Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1999

2. Kapitel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83422

2.Kapitel

Aufgaben zu 2.1

35/1. **a)** $\overline{AC} = 6{,}75$ **b)** $\overline{AC} = 3{,}6$ **c)** $\overline{AC} \approx 3{,}86$ **d)** $\overline{AC} = 11$ **e)** $\overline{AC} = 12{,}6$

35/2. **a)** $\tau = \frac{3}{11}$ **b)** $\tau = 6$ **c)** τ ist nicht definiert

35/3. **a)** $T(4|3{,}5)$ **b)** $T(8|5{,}5)$ **c)** $T(2|2{,}5)$

35/4. **a)** $\overline{AT} = 3{,}5$ $\overline{TB} = 1{,}5$ **b)** $\overline{AT} = 1{,}5$ $\overline{TB} = 3{,}5$
c) $\overline{AT} = \frac{40}{9}$ $\overline{TB} = \frac{50}{9}$ **d)** $\overline{AT} = \frac{54}{11}$ $\overline{TB} = \frac{45}{11}$

35/5. **a)** $\overline{AT} = \frac{55}{12}$ $\overline{TB} = \frac{77}{12}$ **b)** $\overline{AT} = \frac{11}{14}$ $\overline{TB} = \frac{143}{14}$

35/6. **a)** $T_1(8{,}5|5)$ $T_2(6{,}5|8)$ **b)** $T_1(5|2)$ $T_2(6{,}5|2{,}5)$

35/7. Basis $b = \frac{17}{5}$ $s = \frac{34}{5}$ **39/8.** $a = \frac{40}{9}$ $b = \frac{48}{9}$ $c = \frac{56}{9}$

35/9. **b)** $\frac{A}{A'} = \frac{15}{8}$

35/10. $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$; $\alpha_1 = \alpha_3 = 30°, \alpha_2 = 60°$; $\alpha_1 = \alpha_4 \approx 19{,}1°$, $\alpha_2 = \alpha_3 \approx 40{,}9°$

36/11. **a)** $T_1(2|0)$ $T_2(3|-\frac{5}{3})$ $N(3|-5)$
b) $T_1(1{,}5|0)$ $T_2 = B$ $T_3(3|-2{,}5)$
c) $T_1(1{,}2|0)$ $T_2(2{,}4|0)$ $T_3(3|-1)$ $T_4(3|-3)$

36/12. **a)** $T_1(\approx 3{,}4|\approx 9{,}9)$ $T_2(7|5)$ **b)** $T_1(3|10)$ $T_1'(7{,}5|3)$

Aufgaben zu 2.2

43/1. **a)** $\overline{AT_a} = 15$ $\overline{T_aB} = 10$ **b)** $\overline{AT_a} = \frac{14}{3}$ $\overline{T_aB} = \frac{35}{3}$
c) $\overline{AT_a} = 10$ $\overline{T_aB} = 12{,}5$ **d)** $\overline{AT_a} = 4{,}5$ $\overline{T_aB} = 1$

43/2. **a)** $\overline{AT_i} = 1{,}5$ $\overline{T_iB} = 4{,}5$ $\overline{AT_a} = 3$ $\overline{T_aB} = 9$
b) $\overline{AT_i} = 4{,}9$ $\overline{T_iB} = 2{,}1$ $\overline{AT_a} = 12{,}25$ $\overline{T_aB} = 5{,}25$
c) $\overline{AT_i} = 1{,}5$ $\overline{T_iB} = 2{,}5$ $\overline{AT_a} = 6$ $\overline{T_aB} = 10$

43/3. a) $\overline{T_iA} : \overline{AT_a} = 1:2 \qquad \overline{T_iB} : \overline{BT_a} = 1:2$

b) $\overline{T_iA} : \overline{AT_a} = 2:5 \qquad \overline{T_iB} : \overline{BT_a} = 2:5$

c) $\overline{T_iA} : \overline{AT_a} = 1:4 \qquad \overline{T_iB} : \overline{BT_a} = 1:4$

43/4. Die Parallele zu AC durch P schneidet BC in S. PQ läuft durch den Mittelpunkt M von [SC], denn PSQC ist ein Parallelogramm. Wegen $\overline{AC} : \overline{PS} = 3:1$ und $\overline{PS} = \overline{CQ}$ folgt: Q teilt [AC] außen im Verhältnis 4 :1.

43/5. $\overline{M_1T} : \overline{TM_2} = r_1 : r_2 = \overline{M_1S} : \overline{SM_2}$

43/6. a) $\overline{AT_i} = 1{,}5 \quad \overline{AT_a} = 3 \qquad$ b) $\overline{AT_i} = 5 \quad \overline{AT_a} = 7{,}5$

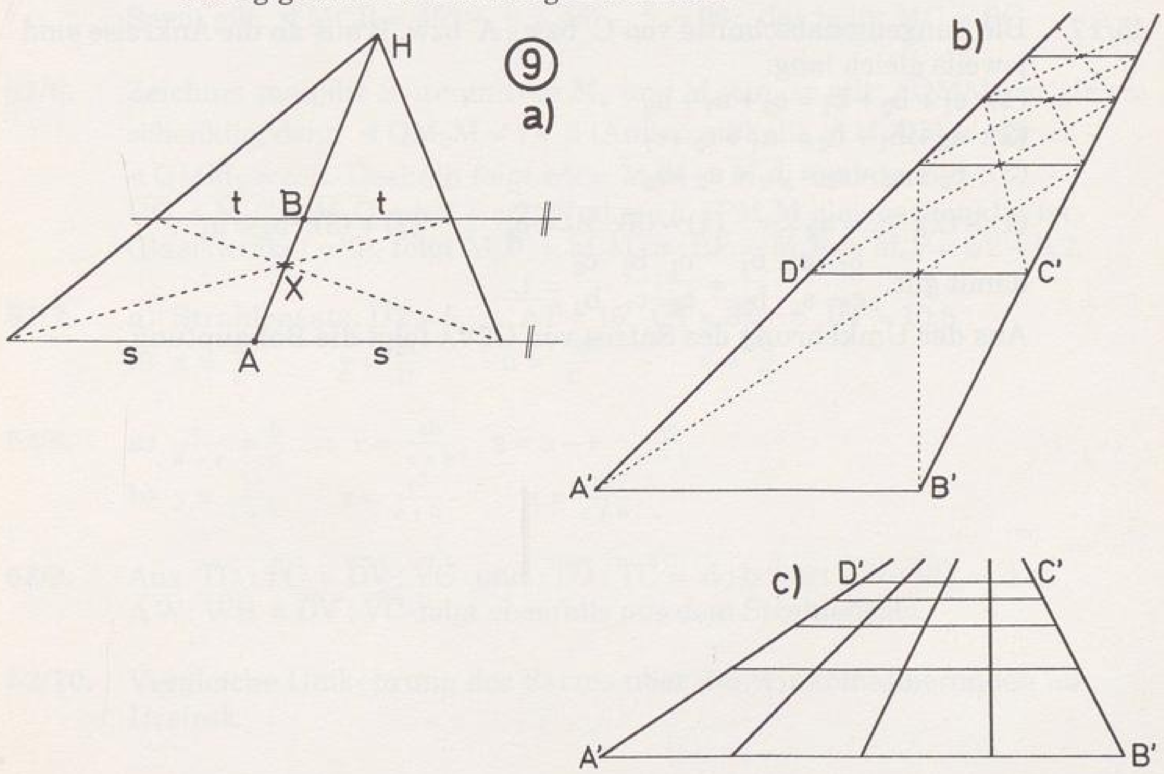
43/7. Es gilt $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QB} = \tau$ (mit $\tau > 0$)

Multiplikation mit $\overline{PB} : \overline{AQ}$ liefert $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{PB} : \overline{QB} = \tau \cdot \overline{PB} : \overline{AQ}$

$$\Rightarrow \tau \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{AQ}} = \tau' \Rightarrow \tau \cdot \frac{\overline{AQ} - \overline{AP} - \overline{BQ}}{\overline{AQ}} = \tau' \Rightarrow \tau\left(1 - \tau' - \frac{1}{\tau}\right) = \tau' \Rightarrow \tau' = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}$$

43/8. a) $T_1(-4{,}5|0) \quad T_2(-9|0) \quad T_3(6|0) \qquad$ b) $\frac{x+3}{3-x} = \frac{t+3}{t-3} \Rightarrow t = \frac{9}{x} \quad (x \neq 0)$

43/9 a) $s : t = \overline{AX} : \overline{XB} = \overline{AH} : \overline{HB}$ (X- und V-Figur)
analog geht's mit den übrigen Punkten.



44/10. Quint: 40 cm, große Terz: 48 cm

44/11. Aus $\overline{CT} : \overline{PM_c} = \overline{TB} : \frac{c}{2}$ und $\overline{CT} : \overline{QM_c} = \overline{AT} : \frac{c}{2}$ folgt durch Addition

$$\frac{c}{c/2} = \frac{\overline{CT}}{\overline{PM_c}} + \frac{\overline{CT}}{\overline{QM_c}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{CT}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{PM_c}} + \frac{1}{\overline{QM_c}}\right)$$

44/12. $\rho\sigma\tau = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{1} = -1$, beziehungsweise $\frac{6}{4} \cdot \frac{3{,}6}{10{,}8} \cdot \frac{5{,}6}{2{,}8} = 1$

44/13. $\rho\sigma\tau = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$, beziehungsweise $\frac{7}{7} \cdot \frac{8{,}6}{4{,}3} \cdot \frac{5}{10} = 1$

45/14. M_c, M_a und M_b teilen [AB] bzw. [BC] bzw. [CA] jeweils im Verhältnis 1:1 $\Rightarrow \rho\sigma\tau = 1$. Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA schneiden sich also s_c, s_a und s_b in einem Punkt.

45/15. Für die Teilverhältnisse gilt $\frac{1}{1} \cdot \frac{kb}{b - kb} \cdot \frac{a - ka}{ka} = 1$. Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA schneiden sich AD, BE und s_c also in einem Punkt.

45/16. $$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{a_2} \cdot \frac{a_2}{c_1} = 1$$

Aus der Umkehrung des Satzes von CEVA folgt die Behauptung.

45/17. Die Tangentenabschnitte von C bzw. A bzw. B aus an die Ankreise sind jeweils gleich lang:

(1): $c_1 + b_2 + b_1 = c_2 + a_1 + a_2$

(2): $a_2 + b_1 + b_2 = a_1 + c_2 + c_1$

(3): $b_2 + c_1 + c_2 = b_1 + a_2 + a_1$

(1) – (2): $c_1 = a_2$ (1) – (3): $b_1 = c_2$ (2) + (3): $b_2 = a_1$

damit gilt $\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_2}{c_1} \cdot \frac{c_2}{b_2} = 1$.

Aus der Umkehrung des Satzes von CEVA folgt die Behauptung.

Aufgaben zu 2.3

50/1. **a)** $M(10|4)$ $r = 4$ **b)** $M(8{,}25|4)$ $r = 1{,}25$ **c)** $M(0|4)$ $r = 4$
d) $M(8{,}75|4)$ $r = 2{,}25$ **e)** m_{AB}

50/2. Zeichnet man durch B die Parallele g zu HC, so gilt: g schneidet AC in S, wobei $\overline{CS} = a$ ist (ΔCBS ist gleichschenklig). $\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{b}{a}$ (1.Strahlensatz).
Im zweiten Bild zeichnet man durch B die Parallele g zu CV. g schneidet AC in S, wobei $\overline{CS} = a$ ist (ΔBCS ist gleichschenklig).$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{b}{a}$ (1.Str.satz).

51/3. Die Punkte liegen auf dem Apollonioskreis mit dem Durchmesser $[TT_1]$, $T_1(14|11)$. Die Punkte liegen auf dem Fasskreisbogenpaar über der Sehne $[AB]$ zum Umfangswinkel 45°.

51/4. Der Kreis mit dem Durchmesser $[T_iT_a]$, $T_i(21|5)$, $T_a(28|5)$ schneidet GR etwa in $Z(7{,}5|22)$.

51/5. Der Apollonioskreis schneidet $[AB]$ in T.
CT halbiert γ, also ist $\sphericalangle ATC = 45° + \frac{\beta}{2}$. Da ΔMTC wegen $\overline{MT} = \overline{MC}$ gleichschenklig ist, folgt $\sphericalangle MTC = 45° + \frac{\beta}{2}$.
Somit gilt: $\sphericalangle MCB = 45° + \frac{\beta}{2} + 45° - \frac{\beta}{2} = 90°$, das heißt $MC \perp BC$.

51/6. Zeichnet man die Seitenmitten M_b und M_c ein, so gilt: ΔQMM_b ist gleichschenklig, denn $\sphericalangle QM_bM = \gamma + \beta$ (Außenwinkel!), $\sphericalangle M_bQM = \alpha/2 \Rightarrow \sphericalangle QMM_b = \alpha/2$. Deshalb folgt $c/2 = \overline{M_bM} = \overline{M_bQ}$ und damit $\overline{CQ} = \overline{M_bC} + \overline{M_bQ} = b/2 + c/2$. Weil auch ΔPM_cM gleichschenklig ist, (Basiswinkel $\alpha/2$), folgt $\overline{M_cP} = \overline{M_cM} \Rightarrow \overline{BP} = \overline{M_cB} + \overline{M_cP} = c/2 + b/2$.

51/7. **a)** Strahlensatz: $\overline{DT} = 5 \Rightarrow \overline{AT} = 15$; $\overline{CT} = 3{,}5 \Rightarrow \overline{BT} = 10{,}5$
b) $x = \frac{40}{17}$ $y = \frac{28}{17}$ $u = \frac{120}{17}$ $v = \frac{84}{17}$

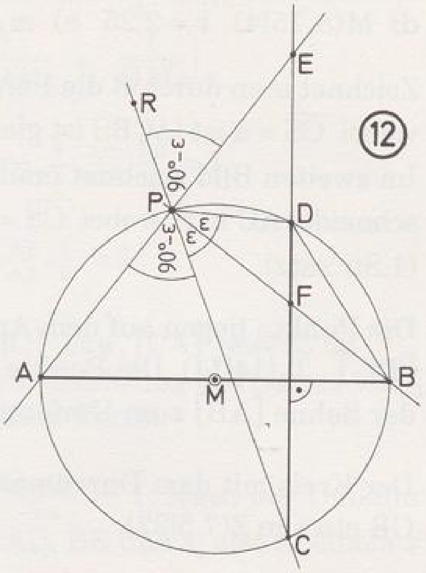
52/8. **a)** $\frac{r}{a-r} = \frac{b}{c} \Rightarrow r = \frac{ab}{c+b}$, $s = a - r = \frac{ac}{c+b}$
b) $y = \frac{bc}{c+b}$ $z = \frac{c^2}{c+b}$ $x = \frac{bc}{c+b}$

52/9. Aus $\overline{TD} : \overline{TC} = \overline{DV} : \overline{VC}$ und $\overline{TD} : \overline{TC} = d : b$ folgt $\overline{DV} : \overline{VC} = d : b$.
$\overline{AW} : \overline{WB} = \overline{DV} : \overline{VC}$ folgt ebenfalls aus dem Strahlensatz.

52/10. Vergleiche Umkehrung des Satzes über die Winkelhalbierenden im Dreieck.

52/11. Wegen des Strahlensatzes sind auch A, E, C und F harmonische Punkte.
Es gilt $\overline{BT} : \overline{TC} = \overline{AE} : \overline{EC} = \overline{AD} : \overline{CD} \Rightarrow DE = w_\delta$ und $DF = w_{\delta^*}$.

53/12. C und D liegen symmetrisch bezüglich $AB \Rightarrow \overline{CB} = \overline{BD}$.
Wegen $\overline{CB} = \overline{BD}$ folgt aus dem Umfangswinkelsatz:
$\sphericalangle CPB = \sphericalangle BPD =: \varepsilon$.
Nach THALES gilt:
$\sphericalangle APC = 90° - \varepsilon = \sphericalangle RPE$
(Scheitelwinkel)
$\sphericalangle DPE = 180° - 2\varepsilon - 90° + \varepsilon$
$= 90° - \varepsilon$.
PB und PE halbieren also den Innen- bzw. Außenwinkel im Dreieck CDP und teilen deshalb [CD] harmonisch.



53/13. **a)** Man konstruiert T_i und T_a ($\overline{AT_i} = \frac{10}{3}, \overline{AT_a} = 10$). Der Thaleskreis über $[T_iT_a]$ schneidet den Kreis um T_i mit $r = 3{,}5$ in C.

b) Man konstruiert T_i und T_a ($\overline{AT_i} = \frac{30}{7}, \overline{AT_a} = 10$). Der Thaleskreis über $[T_iT_a]$ schneidet den Kreis um M_b mit $r = 4{,}5$ in B.

c) Man konstruiert T_i und T_a ($\overline{BT_i} = \frac{21}{4}, \overline{BT_a} = 10{,}5$). Der Thaleskreis über $[T_iT_a]$ schneidet die Parallele zu BC im Abstand 2 in A_1 und A_2.

d) Teildreieck AH_aC ist konstruierbar aus b, h_a und $\sphericalangle AH_aC = 90°$. Der Thaleskreis über $[T_iT_a]$ ($\overline{AT_i} = \frac{10}{3}, \overline{AT_a} = 10$) schneidet CH_a in B.

53/14. **a)** Analog wie **13 c)** : es gibt zwei Lösungen.
b) Nur eine Lösung ergibt sich für $h_c = r_A = \frac{20}{7}$.

53/15. **a)** C(3|5) **b)** Angenähert C(10|3,5)

53/16. Das Entfernungsverhältnis von A und B ist 1:3, das von B und C ist 2:1, das von A und C ist 2:3. Die zugehörigen Apollonioskreise schneiden sich im Punkt für den Flughafen.

53/17. Das Entfernungsverhältnis von B und E ist 2:1. Der zugehörige Apollonioskreis schneidet den Kreis um T mit $r = \overline{BT}$ in zwei Punkten. Der Schatz liegt in S(≈5,3|≈6,3).