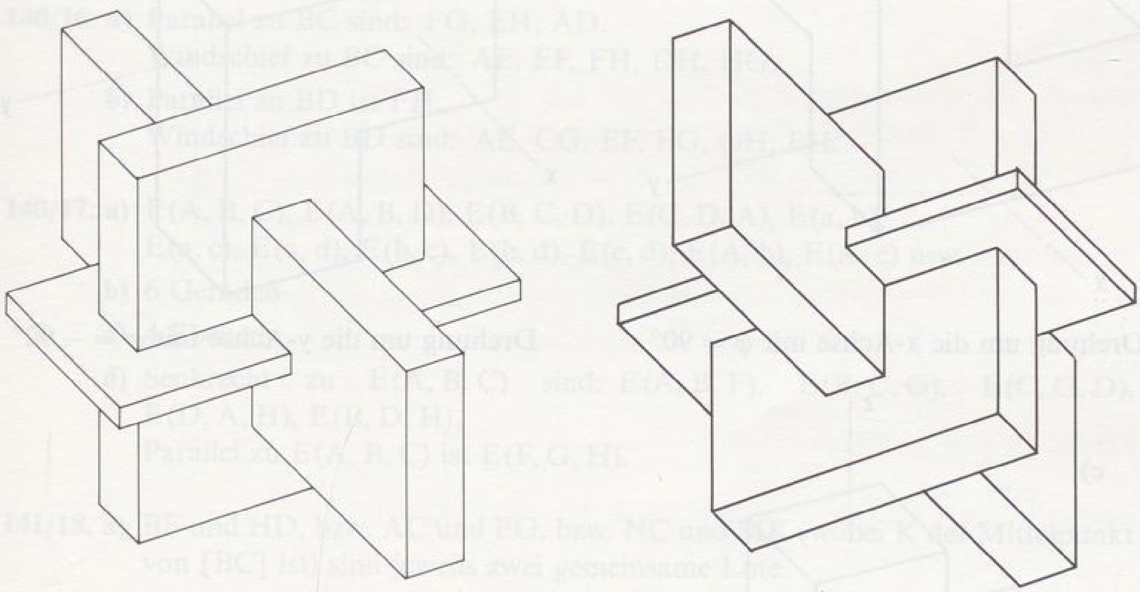
Vierzehnflach:



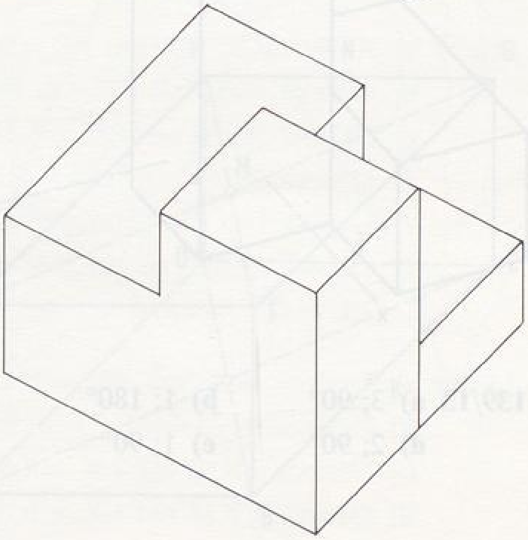
Sechsbein:



Alleskar:



138/8. Es gibt mehrere Möglichkeiten, z. B.:

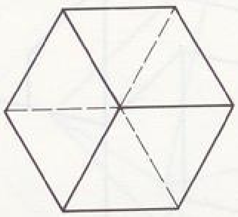


138/9. $E + F - K = 2$

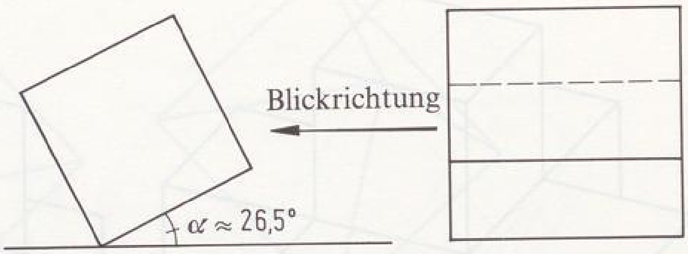
138/10. a) Blickrichtung: Senkrecht auf eine Seitenfläche

b) Blickrichtung: Senkrecht auf eine Kante, wobei der Winkel gegen die beiden Seitenflächen gleich ist

c) Blickrichtung: Raumdiagonale



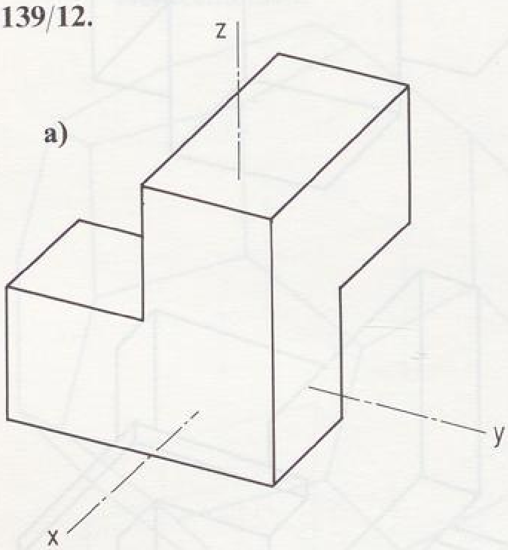
d)



139/11. a) RW: 4, 5, 6, LW: 3, 5, 6 **b)** RW: ③, ④ **c)** (1): 7, (2): 6

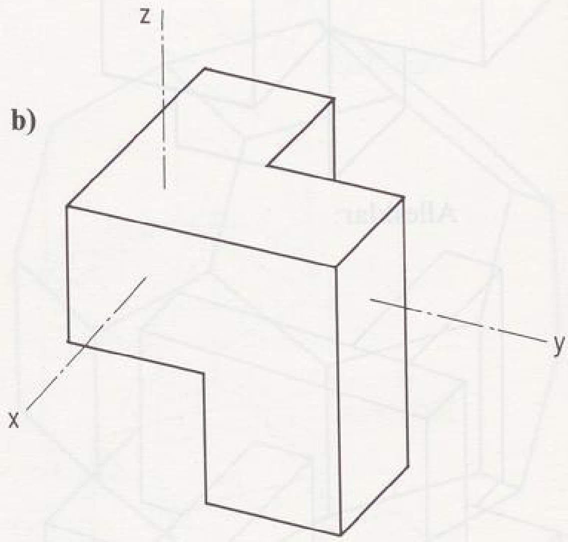
139/12.

a)



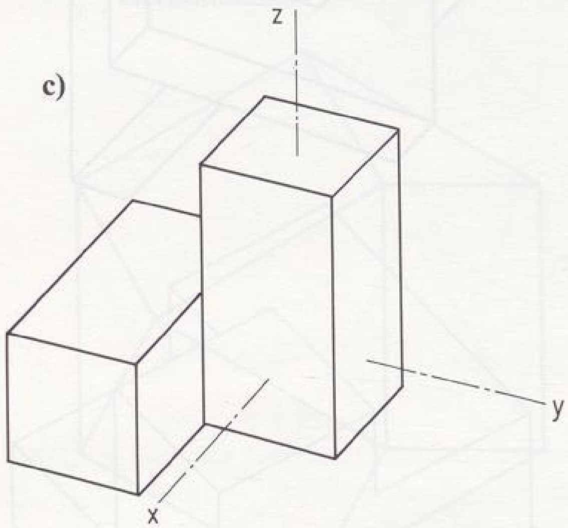
Drehung um die x-Achse mit $\varphi = 90°$

b)



Drehung um die y-Achse mit $\varphi = -90°$

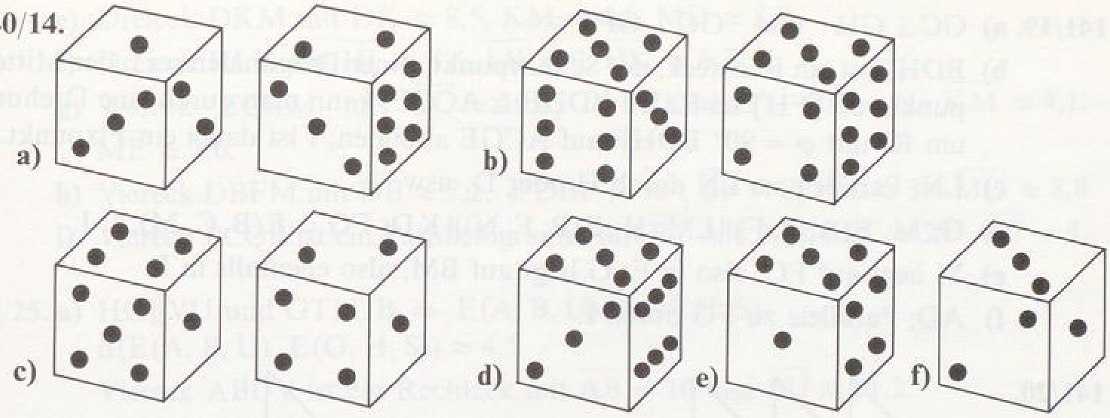
c)

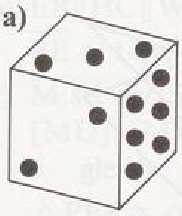


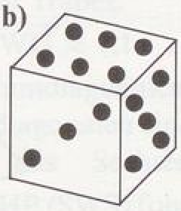
Drehung um die z-Achse mit $\varphi = 180°$

139/13. a) 3; 90° **b)** 1; 180° **c)** 2; 180°
d) 2; 90° **e)** 1; 90°

140/14.



140/15. a)  2, (−90°)

b)  6, (−90°)

140/16. a) Parallel zu BC sind: FG, EH, AD.
Windschief zu BC sind: AE, EF, FH, DH, HG.

b) Parallel zu BD ist FH.
Windschief zu BD sind: AE, CG, EF, FG, GH, EH.

140/17. a) E(A, B, C), E(A, B, D), E(B, C, D), E(C, D, A), E(a, b), E(a, c), E(a, d), E(b, c), E(b, d), E(c, d), E(A, b), E(A, c) usw.

b) 6 Geraden

c) 4 Ebenen

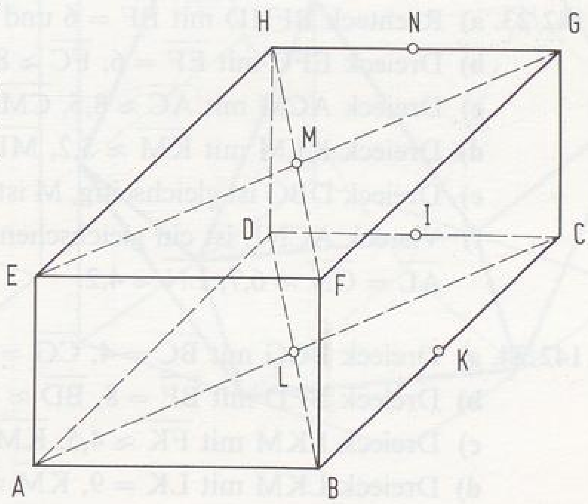
d) Senkrecht zu E(A, B, C) sind: E(A, B, F), E(B, C, G), E(C, G, D), E(D, A, H), E(B, D, H).
Parallel zu E(A, B, C) ist E(F, G, H).

141/18. a) BF und HD, bzw. AC und EG, bzw. NC und MK (wobei K der Mittelpunkt von [BC] ist) sind jeweils zwei gemeinsame Lote.

b) z.B.: E, M, G; H, N, G; H, M, F; usw.

c) AE || DH und AB || DC bzw. MN || FG und NI || GC (wobei I der Mittelpunkt von [DC] ist).

d) s = LM; s = AD; s = HD; E(G, F, L) || E(A, M, D)



141/19. a) $GC \perp GH$ und $GC \perp GF$

b) BDHF ist ein Rechteck, der Schnittpunkt seiner Diagonalen sei I, der Mittelpunkt von [FH] sei R. Da BDHF $\cong$ ACGE, kann man durch eine Drehung um RI mit $\varphi = 90°$ BDHF auf ACGE abbilden; I ist dabei ein Fixpunkt.

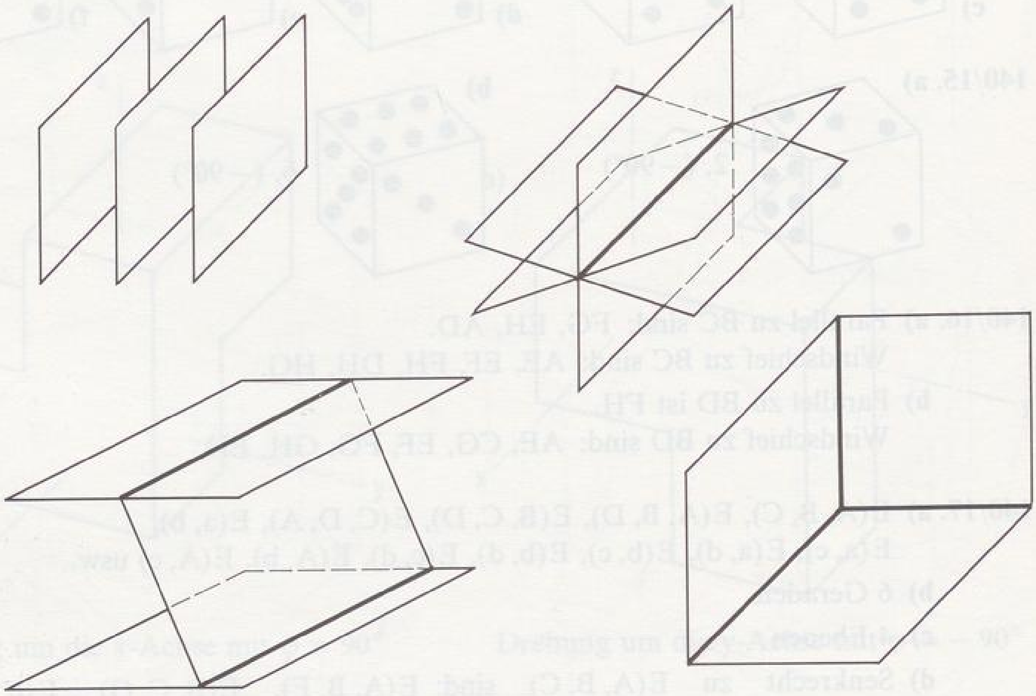
c) LN, Parallele zu LN durch H oder D, usw.

d) G; M; $E(A, B, F) \parallel LM$; H; $E(B; F; N) \parallel KD$; $FG \subset E(B, C, M)$; I; I.

e) M liegt auf FC, also in E; G liegt auf BM, also ebenfalls in E.

f) AD; Parallele zu FG durch I.

141/20.



141/21. Es gibt 20 Ebenen.

141/22. a) $g \parallel E$, $h \parallel E$ **b)** $E(A, B, D) \cap E(D, C, G) = DC$

c) $E(g, A) \cap E(h, k) = h$

142/23. a) Rechteck BFHD mit $\overline{BF} = 6$ und $\overline{FH} \approx 8{,}5$

b) Dreieck EFC mit $\overline{EF} = 6$, $\overline{FC} \approx 8{,}5$, $\sphericalangle\, EFC = 90°$

c) Dreieck ACM mit $\overline{AC} \approx 8{,}5$, $\overline{CM} \approx 4{,}2$, $\overline{AM} \approx 7{,}3$

d) Dreieck KLM mit $\overline{KM} \approx 5{,}2$, $\overline{ML} \approx 6{,}7$, $\overline{LK} \approx 7{,}3$

e) Dreieck DBG ist gleichseitig, M ist Mittelpunkt von [BG] $\Rightarrow \sphericalangle\, BMD = 90°$.

f) Viereck ACNL ist ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AC} \approx 8{,}5$, $\overline{AL} = \overline{CN} \approx 6{,}7$, $\overline{LN} \approx 4{,}2$.

142/24. a) Dreieck BCG mit $\overline{BC} = 4$, $\overline{CG} = 8$ und $\sphericalangle\, BCG = 90°$

b) Dreieck BFD mit $\overline{BF} = 8$, $\overline{BD} \approx 7{,}2$, $\sphericalangle\, FBD = 90°$

c) Dreieck FKM mit $\overline{FK} \approx 4{,}5$, $\overline{KM} \approx 4{,}1$, $\overline{MF} \approx 3{,}6$

d) Dreieck LKM mit $\overline{LK} = 9$, $\overline{KM} \approx 4{,}1$, $\overline{ML} \approx 8{,}6$

e) Dreieck DKM mit $\overline{DK} \approx 8{,}5$, $\overline{KM} \approx 4{,}1$, $\overline{MD} \approx 8{,}8$

f) Dreieck HLK mit $\overline{HL} \approx 8{,}5$, $\overline{LK} = 9$, $\overline{HK} \approx 6{,}3$

g) Viereck ECKM mit $\overline{EC} \approx 10{,}8$, $\sphericalangle ECK \approx 42°$, $\overline{CK} = 6$, $\overline{KM} \approx 4{,}1$, $\overline{ME} \approx 3{,}6$.

h) Viereck DBFM mit $\overline{DB} \approx 7{,}2$, $\sphericalangle DBF = 90°$, $\overline{BF} = 8$, $\overline{FM} \approx 3{,}6$ $\overline{MD} \approx 8{,}8$

i) Viereck PCQE ist ein Parallelogramm mit $\overline{PC} \approx 8{,}2$, $\sphericalangle EPC \approx 29°$, $\overline{PE} = 4$.

142/25. a) $HG \parallel VU$ und $GT \parallel UB \Rightarrow E(A, B, U) \parallel E(G, H, S)$
$d(E(A, B, U), E(G, H, S)) \approx 4{,}5$
Viereck ABUV ist ein Rechteck mit $\overline{AB} = 10$ und $\overline{BU} \approx 11{,}2$.

b) $EB \parallel HC \parallel WU \Rightarrow$ BUWE ist ein Trapez.
$\overline{BE} \approx 14{,}1$, $\overline{BU} = \overline{EW} \approx 11{,}2$, $\overline{WU} \approx 7{,}1$

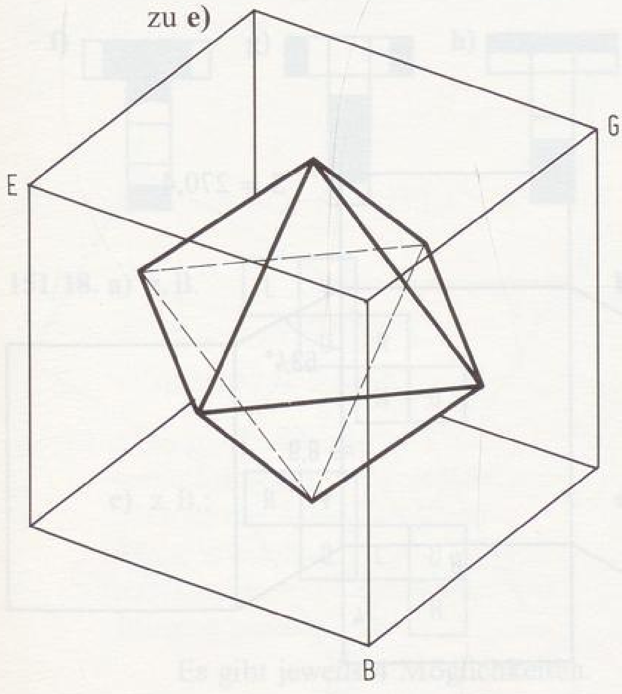
c) M sei der Schnittpunkt der Raumdiagonalen. [MP], [MS], [MQ], [MR], [MU], [MW] sind als Flächendiagonalen eines Würfels mit der Kantenlänge 5 gleich lang, also hat das Sechseck einen Umkreis. Wegen $\triangle PES \cong \triangle SAQ \cong \ldots \cong \triangle WHP$ (SWS) folgt $\overline{PS} = \overline{SQ} = \ldots = \overline{WP}$. Damit handelt es sich um ein regelmäßiges Sechseck (mit $r = \overline{PS} \approx 7{,}1$). Es gibt 4 solche Sechsecke.

d) Wegen $AE \parallel IJ$ und $\overline{AE} = \overline{IJ}$ und vier rechter Winkel bilden die Punkte A, J, I, E das Rechteck AJIE. (Analoges gilt für die Punkte B, F, I, J.)
$\triangle ABI$ ist gleichschenklig mit $\overline{AB} = 10$, $\overline{AI} = \overline{BI} \approx 12{,}2$.
X und Y sind Seitenmitten in diesem Dreieck.

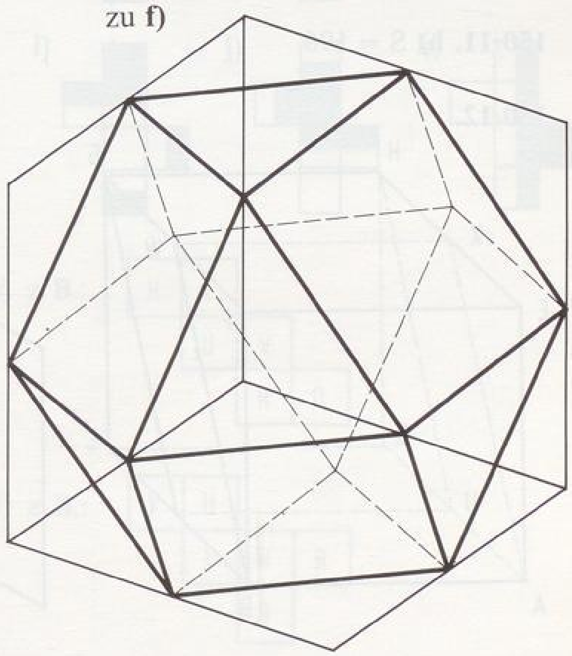
e) z. B.: Dreieck EBG ist gleichseitig, das zugehörige Dreieck des Oktaeders ist Mittendreieck des Dreiecks EBG, also ebenfalls gleichseitig mit $a \approx 7{,}1$.

f) Die Oberfläche des Stumpfs besteht aus sechs Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken. $d \approx 11{,}7$.

zu e)



zu f)



7. Kapitel

Aufgaben zu 7.1

149/1. **a)** $e = 6, \quad k = 9, \quad f = 5$ **b)** $e = 10, \quad k = 15, \quad f = 7$
c) $e = 2n, \quad k = 3n, \quad f = n + 2$

149/2. **a)** falsch, denn 53 ist nicht durch 3 teilbar
b) falsch, denn 53 ist nicht gerade
c) richtig

149/3. **a)** 8-seitiges Prisma **b)** Quader **c)** 12-seitiges Prisma
d) 8-seitiges Prisma

149/4. $\sphericalangle\, DQB = 119°$

149/5. $\sphericalangle\, BDC \approx 28°, \quad \sphericalangle\, BQC \approx 35°, \quad \sphericalangle\, BAC \approx 39°$

149/6. Der abgewickelte Mantel ist ein Rechteck mit den Seiten u und h
$\Rightarrow \; S = 2 \cdot G + u \cdot h$

149/7. $M = 38{,}4\ \text{cm}^2$

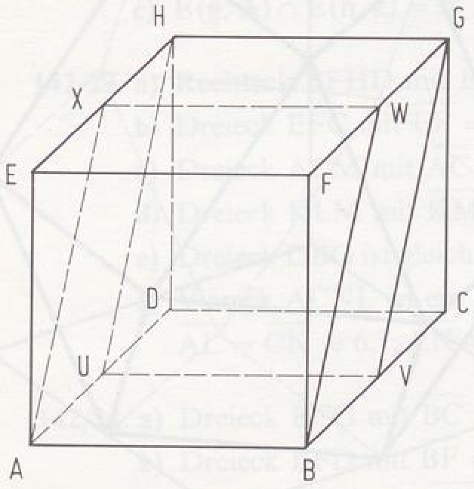
149/8. $S = 42\ \text{cm}^2$

149/9. **b)** $\overline{BC} = 5$

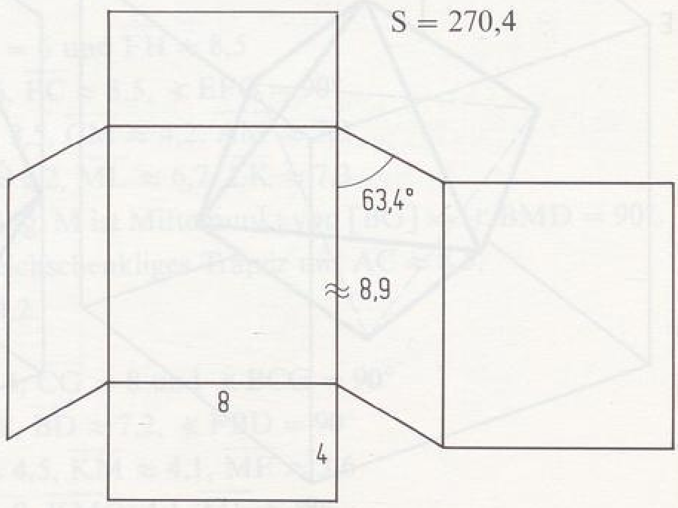
149/10. **a)** $h = 5$

150/11. **b)** $S = 196$

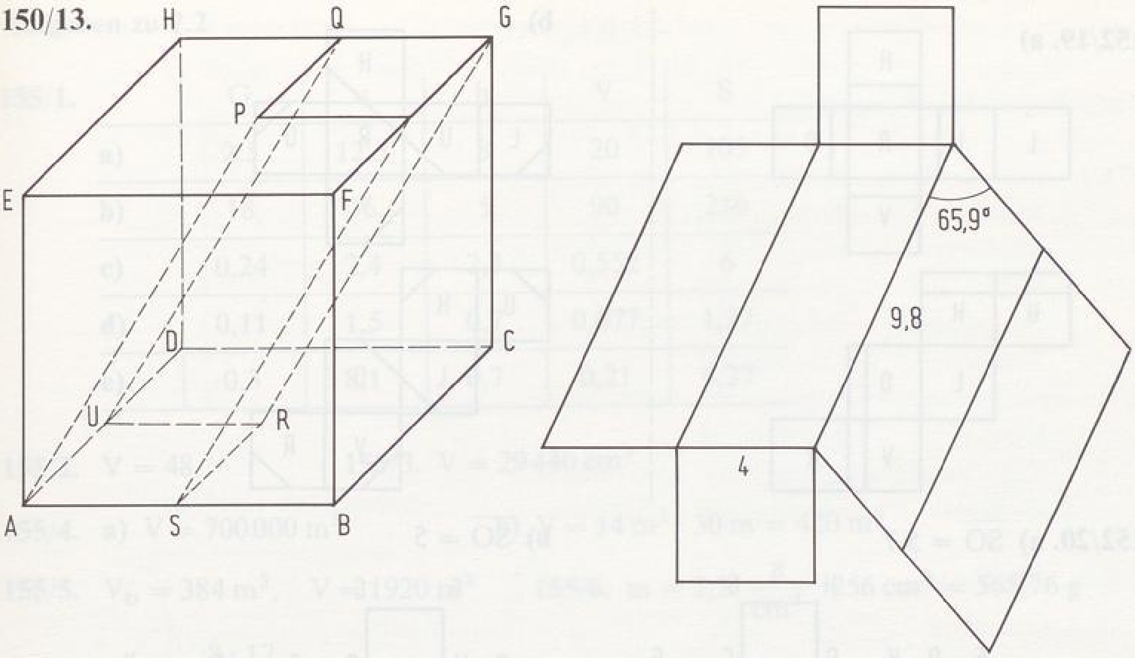
150/12.



$S = 270{,}4$



150/13.



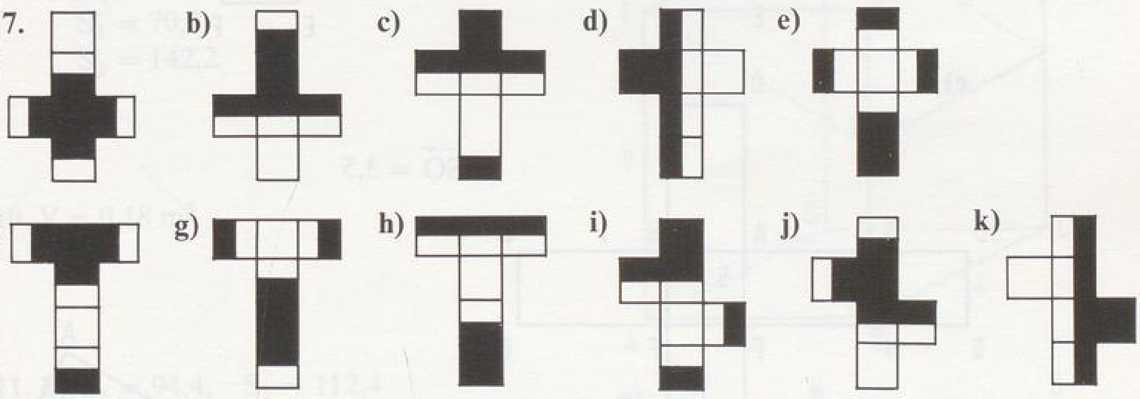
150/14. Keine Reklamationen bekommt er nur bei 4, 20, 21, 23, 25, 27, 28, 32, 33, 34, 35.

151/15. Es gibt 11 nicht kongruente Würfelnetze (vgl. Aufgabe **14**).

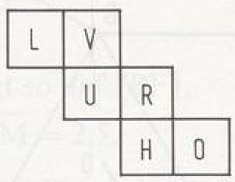
151/16. a) rechts: A, vorn: E (sichtbar als ⊓⊓)

b) rechts: A, vorn: D (sichtbar als D)

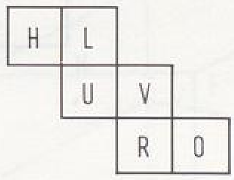
151/17.



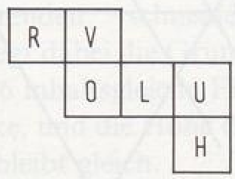
151/18. a) z. B.



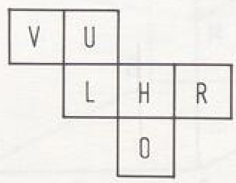
b) z. B.:



c) z. B.:

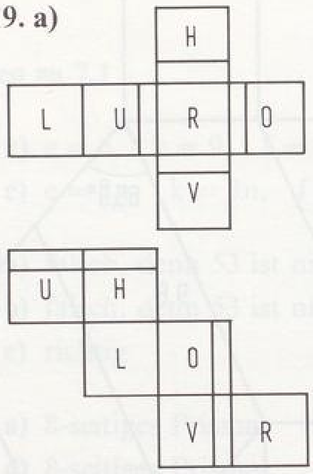


d) z. B.:

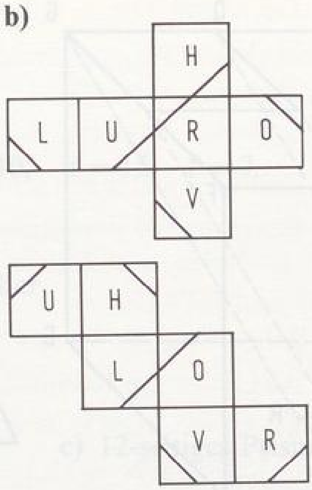


Es gibt jeweils 4 Möglichkeiten.

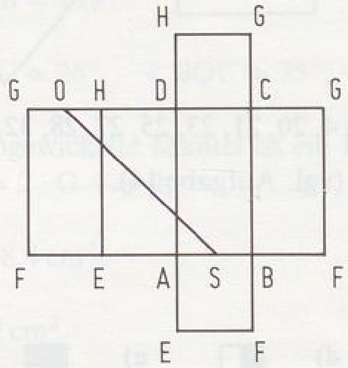
152/19. a)



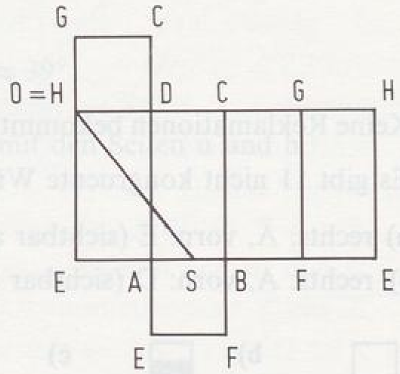
b)



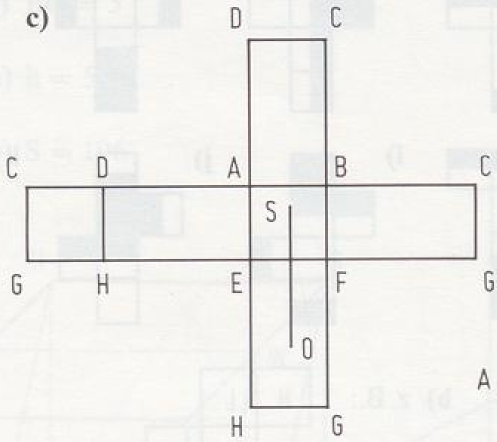
152/20. a) $\overline{SO} = 5{,}7$



b) $\overline{SO} = 5$

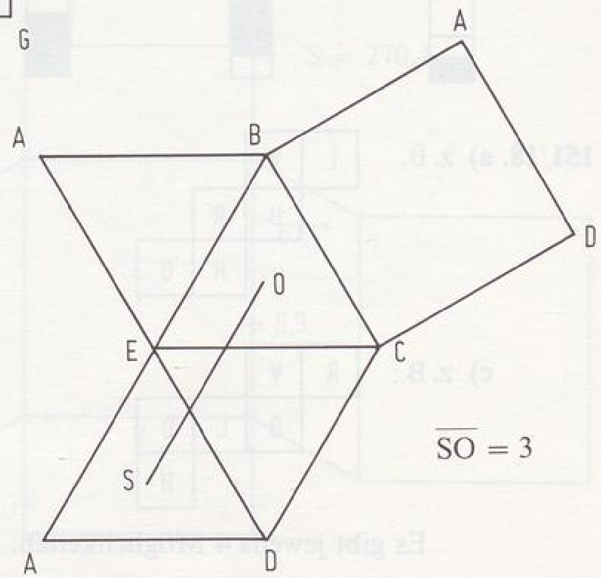


c)



$\overline{SO} = 3{,}5$

152/21.



$\overline{SO} = 3$

Aufgaben zu 7.2

155/1.

	G	u	h	V	S
a)	2,5	12,5	8	20	105
b)	18	36	5	90	216
c)	0,24	2,4	2,3	0,552	6
d)	0,11	1,5	0,7	0,077	1,27
e)	0,3	8,1	0,7	0,21	6,27

155/2. $V = 48$ **155/3.** $V = 29\,440\ \text{cm}^3$

155/4. **a)** $V = 700\,000\ \text{m}^3$ **b)** $V = 14\ \text{m}^2 \cdot 30\ \text{m} = 420\ \text{m}^3$

155/5. $V_D = 384\ \text{m}^3, \quad V = 1920\ \text{m}^3$ **155/6.** $m = 2{,}21 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 256\ \text{cm}^3 = 565{,}76\ \text{g}$

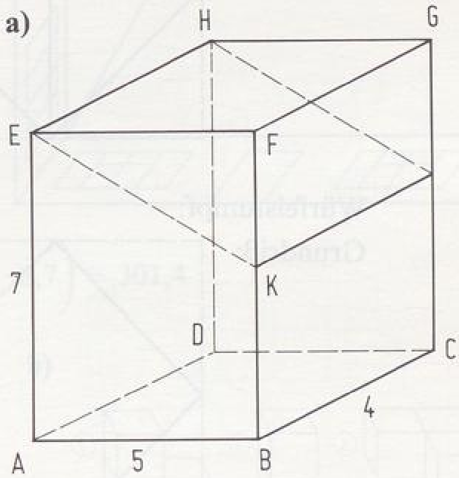
156/7. **a)** $V = \frac{8 \cdot 17}{2} \cdot 11\ \text{cm}^3 = 748\ \text{cm}^3$

b) $V = V_a - V_i = 1500\ \text{cm}^3 - 884\ \text{cm}^3 = 616\ \text{cm}^3$ **156/8.** $V = 64\ \text{m}^3$

156/9. **b)** $V_1 = 30$
$V_2 = 5 \cdot 4 \cdot 7 - 30 = 110$

c) $S_Q = 166$
$S_1 = 70{,}2$
$S_2 = 142{,}2$

a)



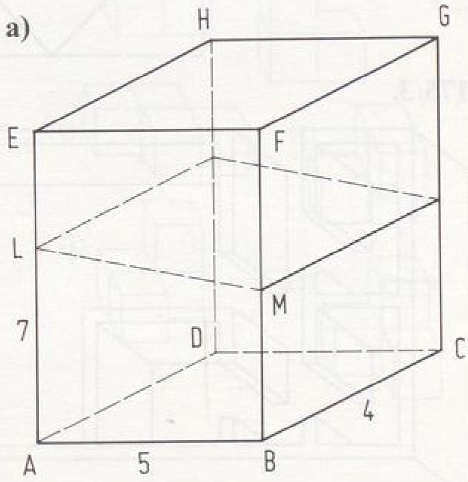
156/10. $V = 0{,}18\ \text{m}^3$

157/11. **b)** $S_1 = 94{,}4, \quad S_2 = 112{,}4$

c) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$

d) M liegt so auf [BF],
daß $\overline{BM} = 2{,}5$.

a)



157/12. Man muß entlang der 3 Seitenhalbierenden schneiden. Man zerlegt dabei die Grundfläche in 6 inhaltsgleiche Flächenstücke, und die Höhe der Prismen bleibt gleich.

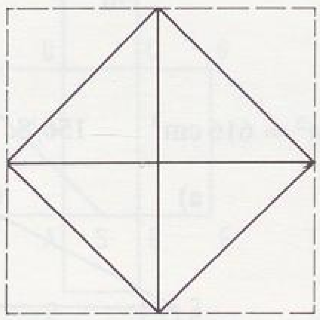
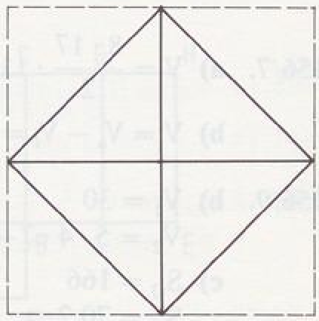
8. Kapitel

Aufgaben zu 8.1, 8.2 und 8.3

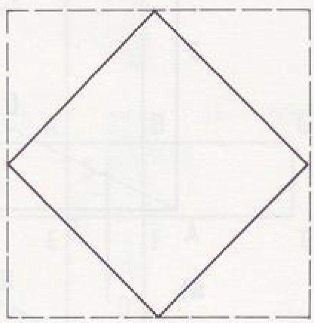
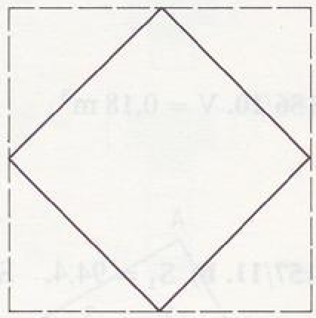
174/1.

Tenochtitlan:	Schrägbild	(Kavalierpr.)
Rathaus:	Normalbild	
Bauhaus:	Schrägbild	(Militärpr.)
Villa:	Normalbild	
Traumküche:	Schrägbild	(Militärpr.)
Residenz:	Normalbild	
St. Etienne:	Schrägbild	(Militärpr.)
Kirche:	Normalbild	
Kreuzgewölbe:	Schrägbild	(Kavalierpr.)
Zwinger:	Normalbild	(Aufriß)

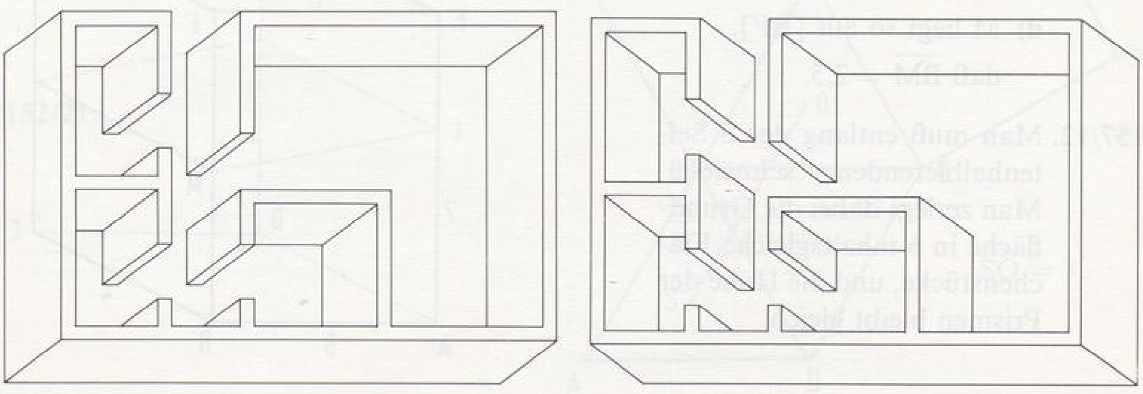
175/2. Achtflach:

Grundriß:  Aufriß: 

Würfelstumpf:

Grundriß:  Aufriß: 

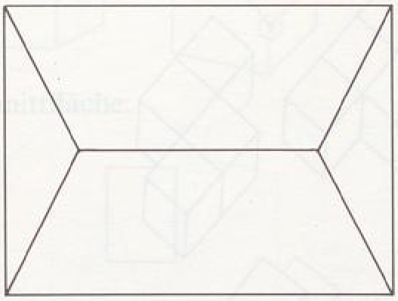
175/3.



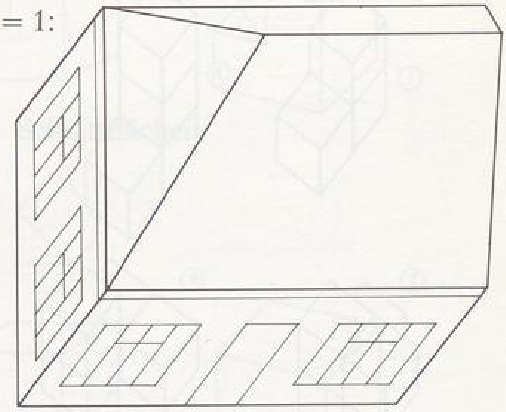
176/4. **a)** Türbreite: 2, Türhöhe: 4, Fensterbreite: 2, Fensterhöhe: 3

b) Höhe ohne Dach: 6, Höhe mit Dach: 12, Breite: 16, Tiefe: 12

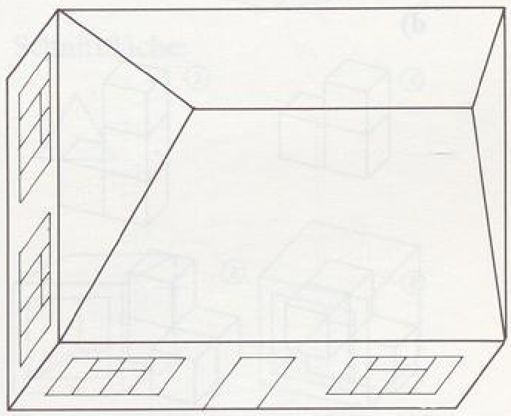
c)



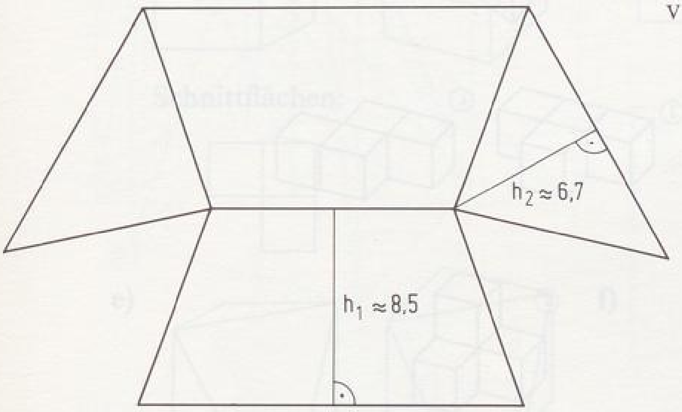
d) v = 1:



v = 0,5:

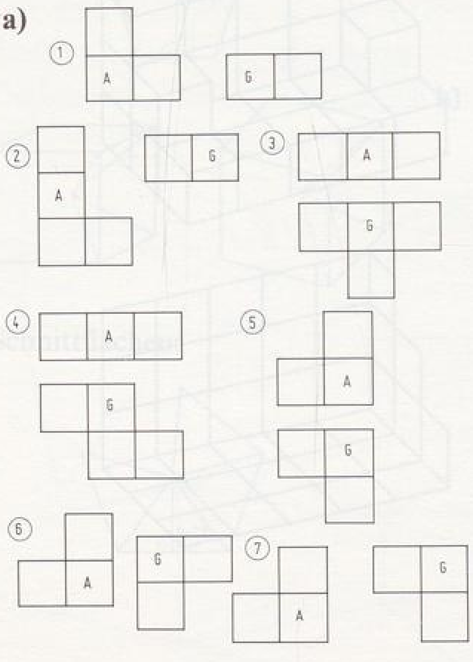


e) Netz des Dachs:

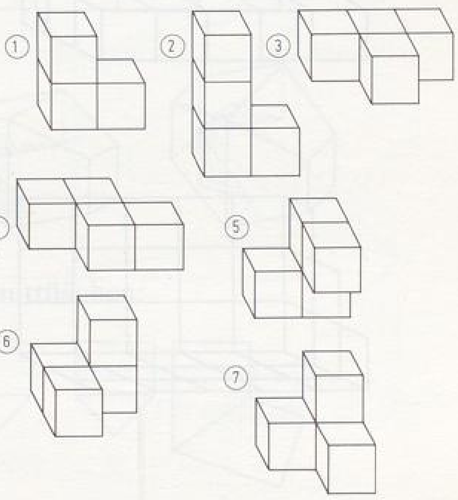


$$A \approx 2 \cdot \left(\frac{16 + 10}{2} \cdot 8{,}5\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6{,}7\right) = 301{,}4$$

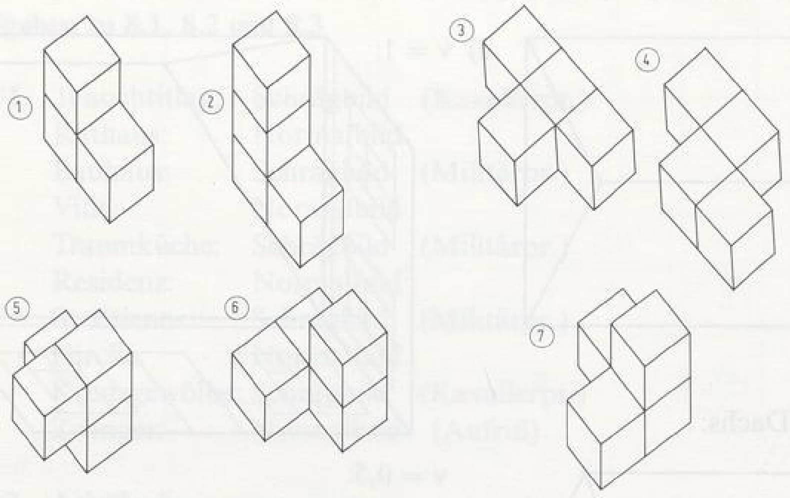
176/5. **a)**



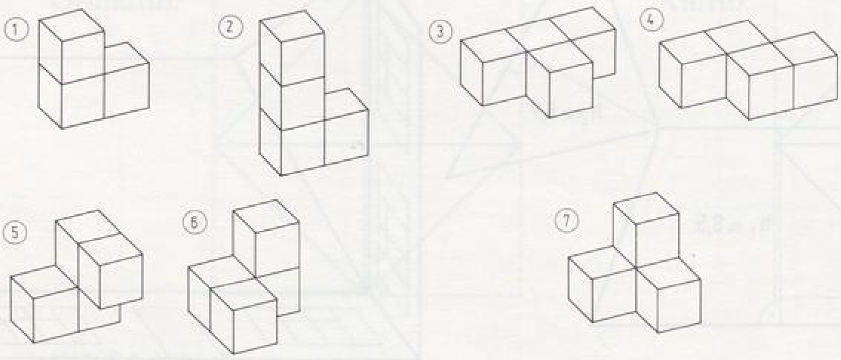
b)



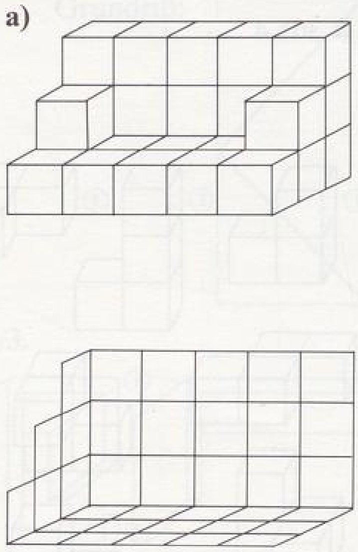
c) Militärprojektion: v = 1



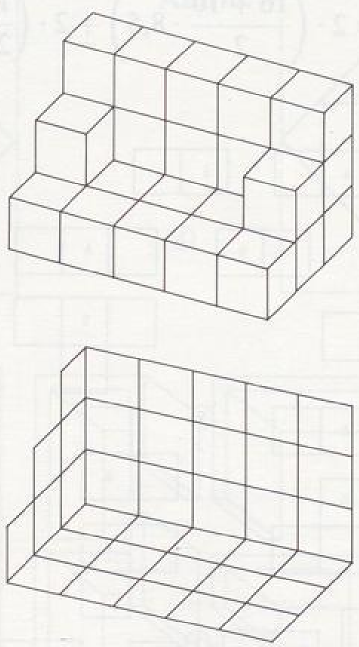
d)



177/6. a)

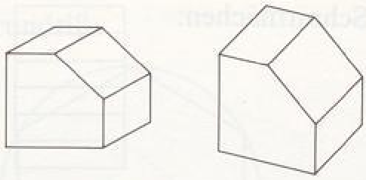


b)



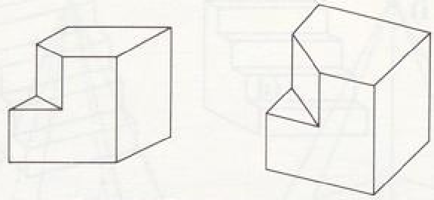
177/7.

a)

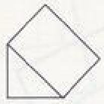


Schnittfläche:

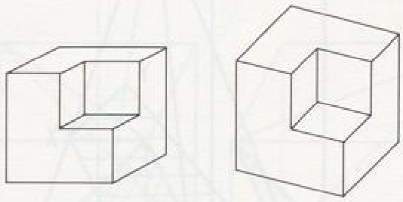
b)



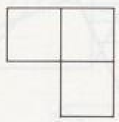
Schnittflächen:



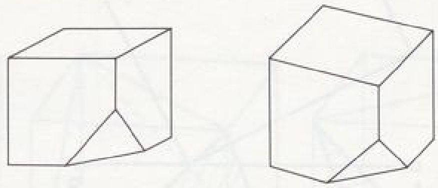
c)



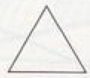
Schnittflächen:



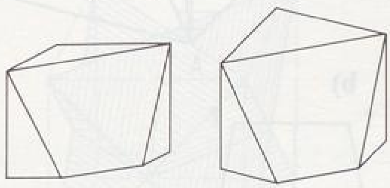
d)



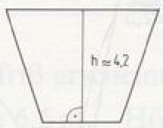
Schnittfläche:



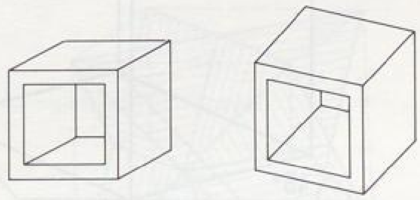
e)



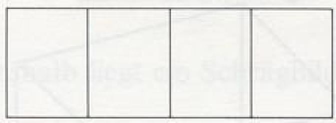
Schnittfläche:



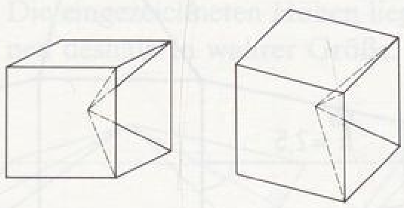
f)



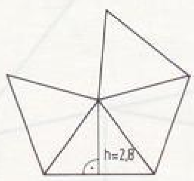
Schnittflächen:



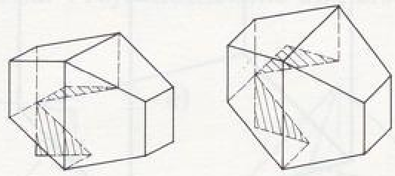
g)



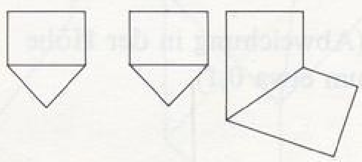
Schnittflächen:



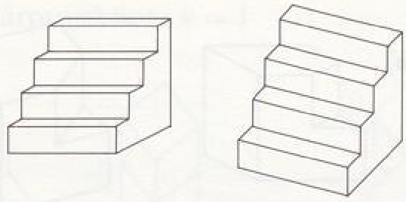
h)



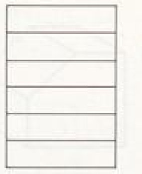
Schnittflächen:



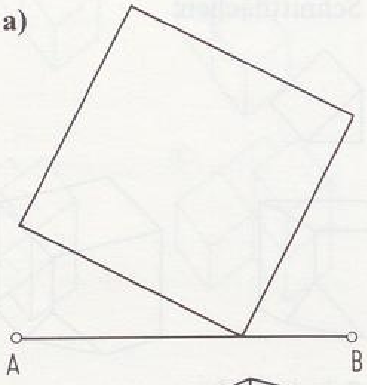
i)

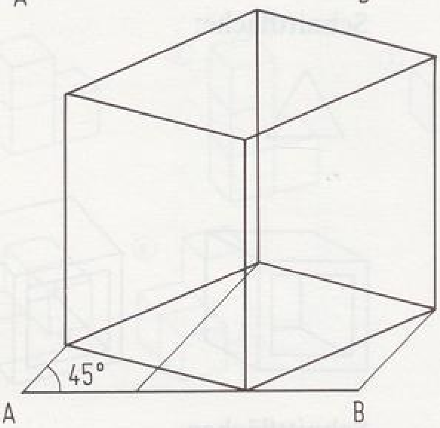


Schnittflächen:

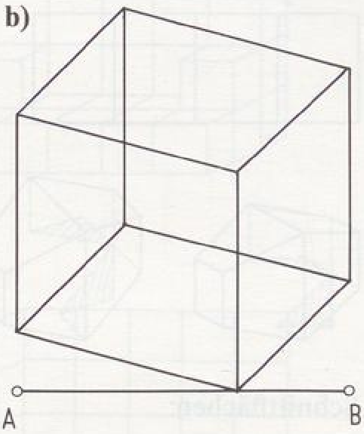


177/8. a)



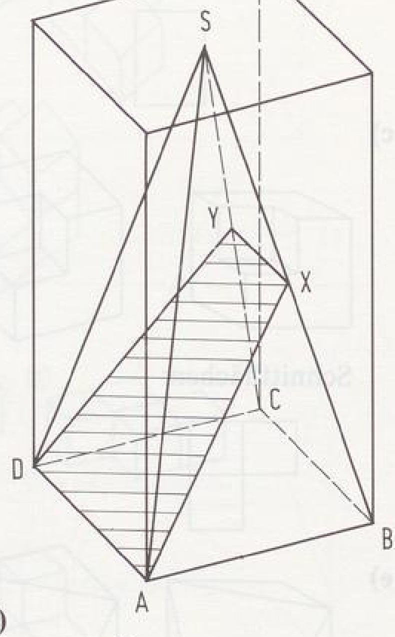


b)

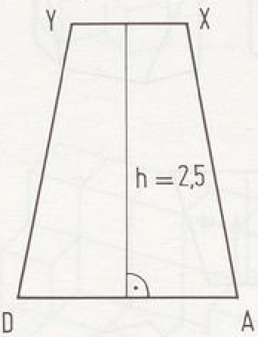


(Abweichung in der Höhe um etwa 0,1)

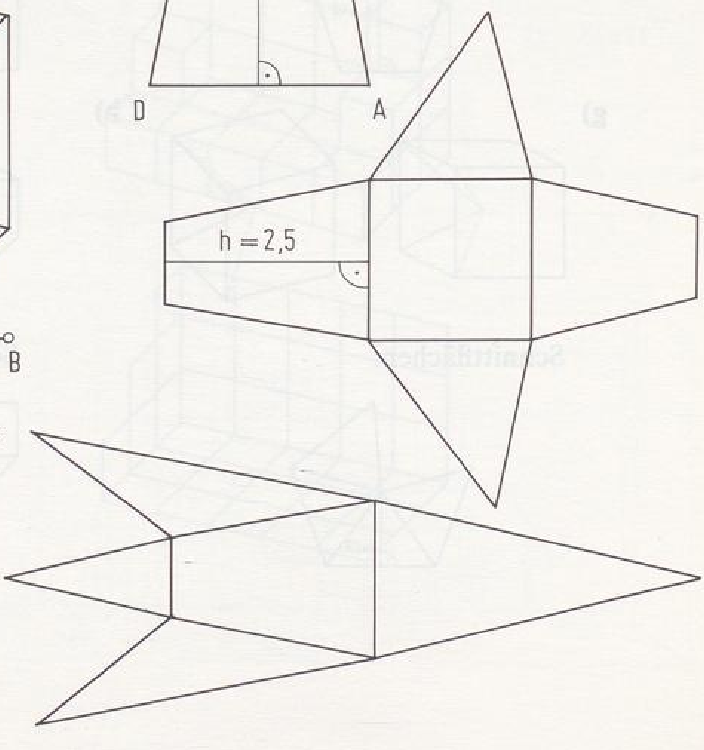
178/9. a)



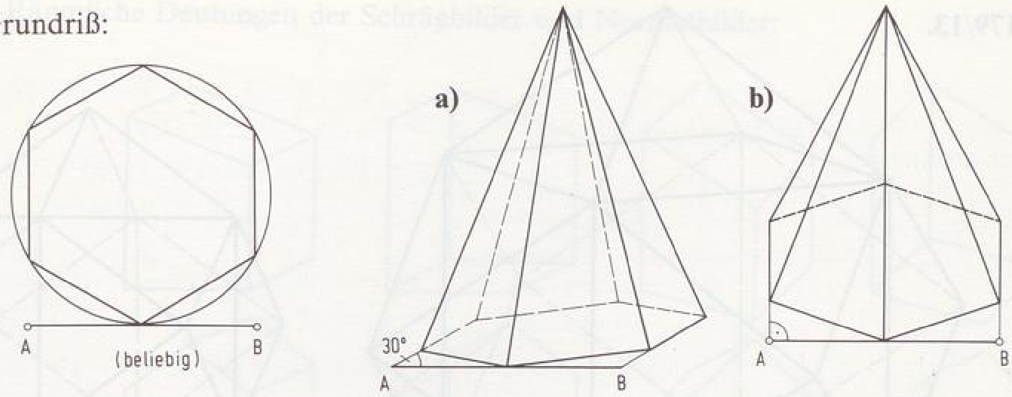
b)



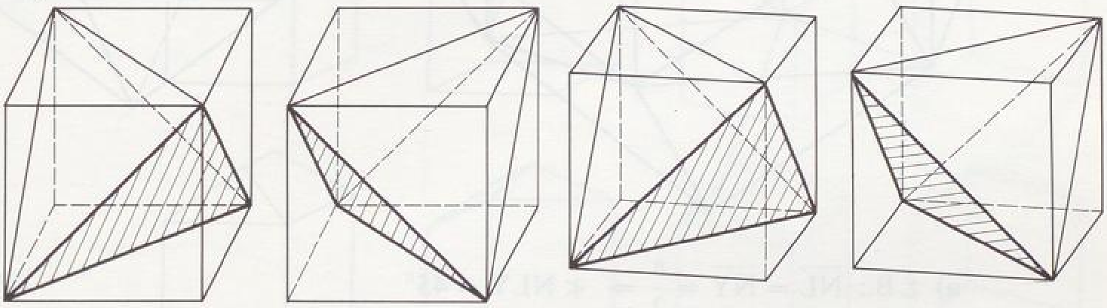
c)



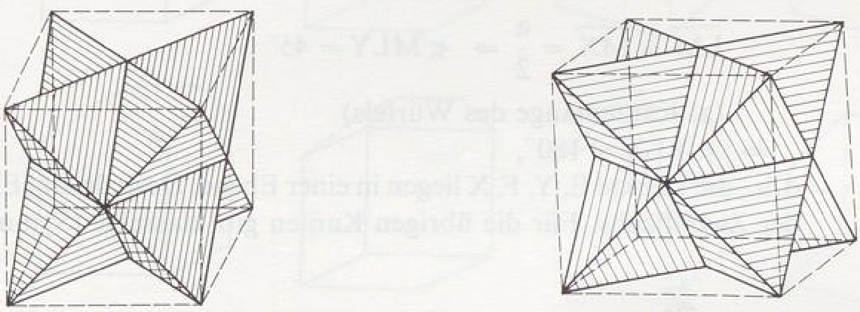
178/10. Grundriß:



178/11. a)



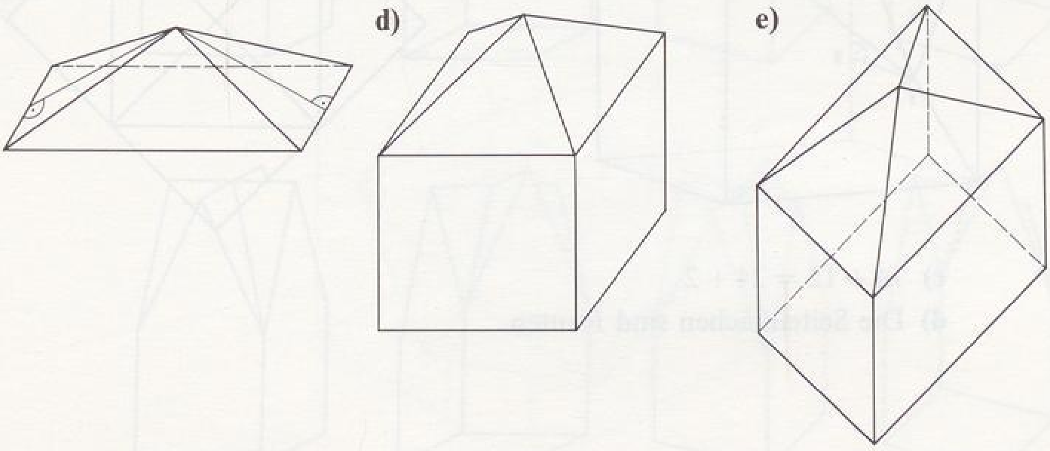
b)



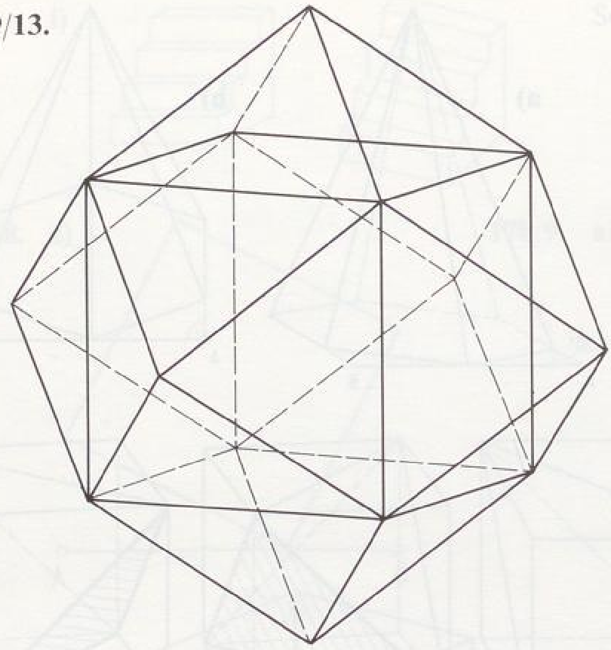
179/12. a) Der Aufriß erscheint in wahrer Größe, deshalb liegt ein Schrägbild vor.

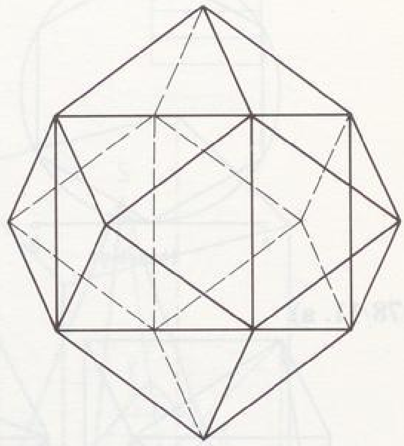
b) Tiefe: $\approx 6{,}6\,\mathrm{m}$, Höhe: $\approx 8{,}6\,\mathrm{m}$

c) Die eingezeichneten Höhen liegen parallel zur Projektionsebene und erscheinen deshalb in wahrer Größe.



179/13.





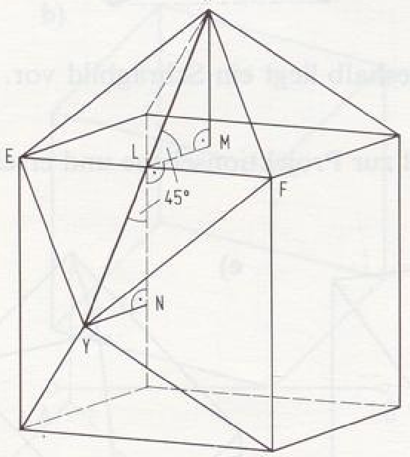
a) z. B.: $\overline{\text{NL}} = \overline{\text{NY}} = \frac{a}{2} \Rightarrow \sphericalangle \text{NLY} = 45^\circ$

$\overline{\text{LM}} = \overline{\text{MX}} = \frac{a}{2} \Rightarrow \sphericalangle \text{MLY} = 45^\circ$

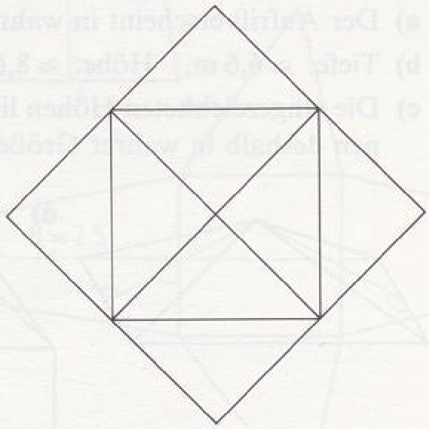
(a: Kantenlänge des Würfels)

$\Rightarrow \sphericalangle \text{YLX} = 180^\circ$,

d. h., die Punkte E, Y, F, X liegen in einer Ebene. Deshalb ist [EF] keine Kante der Zwölfflachs. Für die übrigen Kanten gibt dasselbe (Symmetrie).



b) Grundriß:

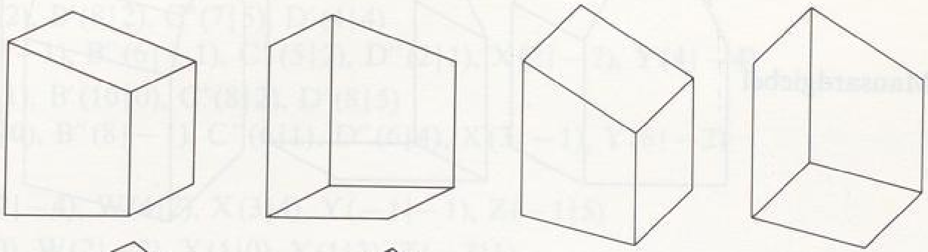


c) $14 + 12 = 24 + 2$

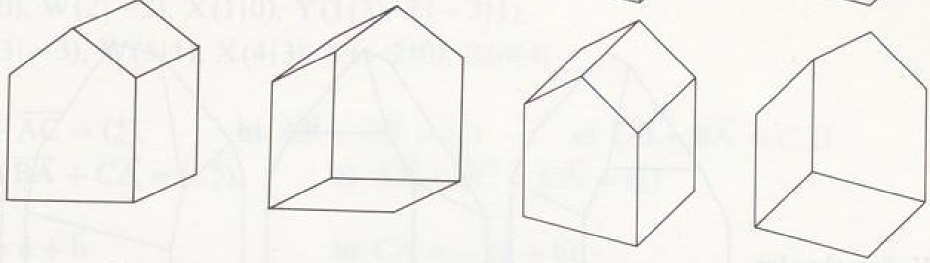
d) Die Seitenflächen sind Rauten.

180/14. Räumliche Deutungen der Schrägbilder und Normalbilder:

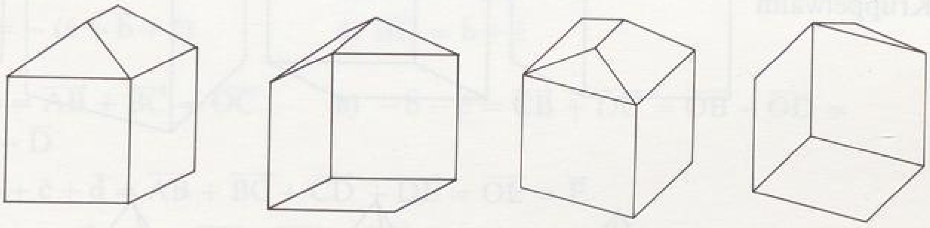
Pult



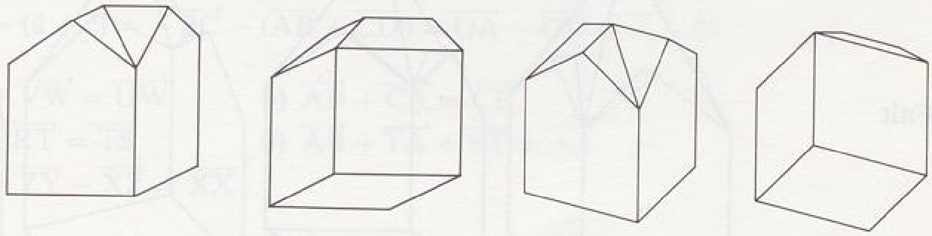
Sattel



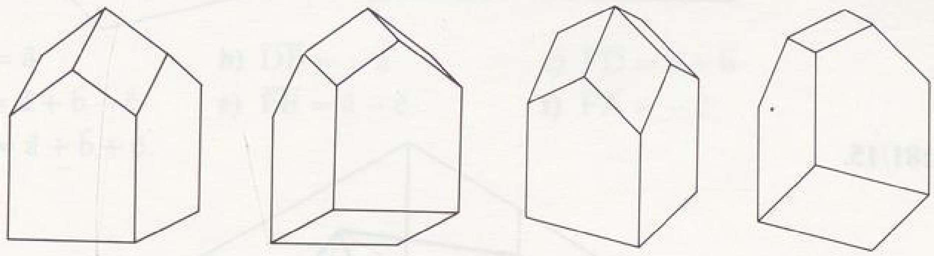
Walm



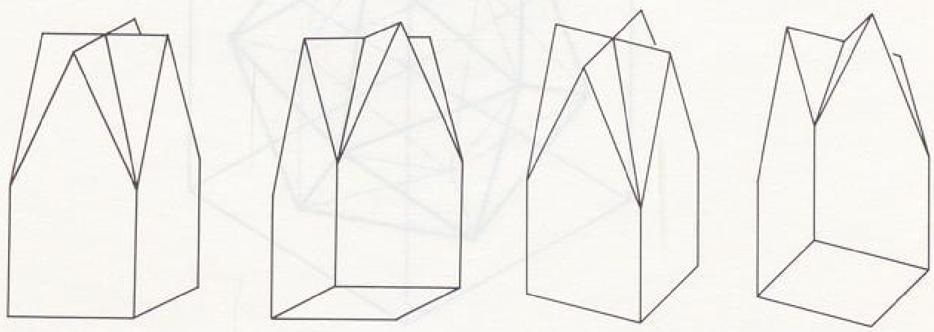
Übereckssattel



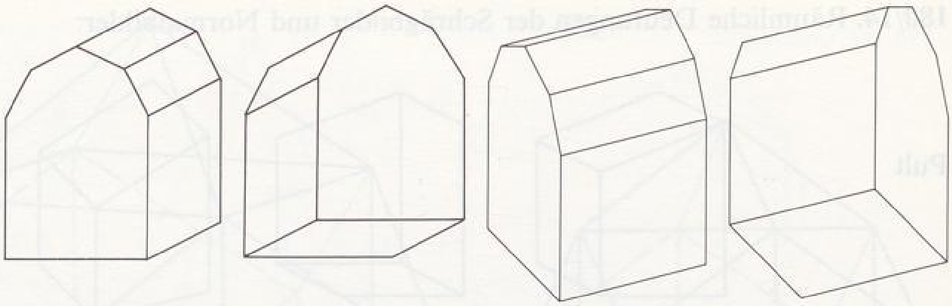
Rhomben



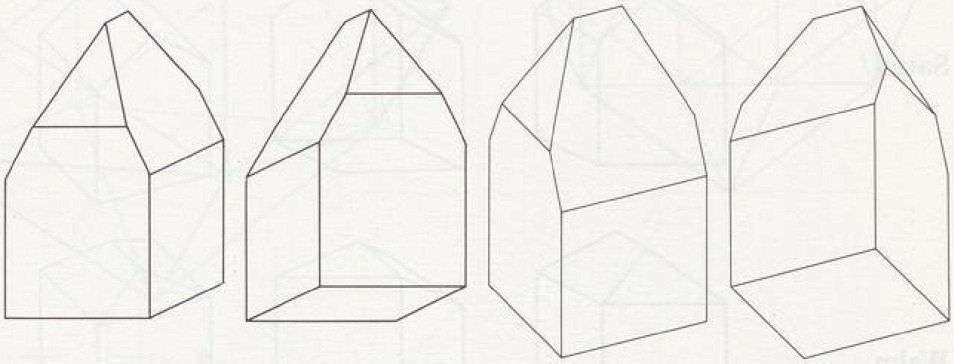
Kreuz



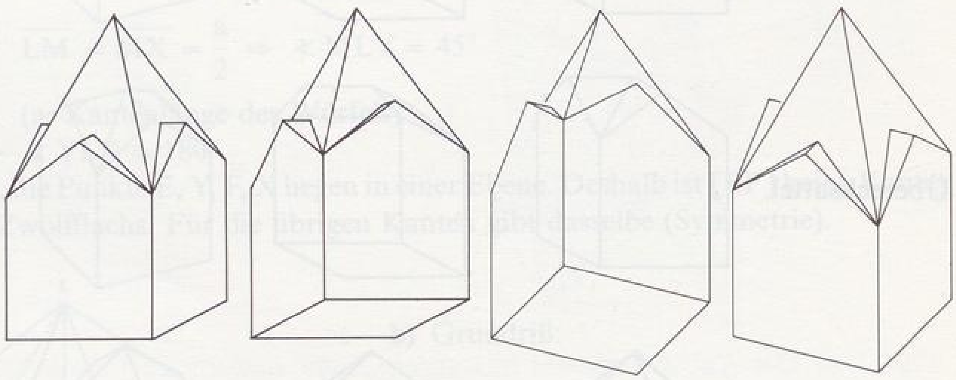
Mansardgiebel



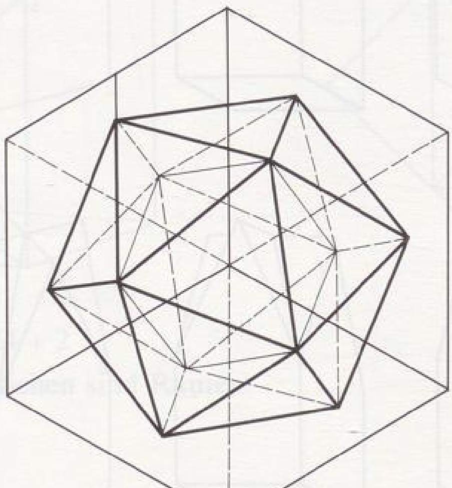
Krüppelwalm



Falt



181/15.



9. Kapitel

186/1. **a)** $A'(5|2)$, $B'(8|2)$, $C'(7|5)$, $D'(4|4)$
$A''(3|-1)$, $B''(6|-1)$, $C''(5|2)$, $D''(2|1)$, $X(2|-2)$, $Y(4|-4)$
b) $A'(6|1)$, $B'(10|0)$, $C'(8|2)$, $D'(8|5)$
$A''(4|0)$, $B''(8|-1)$, $C''(6|1)$, $D''(6|4)$, $X(3|-1)$, $Y(6|-2)$

186/2. **a)** $V(-2|-4)$, $W(4|2)$, $X(3|4)$, $Y(-1|-1)$, $Z(-1|5)$
b) $V(0|0)$, $W(2|-2)$, $X(1|0)$, $Y(1|3)$, $Z(-3|1)$
c) $V(-3|-3)$, $W(5|1)$, $X(4|3)$, $Y(-2|0)$, $Z(0|4)$

186/3. **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \binom{4}{6}$, **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \binom{5}{0}$ **c)** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \binom{-1}{-4}$
d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \binom{-6}{-4}$, **e)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \binom{0}{0}$

186/4. **a)** $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ **b)** $\overrightarrow{CA} = -(\vec{a} + \vec{b})$
c) $\overrightarrow{DA} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ **d)** $\overrightarrow{BD} = \vec{b} + \vec{c}$

186/5. **a)** $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ **b)** $-\vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} =$
$= \vec{B} - \vec{D}$
c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} = \vec{E}$
d) $-(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})) = -(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OE} = \vec{B} - \vec{E}$
e) $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c}) = -\overrightarrow{BC} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \vec{A} - \vec{D}$

186/6. **a)** $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{UW}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$
c) $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{TS}$ **d)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AA}$
e) $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XX}$

186/7. **a)** $\vec{x} = \overrightarrow{BA}$ **b)** $\vec{x} = \overrightarrow{BC}$ **c)** $\vec{x} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$

186/8. **a)** $\overrightarrow{ED} = \vec{a}$ **b)** $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$ **c)** $\overrightarrow{FD} = \vec{a} + \vec{b}$
d) $\overrightarrow{FC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ **e)** $\overrightarrow{FB} = \vec{a} - \vec{c}$ **f)** $\overrightarrow{FA} = -\vec{c}$
g) $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.