Algebra

Barth, Friedrich

München, 2002

Anhang: Zwei Aufgaben zu den Logarithmen von Bürgi und Napier samt Lösung

Übersetzungen aus 7.6

Abbildung 199.1:

Der Logarithmen erstes Tausend,

das der Verfasser drucken ließ, nicht in der Absicht, es der Öffentlichkeit zu übergeben, sondern teils, um dem Wunsch gewisser seiner Freunde für sich nachzukommen, teils auch, um mit seiner Hilfe nicht nur etliche sich anschließende Tausende, sondern die gesamte Tafel der Logarithmen, die der Berechnung aller Dreiecke dient, bequemer vollenden zu können. Er [= der Verfasser] hat nämlich selbst, vor einem Jahrzehnt, mit Hilfe algebraischer Gleichungen und Differenzen, die den Sinuswerten selbst proportional sind, eine Tafel der Sinuswerte von Grund auf genau erstellt, und zwar für jeden Grad und auch allen Hundertsteln eines Grades: diese, hofft er, zusammen mit den beigefügten Logarithmen, so Gott will, ans Licht zu bringen, sobald sich eine passende Gelegenheit ergibt.
Weil aber diese Logarithmen verschieden sind von denen, die ihr hochberühmter, der steten Erinnerung und Verehrung werter Erfinder in seinem *Canon Mirificus* veröffentlicht hat, so ist zu hoffen, daß sein nachgelassenes Buch uns nächstens völlig zufriedenstellen wird. Dieser redete dem Verfasser unablässig zu (als er ihn zweimal in seinem Haus zu Edinburg besuchte und, bei ihm aus freundlichste aufgenommen, mit größtem Vergnügen einige Wochen geblieben war und ihm von diesen [d. h. den neuen Logarithmen] einen besonders bedeutsamen Teil, den er damals fertiggestellt hatte, gezeigt hatte), diese Arbeit auf sich zu nehmen. Diesem war jener [= der Verfasser] sehr gern zu Willen.

Gering ist der Umfang, aber nicht unbeträchtlich der Ertrag und auch die Mühe.

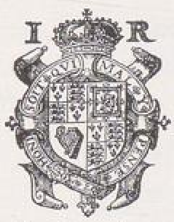
Abbildung 202.2:

Logarithmische Arithmetik

oder

dreißig Tausend Logarithmen, für die in natürlicher Reihenfolge wachsenden Zahlen von der Einheit bis 20 000 und von 90 000 bis 100 000. Mit deren Hilfe können viele arithmetische und geometrische Aufgaben gelöst werden.
Diese Zahlen erfand als erster der hochberühmte Mann Johannes Neperus [= John Napier], Baron von Merchiston: sie aber veränderte nach dessen Wunsche und erhellte ihre Erzeugung und ihren Gebrauch Henricus Briggius [= Henry Briggs], in der hochberühmten Universität von Oxford Professor für Geometrie auf dem Savile-Lehrstuhl.

Gott gab uns Leben und Geist, auf daß wir sie nutzen gleichsam wie Geld, wobei der Zahltag nicht vorherbestimmt ist.



Zu London,
gedruckt hat es Wilhelm Jones, 1624

Bemerkungen:

1) Lehrstühle werden nach ihren Stiftern benannt. Sir Henry Savile stiftete 1619 einen Lehrstuhl für Astronomie und einen für Geometrie und bot letzteren Henry Briggs an.

2) Das Wappen ist das Wappen Großbritanniens für die Jahre 1603 bis 1707, ausgenommen die Jahre der Republik (1649–1660) und die Wilhelms III. [1689–1702]*.
I R = Iacobus Rex. Jakob wurde, erst ein Jahr alt, 1567 nach Abdankung seiner Mutter Maria Stuart als Jakob VI. König von Schottland und 1603, nach dem Tode Elisabeths I., als Jakob I. König von England und Irland. Gestorben 1625.**

b a *a b*	*d*
c	*b a* *a b*

Die Felder seines Wappenschilds haben folgende Bedeutung.

a 3 goldene Löwen oder Leoparden auf rotem Grund, seit 1195 Wappen von König Richard I. Löwenherz [1189–1199]

b 3 goldene Lilien auf blauem Grund, das Wappen der Könige von Frankreich. Ursprünglich ein Lilienfeld, seit 1377 auf die Dreizahl reduziert. Eduard III. [1327–1377] verband 1340 sein englisches Wappen *a* mit dem französischen Lilienfeld *b* zu $\begin{smallmatrix} b & a \\ a & b \end{smallmatrix}$, um seinen Anspruch auf den französischen Thron zu dokumentieren, der Auslöser des Hundertjährigen Kriegs (1337–1453) zwischen England und Frankreich war. Heinrich IV. [1399–1453] reduzierte um 1407 auch im englischen Wappen auf 3 Lilien. Am 1. Januar 1801 wurden sie mit dem Verzicht auf den französischen Thron aus dem englischen Wappen entfernt.

c Eine goldene Harfe mit weißen Saiten auf blauem Grund, seit Jahrhunderten das Symbol Irlands.

d Das Wappen Schottlands. Der rote Löwe auf goldenem Grund wurde von König Alexander II. [1214–1243] eingeführt; sein Sohn Alexander III. [1249–1286] fügte die roten Zwillingsfäden, die beidseits von roten Lilien besetzt sind, hinzu.

Der Wappenspruch *Honi soit qui mal y pense* – »Ein Schelm, wer Arges dabei denkt« – ist die Devise des von Eduard III. 1348 gestifteten Hosenbandordens – *The Most Noble Order of the Garter* –, des höchsten britischen Ordens.

zu Seite 204

Mein Wunsch war es, jene Tausende, die zwischen 20 und 90 noch fehlten, berechnen und drucken zu lassen, und ich hatte sie alle beinahe fertiggestellt, und zwar durch mich selbst und durch einige Freunde, die meine Regeln genügend instruiert hatten, und durch Übereinkunft war das Geschäft angemessen unter uns aufgeteilt worden; aber ich bin jetzt von jener Bürde und Sorge erlöst durch einen gewissen Adrian Vlacque, einen Holländer, der all die Hunderttausend in Gänze berechnet und gedruckt hat in Latein, Holländisch und Französisch, 1000 Bücher in diesen 3 Sprachen, und sie fast alle schon verkauft hat. Aber er hat durchwegs 4 meiner Ziffern abgeschnitten; und er hat meine Widmung und auch mein Vorwort an den Leser weggelassen, ebenso zwei Kapitel, nämlich das zwölfte und das dreizehnte, alles übrige hat er gänzlich unverändert von mir übernommen.

* Die Zahlen in eckigen Klammern sind Regierungszeiten.
** Auf seine Proklamation vom 12.4.1606 geht die erste Form des *Union Jack* zurück.

Anhang

Zwei Aufgaben zu den Logarithmen von BÜRGI und NAPIER samt Lösung

Vorbemerkung: In Definition 155.1 wurde die Gleichung $y = b^x$ durch $x = \log_b y$ gelöst. Damit kann man sagen, daß die Zahlen der arithmetischen Folge 0, 1, 2, 3, ... die Logarithmen der Zahlen der geometrischen Folge $1, b, b^2, b^3, \dots$ zur Basis b sind. Es gilt dann die Gleichung $y = b^{\log_b y}$.
Betrachtet man eine allgemeine geometrische Folge $a, aq^1, aq^2, aq^3, \dots$ mit $a, q > 0$, so läßt sich der Begriff des Logarithmus folgendermaßen verallgemeinern.

Definition: Ist $y = aq^x$, dann heißt $x =: \mathrm{L}y$ allgemeiner Logarithmus von y, und es gilt $y = aq^{\mathrm{L}y}$, $y \in \mathbb{R}^+$.

1. Den *Progreß-Tabulen* BÜRGIS liegt für $n \in \mathbb{N}_0$ die Vorschrift $10n \mapsto 10^8(1+10^{-4})^n$ zugrunde. Setzen wir der Übersichtlichkeit halber $10^8 =: a$ und $1 + 10^{-4} =: q$, so lautet die Zuordnung $10n \mapsto y_n = aq^n$, die mit $n \mapsto y_n = aq^{\frac{n}{10}}$ äquivalent ist. Erweitern wir die Definitionsmenge auf ganz $\mathbb{R}$, so erhalten wir $x \mapsto y = aq^{\frac{x}{10}}$.
   Zu jeder schwarzen Zahl y gehört eine rote Zahl x, die man den BÜRGIschen Logarithmus von y nennt und mit $\mathrm{L_B}\,y$ bezeichnet. Für ihn gilt also $y = aq^{\frac{\mathrm{L_B}y}{10}}$.

   a) Zeige, daß die in der Unterschrift zu Abbildung 198.1 angegebenen Druckfehler tatsächlich vorhanden sind. Berechne dazu $aq^{\frac{5000}{10}}$ und $aq^{\frac{230270}{10}}$.

   b) Zeige, daß für $\mathrm{L_B}\,y$ gilt: $\mathrm{L_B}\,y = \dfrac{10\lg y - 80}{\lg q}$

   c) Berechne damit einige der auf der Titelseite der *Progreß-Tabulen* (Abbildung 198.1) angegebenen roten Zahlen, also die BÜRGIschen Logarithmen der schwarzen Zahlen.

   d) Zum Rechnen hat BÜRGI seine Tafel wie folgt verwendet:

   $$\left.\begin{array}{l} u = aq^{\frac{\mathrm{L_B}u}{10}} \\ v = aq^{\frac{\mathrm{L_B}v}{10}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{uv}{a} = aq^{\frac{\mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v}{10}}. \qquad \text{Andererseits gilt} \quad \frac{uv}{a} = aq^{\frac{\mathrm{L_B}\left(\frac{uv}{a}\right)}{10}}.$$

   Aus den beiden letzten Gleichungen gewinnt man die Beziehung

   $$\mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v = \mathrm{L_B}\left(\frac{uv}{a}\right). \qquad (*)$$

   Man erhält also den Wert des Produkts uv, indem man die roten Zahlen $\mathrm{L_B}u$ und $\mathrm{L_B}v$ addiert, zu ihrem Summenwert die entsprechende schwarze Zahl aufsucht und diese dann noch mit $a = 10^8$ multipliziert.

   Beispiel:
   $$\begin{array}{ll} u = 101\,440\,201 & \mathrm{L_B}u = 1430 \\ v = 101\,826\,387 & \mathrm{L_B}v = 1810 \\ \hline & \mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v = 3240 \end{array}$$

   also $\dfrac{uv}{a} = 103\,292\,892$ und damit

   $uv = 103\,292\,892 \cdot 10^8$.

   1) Überprüfe die Rechnung mit deinem Taschenrechner.

2) Berechne unter Verwendung von Abbildung 198.1 die Produkte

α) 116 182 553 · 164 868 006 und β) 134 983 856 · 211 692 064.

3) Leite eine (*) entsprechende Beziehung für uvw her.

e) Leite eine Formel für den Quotienten $\frac{u}{v}$ her und berechne damit

1) 164 868 006 : 116 182 553 2) 211 692 064 : 134 983 856

3) 101 826 387 : 101 440 201

f) Zeige: Ist in einem Produkt ein Faktor eine Zehnerpotenz 10^k, $k \in \mathbb{Z}$, so erhält man den Logarithmus von $y \cdot 10^k$, indem man zum Logarithmus von y das k-fache der »ganzen Roten Zahl« $R := 230\,270{,}022$ addiert; kurz

$$L_B(y \cdot 10^k) = L_B(y) + kR, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{**}$$

g) Zahlen, die nich der Dekade $[10^8; 10^9]$ angehören, bzw. Logarithmen, die nicht dem Intervall $[0; R]$ angehören, können durch Verwendung von (**) aus **f)** in passende Zahlen bzw. Logarithmen transformiert werden.

Beispiel:

1) $L_B(173{,}320536) = L_B(173\,320\,536 \cdot 10^{-6}) =$
$= 55\,000 - 6 \cdot 230\,270{,}022 = -1\,326\,620{,}132$

2) $L_B y = 435\,270{,}022 = 205\,000 + R = L_B(u \cdot 10)$
Da $205\,000 = L_B(776\,710\,499)$ ist, ist $y = 7\,767\,104\,990$.

1) Überprüfe die Beispiele mit dem Taschenrechner.

2) Berechne α) das Produkt 6359,23131 · 0,738831728
β) den Quotienten 101,440201 : 10182,6387.
Überprüfe die erhaltenen Ergebnisse mit dem Taschenrechner.

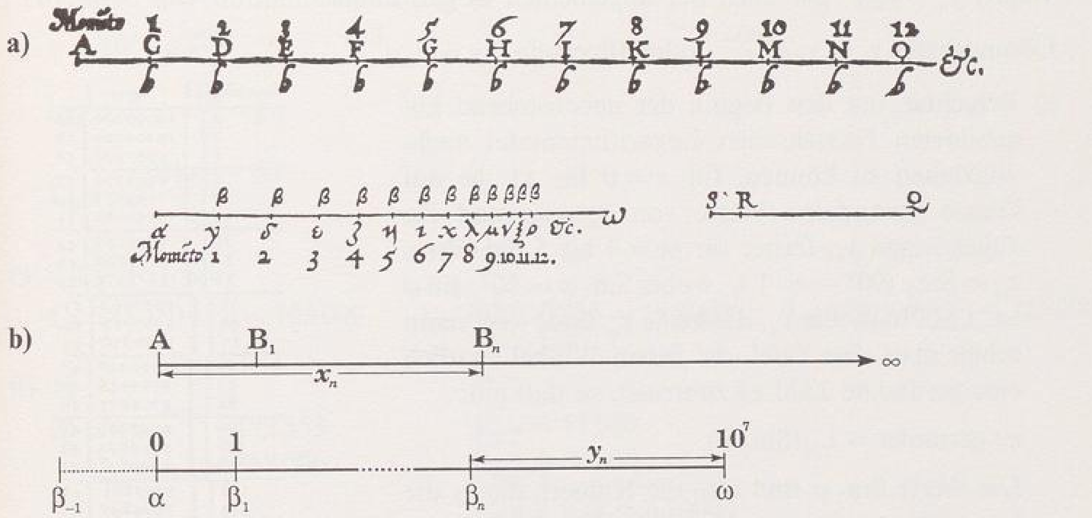
h) Auch das Radizieren funktioniert mit Formel (*). Setzen wir nämlich $u = v = \sqrt{z}$, so erhalten wir $L_B(\sqrt{z}) + L_B(\sqrt{z}) = L_B\left(\frac{z}{a}\right)$. Mit $x := \frac{z}{a}$ wird daraus $2\,L_B(\sqrt{ax}) = L_B(x)$.
Wegen $a = 10^8$ erhält man schließlich $L_B(10^4 \cdot \sqrt{x}) = \frac{1}{2} L_B(x)$.
Man ermittelt also $\sqrt{x}$, indem man den zum schwarzen Numerus x gehörenden roten BÜRGIschen Logarithmus $L_B(x)$ halbiert. Der zu dieser roten Zahl gehörende schwarze Antilogarithmus hat dann den Wert $10^4 \cdot \sqrt{x}$, woraus man nach Division durch 10^4 sofort das gesuchte $\sqrt{x}$ erhält.

Beispiel: Gesucht ist $\sqrt{816\,531\,257}$.
$L_B(10^4 \cdot \sqrt{816\,531\,257}) = \frac{1}{2} L_B(816\,531\,257) = \frac{1}{2} \cdot 210\,000 = 105\,000$
$10^4 \cdot \sqrt{816\,531\,257} = 285\,750\,111$
$\sqrt{816\,531\,257} = 28\,575{,}0111.$

Überprüfe die Genauigkeit mit deinem Taschenrechner und berechne ebenso

1) $\sqrt{668\,525\,936}$ 2) $\sqrt{902\,402\,087}$ 3) $\sqrt{31{,}5801133}$.

2. Napier läßt zur Konstruktion der Logarithmen zwei Punkte B und β in A bzw. α mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit starten. B bewegt sich auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit fort; dabei legt er in der Zeiteinheit den Weg s zurück. Nach n Zeiteinheiten befindet er sich am Ort B_n und hat die Strecke $x_n = ns$ zurückgelegt.



Napiers Skizze zur Konstruktion der Logarithmen
a) Original aus der *Descriptio* (1614) **b)** Umzeichnung unter Benützung von Indizes

Der Punkt β muß die Strecke $[\alpha\omega]$ der Länge $y_0 = 10^7$ durchlaufen. Nach der ersten Zeiteinheit langt er bei β_1 an, wobei Napier der Strecke $[\alpha\beta_1]$ die Länge 1 gibt. Nach n Zeiteinheiten kommt er bei β_n an. Dabei bewegt er sich so, daß die Längen y_n der Reststrecken $[\beta_n\omega]$ eine geometrische Folge bilden, also $y_{n+1} = y_n q$ ist. q stellt Napier durch $\overline{RQ} : \overline{SQ}$ dar; es errechnet sich aus

$$1 = \overline{\alpha\beta_1} = y_0 - y_1 = y_0 - y_0 q = y_0(1-q) \quad \text{zu} \quad q = 1 - \frac{1}{y_0} = 1 - 10^{-7} = 0{,}9999999.$$

Die Länge s gewinnt Napier aus der Forderung gleicher Anfangsgeschwindigkeit für B und β: Da die mittlere Geschwindigkeit auf der Strecke $[\alpha\beta_1]$ gleich 1 ist, muß die Anfangsgeschwindigkeit größer sein. Napier berechnet sie als die mittlere Geschwindigkeit auf der Strecke $[\beta_{-1}\beta_1]$. Dazu benötigt er deren Länge

$$\overline{\beta_{-1}\beta_1} = \overline{\beta_{-1}\omega} - \overline{\beta_1\omega} = \frac{1}{q}\cdot\overline{\alpha\omega} - q\cdot\overline{\alpha\omega} = \left(\frac{1}{q} - q\right)\overline{\alpha\omega} = \frac{1-q^2}{q}\cdot 10^7 =$$

$$= \frac{1-q^2}{q}\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{1+q}{q} = 1 + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{1-10^{-7}}.$$

Dividiert man den Bruch nach dem Verfahren der Polynomdivision, so erhält man $\overline{\beta_{-1}\beta_1} = 1 + 1 + 10^{-7} + 10^{-14} + \ldots \approx 2 + 10^{-7}$.
Da $[\beta_{-1}\beta_1]$ in 2 Zeiteinheiten zurückgelegt wird, ist die mittlere Geschwindigkeit und damit auch die Anfangsgeschwindigkeit beider Bewegungen zahlenmäßig gleich $s = 1 + \frac{1}{2}\cdot 10^{-7} = 1{,}000\,000\,05$.

Nach NAPIER sind die x_n die Logarithmen der y_n. Bezeichnen wir den NAPIERschen Logarithmus mit L_N, so gilt

$$x_n = L_N\, y_n \Leftrightarrow ns = L_N\, y_n \Leftrightarrow n = \frac{1}{s}\, L_N\, y_n.$$

Wegen $y_n = y_0 q^n$ gilt nach der allgemeinen Logarithmusdefinition von Seite 103 des Lösungshefts $y_n = y_0 q^{\frac{L_N y_n}{s}}$ oder allgemein $y = y_0 q^{\frac{L_N y}{s}}$.

a) Berechne, um den Beginn der nebenstehend abgebildeten NAPIERschen Logarithmentafel nachvollziehen zu können, für $n = 0$ bis 11 die auf Ganze gerundeten Werte von $x_n = ns$ und die zugehörigen y_n, ferner für $m = 0$ bis 5 die Werte $z_m := \mathrm{Sin}_7\,(90° - m \cdot 1')$, wobei $\mathrm{Sin}_7\,\varphi := 10^7 \cdot \sin\varphi$ ist. Läßt man alle y_n, die keine z_m sind, weg, dann erhält man eine Tafel, die jedem Winkel letztlich eine gerundete Zahl ns zuordnet, so daß gilt:

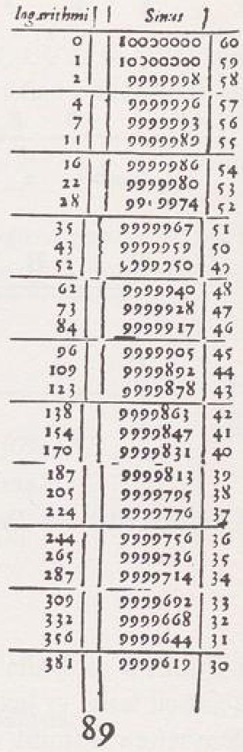
ns gerundet $= L_N(\mathrm{Sin}_7\,\varphi)$.

Die Werte $\mathrm{Sin}_7\,\varphi$ sind also die Numeri, die ns die Logarithmen. Zeige dabei, daß sich z. B. ergibt

$L_N(\mathrm{Sin}_7\, 89° 56') = 7.$

b) Zeige, daß $L_N\, y = \dfrac{s(\lg y - \lg y_0)}{\lg q}$.

c) Berechne $L_N(\mathrm{Sin}_7\, 30°) = L_N(\frac{1}{2} \cdot 10^7)$.
NAPIER erhielt wegen eines Rechenfehlers dafür den Wert 6931469. KEPLER korrigierte ihn zu 6931472.
Siehe hierzu Abbildung 201.1 und Fußnote *** auf Seite 201 des Lehrbuchs.



Logarithmi	Sinus	
0	10000000	60
1	10000000	59
2	9999998	58
4	9999996	57
7	9999993	56
11	9999989	55
16	9999986	54
22	9999980	53
28	9999974	52
35	9999967	51
43	9999959	50
52	9999950	49
62	9999940	48
73	9999928	47
84	9999917	46
96	9999905	45
109	9999892	44
123	9999878	43
138	9999863	42
154	9999847	41
170	9999831	40
187	9999813	39
205	9999795	38
224	9999776	37
244	9999756	36
265	9999736	35
287	9999714	34
309	9999692	33
332	9999668	32
356	9999644	31
381	9999619	30

89

Ausschnitt aus NAPIERS Logarithmentafel von 1614*

* Von rechts nach links zeigt die erste Spalte die zu 89° gehörenden Minuten, die zweite Spalte die zugehörigen Werte $\mathrm{Sin}_7\,\varphi := 10^7 \cdot \sin\varphi$ und die dritte $L_N(\mathrm{Sin}_7\,\varphi)$.

Lösungen

1. **a)** Mit dem Taschenrechner ergibt sich

$$aq^{\frac{5000}{10}} = 105\,126\,847$$

$$aq^{\frac{230270}{10}} = 999\,999\,779 \approx 1\,000\,000\,000$$

b) $y = 10^8 \cdot q^{\frac{\mathrm{L_B}\,y}{10}}$

$$\lg y = 8 + \frac{\mathrm{L_B}\,y}{10} \lg q$$

$$\mathrm{L_B}\,y = \frac{10 \lg y - 80}{\lg q}$$

c) Zum Beispiel:

$\mathrm{L_B}\; 285\,750\,111 = 105\,000$ $\quad$ $\mathrm{L_B}\; 702\,800\,236 = 195\,000$ $\quad$ $\mathrm{L_B}\; 128\,400\,937 = 25\,000$

d) **1)** –

2) **α)** $u = 116\,182\,553$ $\qquad \mathrm{L_B}\,u = 15\,000$

$v = 164\,868\,006$ $\qquad \mathrm{L_B}\,v = 50\,000$

$\mathrm{L_B}\,u + \mathrm{L_B}\,v = 65\,000$

$uv = 191\,547\,858 \cdot 10^8$

β) $u = 134\,983\,856$ $\qquad \mathrm{L_B}\,u = 30\,000$

$v = 211\,692\,064$ $\qquad \mathrm{L_B}\,v = 70\,000$

$\mathrm{L_B}\,u + \mathrm{L_B}\,v = 100\,000$

$uv = 271\,814\,593 \cdot 10^8$

3)
$$\left.\begin{aligned} \frac{uvw}{a^2} &= aq^{\frac{\mathrm{L_B}u + \mathrm{L_B}v + \mathrm{L_B}w}{10}} \\ \frac{uvw}{a^2} &= aq^{\frac{\mathrm{L_B}\left(\frac{uvw}{a^2}\right)}{10}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{L_B}\,u + \mathrm{L_B}\,v + \mathrm{L_B}\,w = \mathrm{L_B}\left(\frac{uvw}{a^2}\right)$$

e)
$$\left.\begin{aligned} a\frac{u}{v} &= aq^{\frac{\mathrm{L_B}u - \mathrm{L_B}v}{10}} \\ a\frac{u}{v} &= aq^{\frac{\mathrm{L_B}\left(a\frac{u}{v}\right)}{10}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{L_B}(u) - \mathrm{L_B}(v) = \mathrm{L_B}\left(a\frac{u}{v}\right)$$

1) $u = 164\,868\,006$ $\qquad \mathrm{L_B}\,u = 50\,000$

$v = 116\,182\,553$ $\qquad \mathrm{L_B}\,v = 15\,000$

$\mathrm{L_B}\,u - \mathrm{L_B}\,v = 35\,000$

$$a \cdot \frac{u}{v} = 141\,904\,272$$

$$\frac{u}{v} = 1{,}41\,904\,272$$

2) 1,49 179 486

3) 1,00 380 704

f) Es sei $k =: n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{L_B}(u \cdot 10) \;= \mathrm{L_B}\left(\frac{u \cdot 10^9}{10^8}\right) = \mathrm{L_B}(u) + \mathrm{L_B}(10^9) = \mathrm{L_B}\,u + R$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L_B}(u \cdot 10^2) &= \mathrm{L_B}([u \cdot 10] \cdot 10) = \\ &= \mathrm{L_B}[u \cdot 10] + R = \\ &= \mathrm{L_B}\,u + R + R = \mathrm{L_B}\,u + 2R\end{aligned}$$

Offenkundig erhält man

$$\mathrm{L_B}(u \cdot 10^n) = \mathrm{L_B}\,u + nR. \qquad (1)$$

Mit $z := u \cdot 10^n$ wird daraus

$$\mathrm{L_B}(z) = \mathrm{L_B}(z \cdot 10^{-n}) + nR$$

$$\mathrm{L_B}(z \cdot 10^{-n}) = \mathrm{L_B}(z) - nR \qquad (2)$$

(1) und (2) lassen sich zusammenfassen zu

$$\mathrm{L_B}(y \cdot 10^k) = \mathrm{L_B}\,y + kR, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

g) 1) –

2) α) $\mathrm{L_B}(6359{,}23131 \cdot 0{,}738\,831\,728) =$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{L_B}(635\,923\,131 \cdot 10^{-5} \cdot 738\,831\,728 \cdot 10^{-9}) = \\ &= \mathrm{L_B}\left(\frac{635\,923\,131 \cdot 738\,831\,728}{10^8} \cdot 10^{-6}\right) = \\ &= 185\,000 + 200\,000 - 6 \cdot R = \\ &= 385\,000 - 6R = \\ &= 154\,729{,}978 - 5R.\end{aligned}$$

Somit

$$6359{,}23131 \cdot 0{,}738\,831\,728 = 4698{,}40185$$

β) $\mathrm{L_B}\left(\dfrac{101{,}440\,201}{10\,182{,}6387}\right) = \mathrm{L_B}\left(\dfrac{101\,440\,201 \cdot 10^{-6}}{101\,826\,387 \cdot 10^{-4}}\right) =$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{L_B}\left(10^8 \cdot \frac{101\,440\,201}{101\,826\,387} \cdot 10^{-10}\right) = \\ &= 1430 - 1810 - 10R = \\ &= -380 - 10R = \\ &= 229\,890{,}022 - 11R\end{aligned}$$

Somit

$$\frac{101{,}440\,201}{10\,182{,}6387} = 996\,207\,399 \cdot 10^{-11} = 0{,}009\,620\,7399$$

h) 1) 25 855,8685

2) 30 040,0081

3) 5,619 618 61, da $\mathrm{L_B}\left(10^4\sqrt{315\,801\,133 \cdot 10^{-7}}\right) =$

$$\begin{aligned}&= \tfrac{1}{2}\mathrm{L_B}(315\,801\,133 \cdot 10^{-7}) = \\ &= 57\,500 - 3{,}5R = \\ &= 172\,635{,}011 - 4R.\end{aligned}$$

2. a)

n	x_n	$\approx x_n$	y_n	m	z_m
0	0	0	10 000 000	0	10 000 000
1	1,000 000 05	1	9 999 999	1	9 999 999,577
2	2,000 000 10	2	9 999 998	2	9 999 998,308
3	3,000 000 15	3	9 999 997		
4	4,000 000 20	4	9 999 996	3	9 999 996,192
5	5,000 000 25	5	9 999 995		
6	6,000 000 30	6	9 999 994		
7	7,000 000 35	7	9 999 993	4	9 999 993,231
8	8,000 000 40	8	9 999 992		
9	9,000 000 45	9	9 999 991		
10	10,000 000 50	10	9 999 990		
11	11,000 000 55	11	9 999 989	5	9 999 989,423

NB: Für $m = 1$ wird 9 999 999,577 auf 10 000 000 gerundet, bei allen anderen wird abgerundet.

b) $y = y_0 q^{\frac{\mathrm{L_N} y}{s}}$

$$\lg y = \lg y_0 + \frac{\mathrm{L_N} y}{s} \lg q$$

$$\mathrm{L_N} y = \frac{s(\lg y - \lg y_0)}{\lg q}$$

c) $$\mathrm{L_N}(\mathrm{Sin}_7\, 30°) = \frac{(1 + 0{,}5 \cdot 10^{-7})\,[\lg(0{,}5 \cdot 10^7) - \lg 10^7]}{\lg(1 - 10^{-7})} =$$

$$= 6\,931\,471{,}804 \approx 6\,931\,472\,.$$