Algebra

Barth, Friedrich

München, 2002

Lösungen der Aufgaben 111/115 bis 111/19 gemäß der Formulierung von Satz 108.2 ab der 4. Auflage von Algebra 10

urn:nbn:de:hbz:466:1-83986

Lösungen
der Aufgaben 111/15 bis 111/19 gemäß der Formulierung von Satz 108.2 ab der 4. Auflage von *Algebra 10*

111/15. a) + − − + + − 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung
− − + + − − 2 Wechsel: 2 oder 0 negative Lösungen
Ganzzahlig möglich: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 12$
$x_1 = 1$
$(x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12) : (x - 1) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$
$x_2 = -1$
$(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12) : (x + 1) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
$x_3 = 2$
$(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6$
$x_4 = -2, \quad x_5 = 3$
$L = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

b) + + − − + 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen
+ − − + + 2 Wechsel: 2 oder 0 negative Lösungen
Ganzzahlig möglich: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$
$x_1 = 1$
$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4$
$x_2 = 1$
$(x^3 + 3x^2 - 4) : (x - 1) = x^2 + 4x + 4$
$x_3 = x_4 = -2$
$L = \{-2; 1\}$

c) + − + + − 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung
+ + + − − 1 Wechsel: 1 negative Lösung
Ganzzahlig möglich: $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9$
$x_1 = 1$
$(x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9) : (x - 1) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$
$x_2 = -1$
$(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) : (x + 1) = x^2 - 6x + 9$
$x_3 = x_4 = 3$
$L = \{-1; 1; 3\}$

d) + + kein Wechsel: 0 positive Lösungen
− + 1 Wechsel: 1 negative Lösung
Also: 1 negative Lösung, keine positive Lösung
$L = \{-1\}$

e) $+ - + -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung
$+ - + -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 negative Lösung
Ganzzahlig möglich: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 12,\ \pm 18,\ \pm 36$
$x_1 = 1$
$(x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36) : (x-1) = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36$
$x_2 = -1$
$(x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36) : (x+1) = x^4 - 13x^2 + 36$
Biquadratische Gleichung, also
$x^2 = 4 \vee x^2 = 9 \Leftrightarrow x_3 = -2,\quad x_4 = 2,\quad x_5 = -3,\quad x_6 = 3$
Somit $L = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

f) $+ - +$ 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen
$- + +$ 1 Wechsel: 1 negative Lösung
Somit: 1 negative Lösung, 2 oder 0 positive Lösungen
Ganzzahlig möglich: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 11,\ \pm 22$
$x_1 = -2$
$(x^5 - 5x + 22) : (x+2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 11$
Die möglichen positiven ganzzahligen Lösungen 1 und 11 sind keine Lösungen.
Es gilt sogar: Es gibt überhaupt keine positive Lösung.
Beweis: siehe Seite 54.

111/16. a) $+ + + -$ 1 Wechsel: 1 positive Lösung
$- + - -$ 2 Wechsel: 2 oder 0 negative Lösungen
Möglich: $\pm \frac{1}{3},\ \pm 1$
$x_1 = \frac{1}{3}$
$(3x^3 + 5x^2 + 7x - 3) : (x - \frac{1}{3}) = 3x^2 + 6x + 9$
Diskriminante $= 36 - 4 \cdot 3 \cdot 9 < 0$
$L = \{\frac{1}{3}\}$

b) $+ + - -$ 1 Wechsel: 1 positive Lösung
$- + + -$ 2 Wechsel: 2 oder 0 negative Lösungen
Möglich: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm \frac{1}{2}$
$x_1 = 2$
$(2x^3 + x^2 - 8x - 4) : (x-2) = 2x^2 + 5x + 2$
$L = \{-2, -\frac{1}{2}, 2\}$

c) $+ - - +$ 2 Wechsel: 2 oder 0 positive Lösungen
$- - + +$ 1 Wechsel: 1 negative Lösung
Möglich: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm \frac{1}{3},\ \pm \frac{2}{3},\ \pm \frac{4}{3},\ \pm \frac{1}{9},\ \pm \frac{2}{9},\ \pm \frac{4}{9}$
$x_1 = 1$
$(9x^3 - 9x^2 - 4x + 4) : (x-1) = 9x^2 - 4$
$L = \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$

d) $+ - + - +$ 4 Wechsel: 4, 2 oder 0 positive Lösungen

$+ + + + +$ 0 Wechsel: 0 negative Lösungen

Möglich: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$(64x^4 - 128x^3 - 84x^2 - 20x + 1) : (x - \frac{1}{2}) = 64x^3 - 96x^2 + 36x - 2$

$+ - + -$ 3 Wechsel: 3 oder 1 positive Lösung

$- - - -$ 0 Wechsel: keine negative Lösung

$x_2 = \frac{1}{2}$

$(64x^3 - 96x^2 + 36x - 2) : (x - \frac{1}{2}) = 64x^2 - 64x + 4$

$L = \{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\}$

111/17. a) $+ + +$ kein Wechsel: keine positive Lösung

$- - +$ 1 Wechsel: 1 negative Lösung

Rationale Lösungen können nur -1 oder 1 sein.

Beide Werte erfüllen die Gleichung nicht.

b) siehe Seite 55

c) siehe Seite 56

18. a) $+ + + +$ kein Wechsel: 0 positive Lösungen

$+ + + +$ kein Wechsel: 0 negative Lösungen

Leichter sieht man das so ein:

$2x^6 + 10x^4 + 7x^2 = -1$

$LS \geqq 0, \quad RS < 0, \quad$ also $\quad L = \{\ \}$.

19. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der höchste Koeffizient a_{2n+1} positiv.
$a_0 = 0$: 0 ist eine Lösung, q. e. d.
$a_0 < 0$: Es gibt eine ungerade Anzahl von Vorzeichenwechseln, weil die Koeffizientenfolge mit $+$ beginnt und mit $-$ endet. Also existiert nach Satz 108.2 mindestens eine positive Lösung, q. e. d.
$a_0 > 0$: Ersetze in der gegebenen Gleichung x durch $-x$. Weil die höchste Potenz ungerade ist, beginnt die Koeffizientenfolge jetzt mit einem $-$, endet aber mit einem $+$. Also gibt es in dieser Gleichung eine ungerade Anzahl von Vorzeichenwechseln. Somit hat die gegebene Gleichung nach Satz 108.2 mindestens eine negative Lösung, q. e. d.