Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1999

5. Kapitel

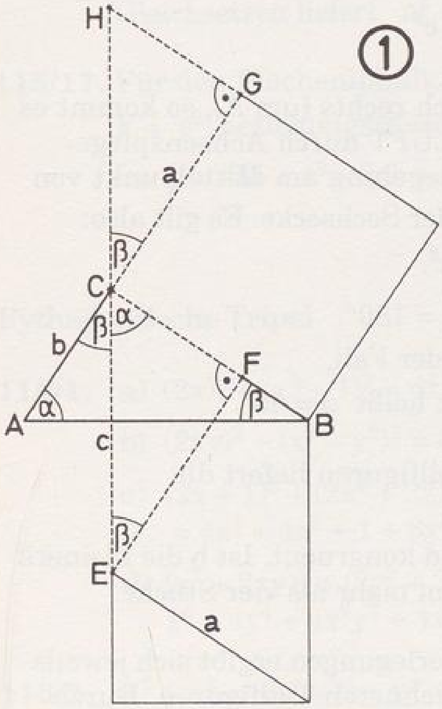
urn:nbn:de:hbz:466:1-83422

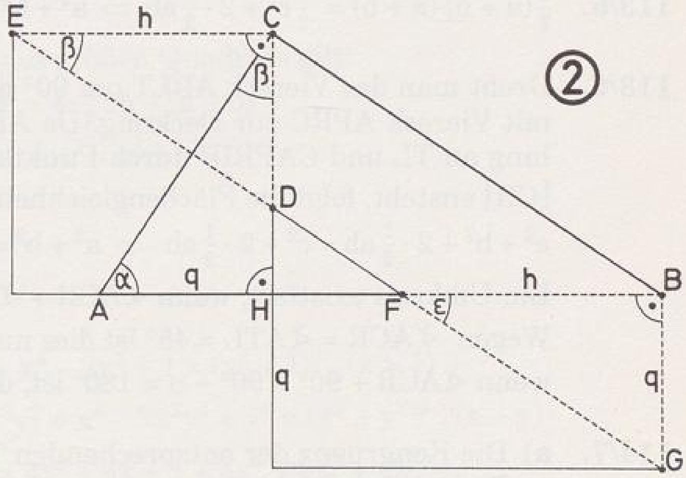
5.Kapitel

Beweise

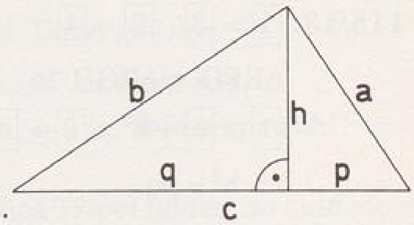
113/1. $\Delta ABC \cong \Delta CEF$ (WSW)
$\Delta ABC \cong \Delta CHG$ (WSW)
$\Rightarrow \Delta CEF \cong \Delta CHG$

1132. $\Delta AHC \cong \Delta DCE$ (WSW) $\Rightarrow \overline{CD} = q$
$\Delta EDC \cong \Delta FGB$ (SWS) $\Rightarrow \varepsilon = \beta$





113/3. Umkehrung: Hat ein Quadrat über einer Dreieckseite denselben Inhalt wie das Rechteck aus der längsten Seite und dem anliegenden Seitenabschnitt, so ist das Dreieck rechtwinklig.
Beweis:
Es gelte $a^2 = cp$. Wegen $a^2 = p^2 + h^2$ und
$b^2 = q^2 + h^2$ gilt dann auch:
$b^2 = q^2 + h^2 = q^2 + a^2 - p^2 = q^2 + cp - p^2$
$= q^2 + pq = cq$
aus $a^2 = cp$ und $b^2 = cq$ folgt durch Addition:
$a^2 + b^2 = c(p + q) = c^2$,
also ist das Dreieck rechtwinklig.



113/4. Umkehrung: Ist in einem Dreieck der Inhalt des Höhenquadrats gleich dem des Rechtecks aus den beiden zugehörigen Seitenabschnitten, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Beweis:

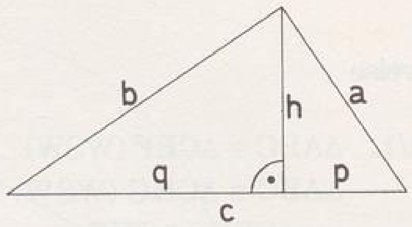
aus $b^2 = q^2 + h^2$ und $a^2 = p^2 + h^2$

folgt $a^2 + b^2 = 2h^2 + p^2 + q^2$,

wegen $h^2 = pq$ folgt:

$a^2 + b^2 = p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = c^2$,

also ist das Dreieck rechtwinklig.



113/5. $\frac{1}{2}(a + b)\cdot(a + b) = \frac{1}{2}c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

113/6. Dreht man das Viereck ABLT um 90° nach rechts (um A), so kommt es mit Viereck APRC zur Deckung. Da ABLUFT durch Achsenspiegelung an TL und CAPRIB durch Punktspiegelung am Mittelpunkt von [CR] ensteht, folgt die Flächengleichheit der Sechsecke. Es gilt also:

$a^2 + b^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}ab = c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

Ein Umkreis existiert, wenn $\sphericalangle ACR + \sphericalangle P = 180°$.

Wegen $\sphericalangle ACR = \sphericalangle ATL = 45°$ ist dies nur der Fall,

wenn $\sphericalangle ACR + 90° + 90° - \alpha = 180°$ ist, das heißt $\alpha = 45°$.

114/7. **a)** Die Kongruenz der entsprechenden Teilfiguren liefert die Zerlegungsgleichheit.

b) Die gleich bezeichneten Teilfiguren sind kongruent. Ist b die kleinere Kathete und gilt $h > 2q$, so braucht man mehr als vier Stücke.

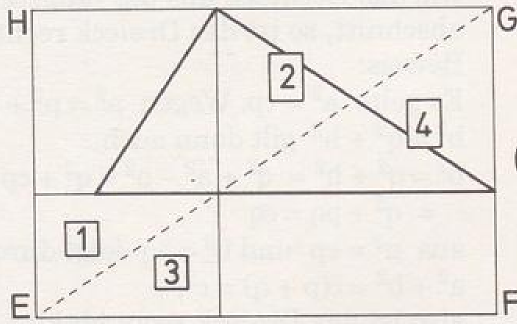
114/8. bis 12. Aus der Konstruktionsabfolge der Zerlegungen ergibt sich jeweils die Flächengleichheit der gleich bezeichneten Teilfiguren. Durch Addition ergibt sich jedesmal der Pythagoras.

115/13. $\boxed{1} = \boxed{3}$, $\boxed{2} = \boxed{4}$

$\Delta EFG \cong \Delta EGH \Rightarrow$

$\boxed{1} + \boxed{2} + h^2 = \boxed{3} + \boxed{4} + pq$

$\Rightarrow h^2 = pq$



13

115/14. Wegen $m = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ gilt:

$a = \frac{a'}{c'} \cdot c$, $b = \frac{b'}{c'} \cdot c$

Einsetzen in $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt $a \cdot \frac{a'}{c'} \cdot c + b \cdot \frac{b'}{c'} \cdot c = c^2$, also $aa' + bb' = cc'$.

115/15. Für das Hypotenusenquadrat gilt: $c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + (a - b)^2 = 2ab + III$

für die Summe der Kathetenquadrate gilt: $a^2 + b^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + I + II$

wegen $c^2 = a^2 + b^2$ folgt: $I + II = III$.

115/16. Ist h die zur Grundlinie c gehörige Höhe, so gilt:

$\boxed{1} + \boxed{2} = \frac{ch + c(c-h)}{2} = \frac{c^2}{2}$; andrerseits gilt:

$\boxed{1} + \boxed{2} = \frac{1}{2} b \cdot h_b + \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} a^2$,

Gleichsetzen liefert $a^2 + b^2 = c^2$.

115/17. Für den Flächeninhalt F des großen Quadrats gilt:

$F = c^2$ beziehungsweise $F = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + (a - b)^2$

$\Rightarrow c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$.

Pythagoräische Tripel

116/1. **a)** $(2x)^2 + (x^2 - 1)^2 = 4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$, $(x > 1)$

b) $(2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$, $(x > y)$

c) $(2x + 1)^2 + (2x^2 + 2x)^2 = 4x^2 + 4x + 1 + 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 =$
$= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 8x^3 + 4x^2 + 4x = (2x^2 + 2x + 1)^2$

d) $(x^2 + 2xy)^2 + (2y^2 + 2xy)^2 = x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2 + 4y^4 + 8xy^3 + 4x^2y^2 =$
$x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^3y + 8xy^3 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)^2$

116/2. $k^2 + n^2 = (2n + 1) + n^2 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

116/3. Es sei $a \in \mathbb{N}$; wegen $a = b$ gilt dann $a^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

116/4. Es seien a, b und c ein Pythagoräisches Tripel. Dann gilt $h = \frac{ab}{c}$.

Wäre $h \in \mathbb{N}$, so würde folgen: $ab = kc$ mit $k \in \mathbb{N}$ und daraus

$a = \frac{kc}{b} = \frac{l \cdot bc}{b}$ mit $l \in \mathbb{N}$ wegen $ggT(b,c) = 1$, also $a = lc$, **Widerspruch**!

116/5. Wenn a, b und c ein primitives Pythagoräisches Tripel bilden, so sind sie paarweise teilerfremd, das heißt, a und b können nicht beide gerade sein. Wären a und zugleich b ungerade, so hätten sowohl a^2 als auch b^2 den Rest 1 bei Teilung durch 4. Damit würde c^2 bei Teilung durch 4 den Rest 2 ergeben, was nicht möglich ist (weil dann c gerade und somit c^2 durch 4 teilbar sein müsste).

Man kann also ohne Einschränkung annehmen:
a gerade, b ungerade, c ungerade.

α) Annahme: Eine Zahl ist durch 4 teilbar.
Wegen $a = 2k$ und b, c ungerade folgt aus $a^2 = c^2 - b^2$:
$4k^2 = (c - b)(c + b)$; weil $(c - b)$ und $(c + b)$ gerade sind, gilt:
$4k^2 = 2l \cdot 2m$. Addition der Gleichungen $c + b = 2m$ und $c - b = 2l$ liefert: $2c = 2(l + m)$, also $c = l + m$, wobei entweder l oder m gerade sein muss, da c ungerade ist. Es sei z.B. m gerade, also $m = 2n$, dann gilt $4k^2 = 2l \cdot 2m \Rightarrow k^2 = lm \Rightarrow k^2 = l \cdot 2n \Rightarrow k$ ist gerade
$a^2 = 4k^2 = 4(2k')^2 = 16k'^2 \Rightarrow a = 4k'$.

β) Annahme: Keine Zahl ist durch 3 teilbar.
Dann ergäben sich bei Teilung durch 3 die Reste $\bar{a} = 1$ oder 2, $\bar{b} = 1$ oder 2, $\bar{c} = 1$ oder 2. Die Quadrate a^2, c^2, b^2 hätten somit die Reste $\bar{a}^2 = 1$, $\bar{b}^2 = 1$, $\bar{c}^2 = 1$. Wegen $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 2 \neq \bar{c}^2$ ist dies unmöglich.

γ) Annahme: Keine Zahl ist durch 5 teilbar.
Dann ergäben sich bei Teilung durch 5 die Reste $\bar{a} = 1, 2, 3$ oder 4, ebenso $\bar{b} = 1, 2, 3$ oder 4 und $\bar{c} = 1, 2, 3$ oder 4. Die Quadrate hätten die Reste $\bar{a}^2 = 1$ oder 4, ebenso $\bar{b}^2 = 1$ oder 4 und $\bar{c}^2 = 1$ oder 4.
$\Rightarrow \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 2$ oder $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 0$ oder $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 3$
Widerspruch **Widerspruch** **Widerspruch**

116/6. **a)** Fläche(ABC) $= \rho \cdot \frac{1}{2}(a + b + c)$

$$\Rightarrow 2\rho = \frac{4 \cdot \text{Fläche(ABC)}}{a + b + c} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}ab}{a + b + c} = \frac{2ab}{a + b + c} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{a + b + c} = a + b - c$$

b) Man darf annehmen: a gerade, b ungerade und c ungerade

$$\Rightarrow \rho = \frac{a + b - c}{2} = \frac{2k + 2l + 1 - (2m + 1)}{2} = k + l - m \in \mathbb{N}$$

116/7. ab und $(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} = (a + b)c$ sind natürliche Zahlen.

$$(ab)^2 + \left[(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}\right]^2 = a^2b^2 + (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + b^2) =$$
$$= a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 = (a + b)^4 - (2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3)$$
$$= (a + b)^4 - 2ab(a + b)^2 + a^2b^2 = \left[(a + b)^2 - ab\right]^2$$

116/8. Nach DIOPHANTOS (Lehrbuch!) lässt sich ein Pythagoräisches Tripel a, b und c so darstellen: $a = 2rs$, $b = r^2 - s^2$, $c = r^2 + s^2$, $(r, s \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot c}{a + b + c} = \frac{2rs(r^2 - s^2)(r^2 + s^2)}{2rs + r^2 - s^2 + r^2 + s^2} = \frac{2rs(r^2 - s^2)(r^2 + s^2)}{2r(r + s)} = s(r - s)(r^2 + s^2)$$

116/9. Nach Aufgabe **5.** gilt: $a = 4k$ und außerdem enthält das Tripel genau eine durch 3 teilbare Zahl, diese kann nur a oder b sein. Wäre nämlich $c = 3n$, so ließe a bei Teilung durch 3 den Rest $\bar{a} = 1$ oder 2 und ebenso $\bar{b} = 1$ oder 2. Die Quadrate a^2, b^2 und c^2 hätten also die Reste $\bar{a}^2 = 1$, $\bar{b}^2 = 1$ und $\bar{c}^2 = 0$, was wegen $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 2$ nicht möglich ist.
$\Rightarrow A = \frac{a+b}{2} = \frac{4k \cdot b}{2} = 2k \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6l.$

Konstruktionsaufgaben

116/1. **a)** Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $c = 8{,}5$, $p = 6{,}5$ und $q = 2$ ergibt $b^2 = 17$.
b) Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a = 2{,}5$ und $b = 4$ ergibt $c^2 = 22{,}25$
c) Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a = 2{,}5$ und $c = 4$ ergibt $b^2 = 9{,}75$

116/2. **a)** Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit $a = b = 3 \Rightarrow c^2 = 18$
b) Rechtwinkliges Dreieck mit $a = 3$, $b = 6 \Rightarrow c^2 = 45$
c) Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit $c = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 = 4{,}5$

116/3. **a)** Rechtwinkliges Dreieck mit $a = 6$, $p = 4{,}5 \Rightarrow a^2 = cp$
b) $a = 12$ $b = 3$ **c)** $a = 9$ $b = 4$ **d)** $a = 9$ $b = 4$

117/4. **a)** Man verwandelt das Dreieck in ein Rechteck, dann das Rechteck mithilfe des Kathetensatzes in ein Quadrat ($a \approx 5{,}3$).
b) wie **a)** ($a \approx 3{,}95$)

117/5. **a)** $\sqrt{41}^{\,2} = 5^2 + 4^2$ **b)** $\sqrt{65}^{\,2} = 7^2 + 4^2$
c) $3^2 = \sqrt{5}^{\,2} + 2^2$ **d)** $8^2 = \sqrt{39}^{\,2} + 5^2$

117/6. **a)** $\sqrt{3}^{\,2} = 3 \cdot 1$ **b)** $\sqrt{6}^{\,2} = 2 \cdot 3$ **c)** $\sqrt{14}^{\,2} = 2 \cdot 7$

117/7. **a)** $(\frac{n-1}{2})^2 + \sqrt{n}^{\,2} = \frac{n^2 - 2n + 1}{4} + n = \frac{n^2 + 2n + 1}{4} = (\frac{n+1}{2})^2$
b) $9^2 = 8^2 + \sqrt{17}^{\,2}$

117/8. Durch Wegscheren einer Ecke entsteht ein Viereck, durch Wegscheren einer weiteren Ecke ein Dreieck. Das Dreieck wird in ein Rechteck verwandelt. Aus dem Rechteck läßt sich mithilfe des Kathetensatzes das gesuchte Quadrat konstruieren. ($a = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$)

Einfachere Aufgaben

117/1.

	a	b	c	h	q	p	F
a)	7	24	25	6,72	23,04	1,96	84
b)	12	5	13	$\frac{60}{13}$	$\frac{25}{13}$	$\frac{144}{13}$	30
c)	7,5	4	8,5	$\frac{60}{17}$	$\frac{64}{34}$	$\frac{225}{34}$	15
d)	$3\sqrt{5}$	$\frac{3}{2}\sqrt{5}$	7,5	3	1,5	6	11,25
e)	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	5	2	1	4	5
f)	$2\sqrt{17}$	$\frac{1}{2}\sqrt{17}$	8,5	2	0,5	8	8,5

(bei **f)** gibt es eine zweite symmetrische Lösung)

117/2.

	a	h	F
a)	6	$3\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$
b)	$\frac{2}{3}\sqrt{15}$	$\sqrt{5}$	$\frac{5}{3}\sqrt{3}$
c)	$2\sqrt{15}$	$3\sqrt{5}$	$15\sqrt{3}$

118/3.

	a	c	h_a	h_c	F
a)	$2{,}5\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{5}$	5	12,5
b)	$\sqrt{29}$	4	$\frac{20}{29}\sqrt{29}$	5	10
c)	$3\sqrt{2}$	6	$3\sqrt{2}$	3	9

118/4. **a)** $d = 5\sqrt{2}$ **b)** $d = 10$ **c)** $e = 18$ $f = 24$

d) $e = f = 25$ **e)** $e = 41$ $f = \sqrt{337}$

118/5. $2s + s\sqrt{2} = 30 \Rightarrow s = 15(2 - \sqrt{2}), \quad b = 30(\sqrt{2} - 1)$

118/6. $u = 30\sqrt{\sqrt{3}}$

100/7. $b = 17(\sqrt{5} - 1)$

118/8. $s = 4$ $u = 10$

100/9. $a = 13$ $r = \frac{60}{13}$

118/10. a) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a^2}{a^2/2} = \frac{2}{1}$ $\frac{u_1}{u_2} = \frac{4a}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

b) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a^2\sqrt{3}/4}{a^2\sqrt{3}/16} = \frac{4}{1}$ $\frac{u_1}{u_2} = \frac{3a}{3a/2} = \frac{2}{1}$

118/11. a) $\frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ab \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$

b) $hc = ab \Rightarrow h^2c^2 = a^2b^2 \Rightarrow h^2(a^2 + b^2) = a^2b^2 \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

118/13. $a = 6{,}5 \quad b = 8{,}5 \quad c = 5\sqrt{5}$

118/14. $a = 5\sqrt{2} \quad b = 4\sqrt{2} \quad c = \sqrt{82}$
wegen $a^2 + b^2 = c^2$ ist ΔABC rechtwinklig, $F = 20$.

118/15. Es gilt: $a = c = 8{,}5$ und $b = d = 6{,}5$. Deshalb ABCD ein Parallelogramm.
$\overline{AC} = 10\sqrt{2} \quad \overline{BD} = \sqrt{29}$

119/16. a) $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 5$
b) $D_1(5 + 2\sqrt{6}\,|5) \quad D_2(5 - 2\sqrt{6}\,|5) \quad E_1(8|0) \quad E_2(8|8)$
c) $\overline{MF}^2 = 24{,}25 < 25 \Rightarrow$ F liegt im Kreis.

119/17. Auf dem Kreis liegen A, E, Z, P, C, Y und V. Im Kreis liegen G, H und S. Außerhalb liegen X, B und D. Der Kreis geht durch den Ursprung.

119/18. $A(21|8)$ $D(34|0)$ $G(0|21)$ $R(8|16)$ $\overline{GD} = \sqrt{1597}$, $l_{GRAD} = \sqrt{89} + 2\sqrt{233}$

119/19. Mit $M(x|y)$ ergeben sich die Gleichungen:
I $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ II $x^2 + (y - 9)^2 = r^2$
III $(x - 1{,}5)^2 + (y - 13{,}5)^2 = r^2$, die Lösung ergibt $M(7{,}5|9)$ und $r = 7{,}5$.

119/20. $e = \overline{MB} - \overline{MA} = \frac{1}{2}\sqrt{37} - \sqrt{5}$

119/21. Aus $\sqrt{(x - 6{,}5)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 2{,}5)^2 + (y - 6)^2}$ folgt $y = \frac{2}{3}x$.

119/22. $\overline{AB} = \sqrt{45} \quad F = 22{,}5 = \frac{1}{2}\sqrt{45}\,d \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{45}$

120/23. $h = r - \sqrt{r^2 - l^2/4} \approx 13{,}3\,\text{m}$

120/24. Der Messwert 17 ist falsch, weil d irrational ist (Abweichung: 0,17%).

120/25. $c = 8 \quad a = b = \sqrt{65} \quad \frac{a - c}{c} = 0{,}778\% \quad \alpha = \beta > 60°$ wegen $a = b > c$.

120/26. $s = \sqrt{80}$

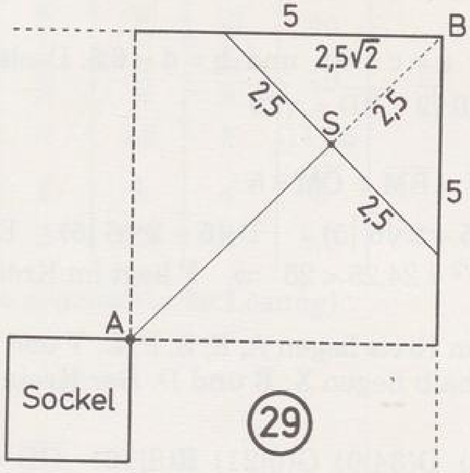
120/27. a) $e = \sqrt{(r + h)^2 - r^2} \approx 19{,}5\,\text{km}$
b) mit e aus **a)** gilt: $e' = e + x = e + \sqrt{(r + h')^2 - r^2} \approx 35{,}5\,\text{km}$

120/28. **a)** $m = \frac{2,7}{30} = 9\%$ **b)** $m = \frac{826}{\sqrt{15000^2 - 826^2}} \approx 5,5\%$

c) $45°$: $m = 100\%$ $30°$: $m = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 57,7\%$ $60°$: $m = \sqrt{3} \approx 173\%$

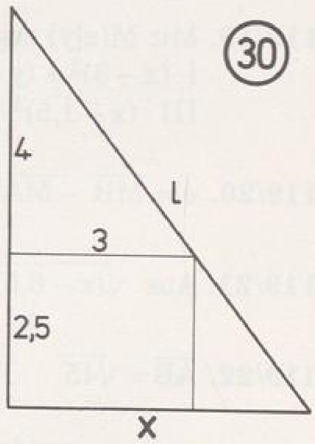
d) aus $\frac{s}{w} = 0,2$ und
$s^2 + w^2 = 4000^2$
folgt $s \approx 784\text{m}$

121/29. $\overline{AS} = 5\sqrt{2} - 2,5 \approx 4,6 < 5$



29

121/30. Aus $x : 3 = 6,5 : 4$
folgt $x = 4,875$
$l = \sqrt{6,5^2 + 4,875^2} = 8,125$



30

121/31. $\overline{ED} = \sqrt{b^2 + c^2}$ $\overline{EC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
$\overline{VM} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $\overline{BV} = \sqrt{(a^2 + b^2)/4 + c^2}$

121/32. $\overline{MC} = 42,5$ $S = 5 \cdot 12 + 30 \cdot 42 = 1320$ $V = 1260$

121/33. **a)** $a\sqrt{5}$ $\frac{a}{2}\sqrt{10}$ $\frac{a}{2}\sqrt{13}$ $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ $a\sqrt{2}$ $\frac{a}{2}\sqrt{13}$
b) $\frac{a}{2}\sqrt{6}$ $\frac{3}{2}a$ $\frac{a}{2}\sqrt{6}$ $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ $\frac{3}{2}a$

122/34. M sei der Mittelpunkt des Quadrats und P die senkrechte Projektion von X auf ABCD:
$\overline{BM} = \sqrt{2}$ $\overline{BS} = 3\sqrt{2}$ $\overline{XP} = 2$ $\overline{BP} = \sqrt{2,5}$ $\overline{BX} = \sqrt{6,5}$ $h_{\text{Trapez}} = 2,5$
Fläche(BCYX) $= \frac{2+1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$ $S = 4 + 4 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{17}}{2} = 4(1 + \sqrt{17})$

122/35. $\frac{a\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot d}{2} \Rightarrow d = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

122/36. **a)** $d = r\sqrt{2}$ **b)** $e = r\sqrt{2}$ **103/37.** $e = 10\,\text{cm}$

122/38. $t = 25 - \sqrt{25^2 - 24^2} = 18$

122/39. $x = \frac{a}{2}\sqrt{6}$ $y = a\sqrt{2{,}5 + \sqrt{2}}$ $z = a\sqrt{1 + 0{,}5\sqrt{2}}$

122/40. **a)** $\dfrac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2}}{a} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{5}}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ **d)** $\dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

123/41. $5^2 + 3^2 = \sqrt{5^2 + 3^2}^{\,2}$

123/42. $F = 4 \cdot \frac{50 \cdot 24}{2} = 2400$

die Gleichungen $\frac{e+f}{2} = 2400$ und $e^2/4 + f^2/4 = 2500$ ergeben:

$e^4 - 10\,000\,e^2 + 4800^2 = 0 \Rightarrow e_1 = 80 \quad e_2 = 60 \quad f_1 = 60 \quad f_2 = 80$

123/43. $s = \sqrt{5}$, $\overline{PA} = \sqrt{10}$; die dritte Ecke des Dreiecks mit den Katheten 1 und 2 sei R, der Höhenfußpunkt H. Kathetensatz:

$1^2 = \sqrt{5}\,\overline{RH} \Rightarrow \overline{RH} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \Rightarrow \overline{QH} = \sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow \overline{QA} = \sqrt{10}$

das heißt, P und Q liegen auf einem Kreis um A.

123/44. Der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks ABCD sei M.

Wäre $\alpha = \sphericalangle DMA = 90°$, so würde gelten

$\overline{MD} = h_1 = \frac{210}{\sqrt{421}}$ und $\overline{AM} = h_2 = \frac{240}{\sqrt{481}}$

wegen $h_1^2 + h_2^2 \neq 15^2$ ist dies unmöglich $\Rightarrow \alpha \neq 90°$.

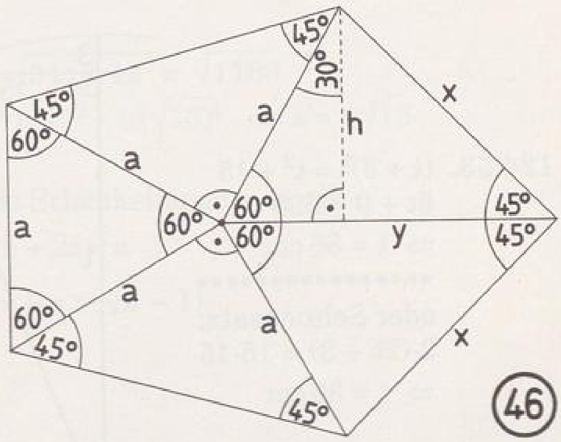
123/45. Für die Hypotenusen der gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke ergeben sich der Reihe nach $a\sqrt{2}$, $2a$, $2a\sqrt{2}$, $4a$, $4a\sqrt{2}$, $8a$, $8a\sqrt{2}$, $16a$ aus $4a = 12$ folgt $a = 3$.

123/46. $a\sqrt{2} = 82 \Rightarrow a = 41\sqrt{2}$

$h = \frac{41}{2}\sqrt{6}$

$y = h + \frac{1}{2}a = \frac{41}{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1)$

$x = h\sqrt{2} = 41\sqrt{3}$



123/47. **a)** Wegen $20^2 = 12^2 + 16^2$ und $39^2 = 15^2 + 36^2$ ist ABCD ein Trapez, weil AB || CD ist.

b) $d_1 = d_2 = 45$

c) $x = 10$ $z = 12$ $b = d = \sqrt{1305}$

123/48. e = 51, f = 74; zeichnet man die Höhe h des Trapezes durch C (Höhenfußpunkt H), so gilt: h = 24, $\overline{HB} = 25$

$\Rightarrow \beta < 45°$, weil 24 < 25 und $\sphericalangle CHB = 90°$ ist.

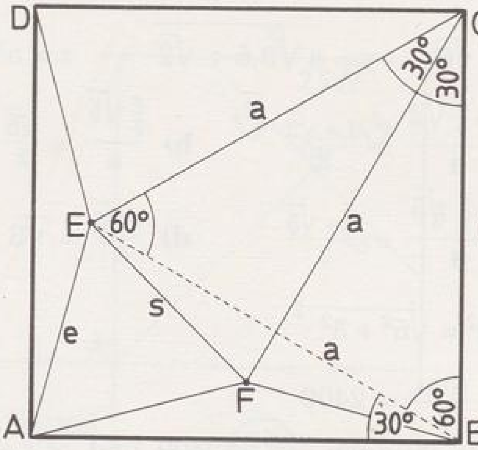
105/49. $v = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,a \qquad w = \frac{2}{5}\sqrt{5}\,a$

123/50. $\Delta EFC \cong \Delta EAB$ (SWS)

$\Rightarrow e = s$

$s^2 = (a/2)^2 + (a - a/2\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow s = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$



50

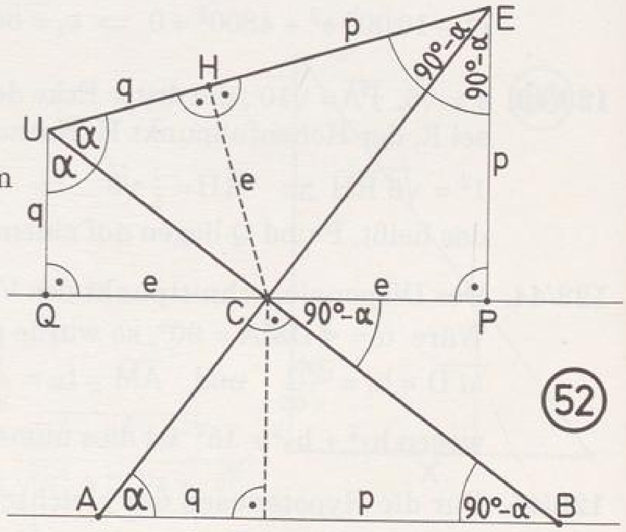
124/51. $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,z,\ x = \sqrt{3}\,z,\ y = \frac{3}{2}\,z$

$\frac{1}{2}\,z + y = 8m \Rightarrow$

$z = 4m,\ x = 4\sqrt{3}\ m,\ h = 2\sqrt{3}\ m$

124/52. a) Die Kongruenzsätze liefern (siehe Skizze!): $e = \overline{QC} = \overline{CH} = \overline{CP}$

b) Die Behauptung folgt aus den Kongruenzsätzen. F = ab = 12



52

124/53. $(t + 3)^2 = t^2 + 15$

$6t + 9 = 225$

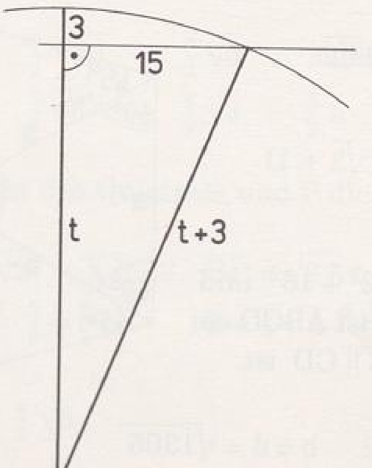
$\Rightarrow t = 36\,cm$

•••••••••••••••

oder Sehnensatz:

$3\cdot(2t + 3) = 15\cdot 15$

$\Rightarrow t = 36\,cm$



Schwierigere Berechnungen

124/1. $v + w = 2a \;\Rightarrow\; a = \frac{v+w}{2}$; $\quad g^2 = vw$ (Höhensatz) $\Rightarrow g = \sqrt{vw}$

$g^2 = ha$ (Kathetensatz) $\Rightarrow vw = h\cdot\frac{v+w}{2} \;\Rightarrow\; h = \frac{2vw}{v+w}$

$q^2 = a^2 + (a-v)^2$ (Pythagoras) $\Rightarrow q^2 = \left(\frac{v+w}{2}\right)^2 + \left(\frac{v+w}{2} - v\right)^2 = \frac{v^2+w^2}{2}$

$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{v^2+w^2}{2}}$

125/2. $v^2 = x(v+w)$

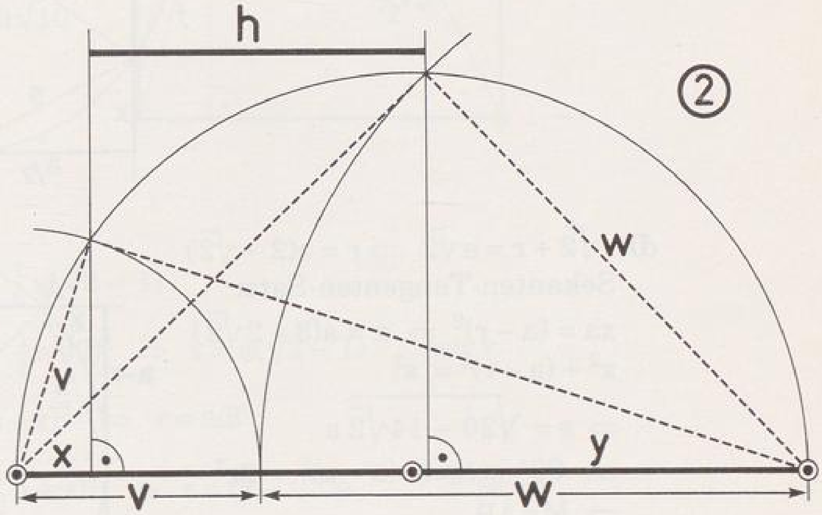
$\Rightarrow x = \frac{v^2}{v+w}$

$w^2 = y(v+w)$

$\Rightarrow y = \frac{w^2}{v+w}$

$h = v + w - x - y$

$= \frac{2vw}{v+w}$



125/3. Der Kreisradius sei r: $a = v + r = v + \frac{w-v}{2} = \frac{v+w}{2}$

Sekantentangentensatz: $g^2 = vw \;\Rightarrow\; g = \sqrt{vw}$

Kathetensatz: $g^2 = ha \;\Rightarrow\; h = \frac{2vw}{v+w}$

125/4. $d = \overline{DB} = 25$; $\quad \frac{d\cdot y}{2} = \frac{15\cdot 20}{2} \Rightarrow y = 12$; $\quad \overline{DP} = \overline{QB} = 9$ (Pythagoras)

$\overline{PQ} = 25 - 2\cdot 9 = 7 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{193}$ (Pythagoras)

$\frac{xz}{2} = \frac{7\cdot 12}{2} \;\Rightarrow\; z = \frac{84}{193}\sqrt{193}$

125/5. Parallelogrammseite $a = 26$, $x = \sqrt{31^2 + 12^2} = \sqrt{1105}$

$y = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}$; $\quad \frac{1}{4}z^2 = 13^2 - (3\sqrt{13})^2 \;\Rightarrow\; z = 4\sqrt{13}$

125/6. Haben die abgesägten Dreiecke die Schenkellänge s, so gilt:

I $b^2 = 2s^2 \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b$ $\qquad$ II $b + 2s = a$

I in II eingesetzt: $b + b\sqrt{2} = a \;\Rightarrow\; b = a(\sqrt{2} - 1)$

$F = a^2 - 4\cdot\frac{1}{2}s^2 = 2a^2(\sqrt{2} - 1)$

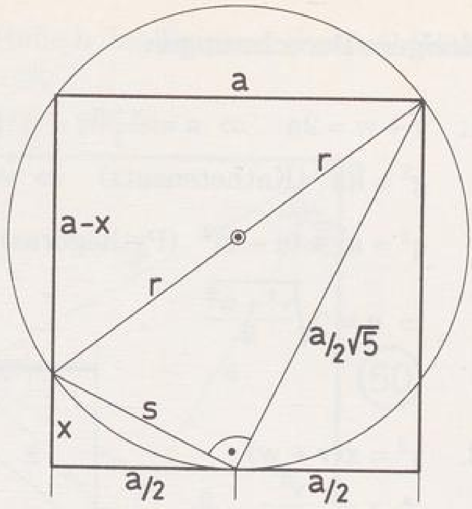
125/7. **a)** $r = \frac{1}{2}a$ $\qquad$ **b)** $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

125/7. c) I $\quad a^2 + (a-x)^2 = 4r^2$

II $\quad x^2 + \frac{1}{4}a^2 = s^2$

III $\quad s^2 + \frac{5}{4}a^2 = 4r^2$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}a,\ r = \frac{5}{8}a,\ s = \frac{1}{4}a\sqrt{5}$



d) $r\sqrt{2} + r = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow r = a(2-\sqrt{2})$

Sekanten-Tangenten-Satz:

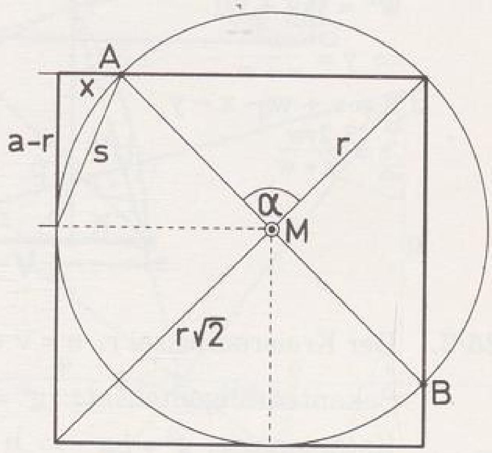
$xa = (a-r)^2 \;\Rightarrow\; x = a(3-2\sqrt{2})$

$x^2 + (a-r)^2 = s^2$

$\Rightarrow s = \sqrt{20-14\sqrt{2}}\,a$

$\alpha = 90°$ wegen $(a-x)^2 = 2r^2$

$\Rightarrow M \in AB$



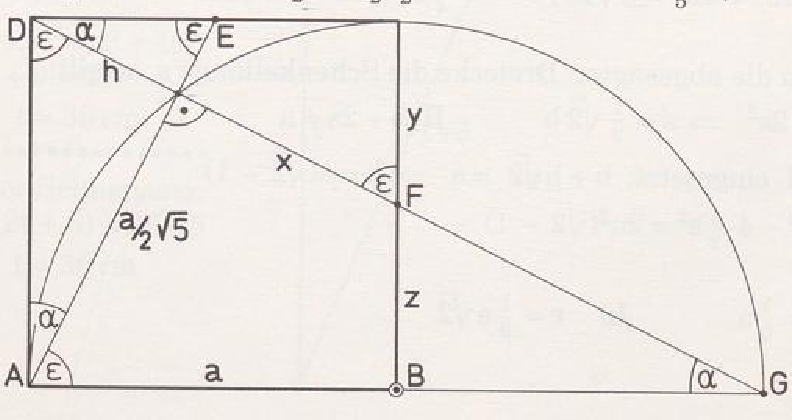
e) $a = R + R\sqrt{2} \;\Rightarrow R = a(\sqrt{2}-1)$

$r\sqrt{2} + r = a\sqrt{2} - a \;\Rightarrow\; r = a(3-2\sqrt{2})$

f) $a = r + \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}a^2} \;\Rightarrow r = \frac{3}{8}a$

g) $\Delta AED \cong \Delta BGF$ (WSW) $\qquad \Rightarrow z = \frac{1}{2}a \Rightarrow y = \frac{1}{2}a$

$x = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - h, \qquad \frac{a \cdot a/2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{5} \cdot h \qquad \Rightarrow h = \frac{1}{5}a\sqrt{5} \qquad x = \frac{3}{10}a\sqrt{5}$



h) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} s \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a$

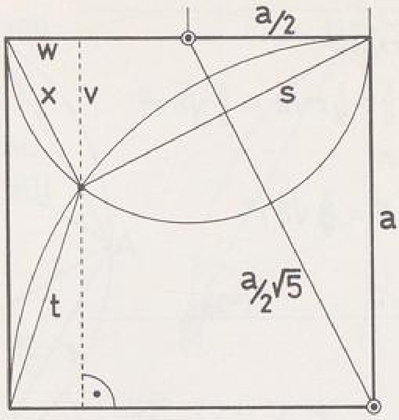
$\Rightarrow s = \frac{2}{5} a\sqrt{5}$

$x^2 + s^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{1}{5} a\sqrt{5}$

$\frac{1}{2} a \cdot v = \frac{1}{2} x \cdot s \Rightarrow v = \frac{2}{5} a$

$w = \sqrt{x^2 - v^2} = \frac{1}{5} a$

$t = \sqrt{w^2 + (a - v)^2} = \frac{1}{5} a\sqrt{10}$



i) $r + \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} a(\sqrt{2} - 1)$

j) $v^2 = (a - \frac{1}{2} a\sqrt{2})^2 + (a - \frac{1}{2} a\sqrt{2})^2 \Rightarrow v = a(\sqrt{2} - 1)$ $\quad w = v$

k) $(r + \frac{1}{2} a)^2 = (\frac{1}{2} a)^2 + (\frac{1}{2} a - r)^2 \Rightarrow r = a/8$

l) $\left(\frac{a - 2r}{2}\right)^2 + (a - r)^2 = (\frac{1}{2} a + r)^2 \Rightarrow r = (2 - \sqrt{3})a$ $\quad s = r$

m) $h + r = a,\ h^2 = r(a + r)$ (Sekanten-Tangenten-Satz)

$\Rightarrow \sqrt{r^2 + ar} + r = a \Rightarrow r = a/3$ (h ist Höhe in ΔABM)

n) ist x die längere Teilstrecke von a, so gilt:

$2x^2 = s^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} s\sqrt{2};\ s^2 = a^2 + (a - x)^2 \Rightarrow s = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

o) $a^2 + (a + x)^2 = 4a^2$

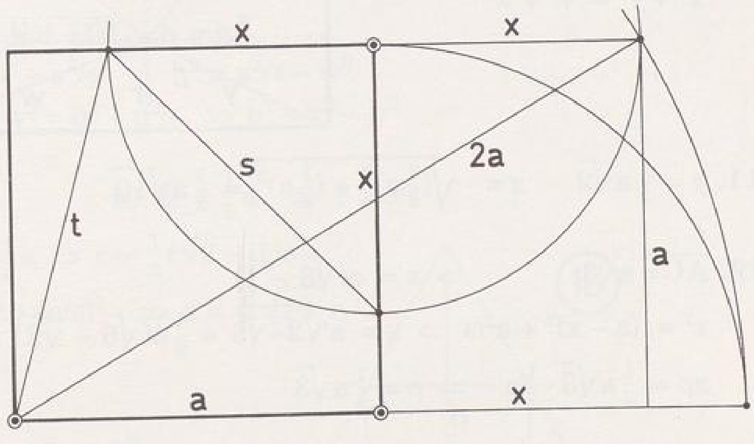
$\Rightarrow x = a(\sqrt{3} - 1)$

$2x^2 = s^2$

$\Rightarrow s = (\sqrt{6} - \sqrt{2})a$

$t^2 = a^2 + (a - x)^2$

$\Rightarrow t = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

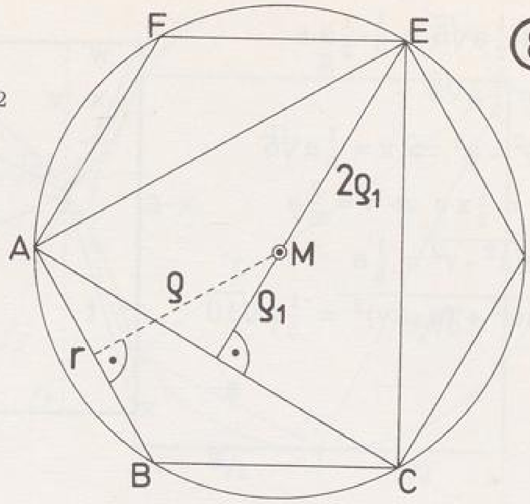


126/8. **a)** $\rho = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$

b) $F = 6 \cdot \frac{1}{2} r \cdot \frac{1}{2} r\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, r^2$

c) $\rho_1 = \frac{1}{2} r$

d) $F_1 = \frac{1}{2} F = \frac{3}{4}\sqrt{3}\, r^2$



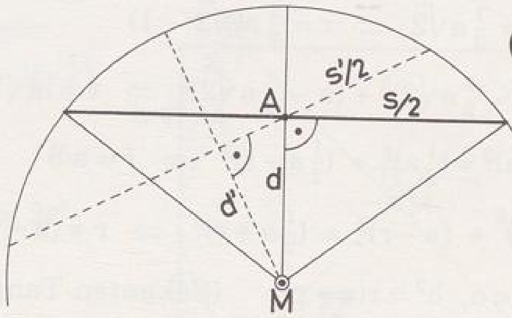
8

126/9. Die kleinste Sehne ist das Lot zu MA; s = 8

$s = 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$s' = 2\sqrt{r^2 - d'^2} \Rightarrow$

wegen $d' < d$ gilt $s < s'$.



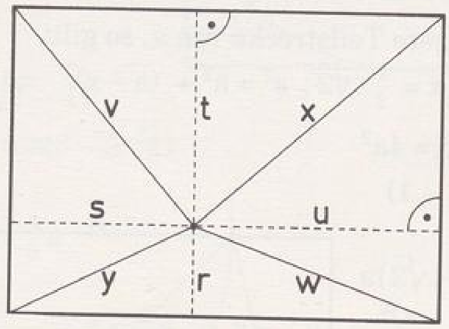
9

126/10. $x^2 = t^2 + u^2, \quad v^2 = t^2 + s^2$

$y^2 = r^2 + s^2, \quad w^2 = r^2 + u^2$

durch Addition folgt:

$x^2 + y^2 = v^2 + w^2$



10

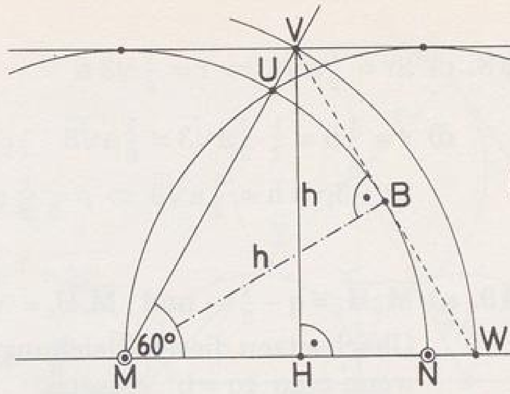
126/11. $y = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \qquad z = \sqrt{(\frac{3}{2} a)^2 + (\frac{1}{2} a)^2} = \frac{1}{2} a\sqrt{10}$

126/12. $\overline{AC} = a\sqrt{3} \qquad \Rightarrow x = a(\sqrt{3} - 1)$

$z^2 = (a - x)^2 + a^2/4 \Rightarrow z = a\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$a\rho = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} a \quad \Rightarrow \rho = \frac{1}{4} a\sqrt{3}$

126/13. ΔMNU ist nach Konstruktion gleichseitig, ebenso ist auch ΔMWV gleichseitig, weil $\sphericalangle M = 60°$ und $\overline{MW} = \overline{MV}$ ist. Da für die Höhe in ΔMWV gilt $h = \overline{HV} = \overline{MB}$, muss VW Tangente sein.

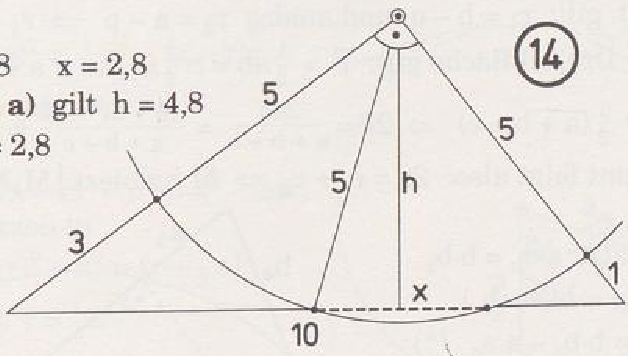


13

126/14. **a)** $h = 4{,}8 \quad x = 2{,}8$

b) wie in **a)** gilt $h = 4{,}8$

$\Rightarrow z = 2{,}8$



14

126/15. Nach PTOLEMAIOS gilt: $e^2 = vw + s^2 \quad \Rightarrow e = \sqrt{vw + s^2}$

für die Flächen des Sehnenvierecks gilt:

$$F = \frac{e(ab + cd)}{4r} = \frac{\sqrt{vw + s^2} \cdot (ws + vs)}{4r}$$ andrerseits aber auch

$$F = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{v + w}{2} \sqrt{s^2 - (\tfrac{w - v}{2})^2}$$

gleichsetzen ergibt $r = s\sqrt{\dfrac{vw + s^2}{4s^2 - (w - v)^2}}$

126/16. Mit $\overline{AM_a} = x$ und $\overline{HM_a} = h$ gilt

$x^2 = v^2 + h^2 = b^2 + a^2/4, \qquad h^2 = a^2/4 - w^2$

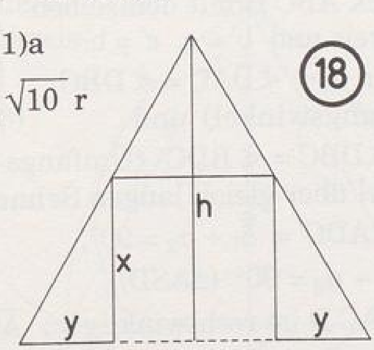
$\Rightarrow \quad v^2 + a^2/4 - w^2 = b^2 + a^2/4 \;\Rightarrow b^2 = v^2 - w^2$

126/17. **a)** $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ **b)** $2r = \frac{1}{2}a \quad \Rightarrow r = a/4$

c) $r + r\sqrt{2} = \frac{1}{2}a \Rightarrow r = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)a$

d) $r^2 = (3a/2)^2 + (a/2)^2 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{5}\sqrt{10}\ r$

18



127/18. **a)** $s = \frac{2}{3}b\sqrt{3}$

b) Strahlensatz: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{a/2}{h}$

$h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x$

$2y + x = a \quad \Rightarrow x = a(2\sqrt{3} - 3)$

127/18. c) $2r = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a$

d) $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$

$2r + 3\rho = h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \Rightarrow \rho = \frac{1}{18}a\sqrt{3}$

127/19. a) $\overline{M_cH_c} = q - \frac{1}{2}c$ und $\overline{M_cH_c} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}c - r\right)^2 - r^2} - r$

Gleichsetzen dieser Gleichungen liefert schließlich $r = b - q$, wenn man $cq = b^2$ einsetzt.

b) Nach **a)** gilt: $r_1 = b - q$ und analog $r_2 = a - p \Rightarrow r_1 + r_2 = a + b - c$

Für die Dreieckfläche gilt: $F = \frac{1}{2}ab = r\cdot\frac{1}{2}u \quad (u = a + b + c) \Rightarrow$

$\frac{1}{2}ab = r\cdot\frac{1}{2}(a + b + c) \Rightarrow 2r = \frac{2ab}{a+b+c} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c} = a + b - c,$

insgesamt folgt also: $2r = r_1 + r_2 \Rightarrow M$ halbiert $[M_1M_2]$

127/20. Sekantensatz: $a\cdot a_b = b\cdot b_a$

$\Rightarrow a(a - a_c) = b(b - b_c)$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = b\cdot b_c - a\cdot a_c \quad (*)$

Pythagoras: $c^2 - a_c^2 = b^2 - a_b^2$

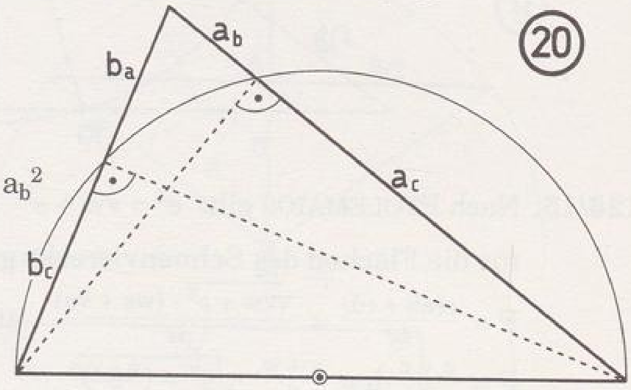
$\Rightarrow c^2 = b^2 + a_c^2 - (a - a_c)^2$

$= b^2 - a^2 + 2a\cdot a_c$

Einsetzen von (*) ergibt:

$c^2 = b\cdot b_c - a\cdot a_c + 2a\cdot a_c$

$= b\cdot b_c + a\cdot a_c$



127/21. Pythagoras:

$a^2 = e_1^2 + f_1^2,\ c^2 = e_2^2 + f_2^2,$

$b^2 = e_2^2 + f_1^2,\ d^2 = e_1^2 + f_2^2,$

Addition ergibt: $a^2 + b^2 = b^2 + d^2$

Vertauscht man im Sehnenviereck ABCD die Seiten b und c, so bekommt man das Sehnenviereck ABC'D mit demselben Umkreis und $b' = c$, $c' = b$.

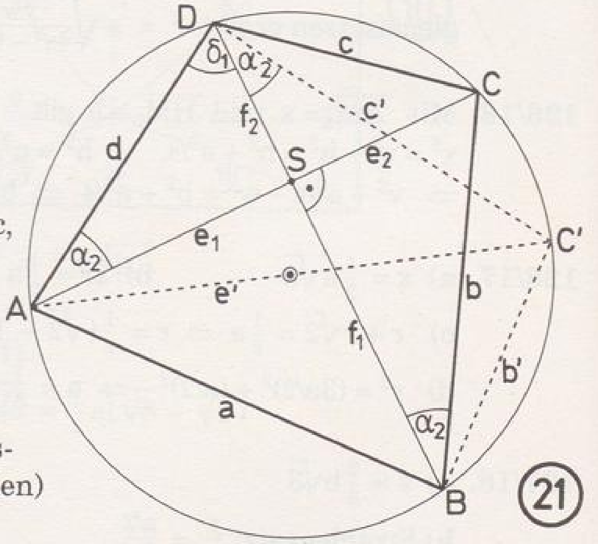
Wegen $\alpha_2 = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ (Umfangswinkel) und

$\alpha_2 = \sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC'$ (Umfangswinkel über gleich langen Sehnen)

gilt $\sphericalangle ADC' = \delta_1 + \alpha_2 = 90°$,

da $\delta_1 + \alpha_2 = 90°$ (ΔASD)

$\Rightarrow \Delta AC'D$ ist rechtwinklig $\Rightarrow \overline{AC'} = 2r \Rightarrow c'^2 + d^2 = b^2 + d^2 = 4r^2$



127/22. **a)** $2r + a = 2a \Rightarrow r = \frac{1}{2}a$

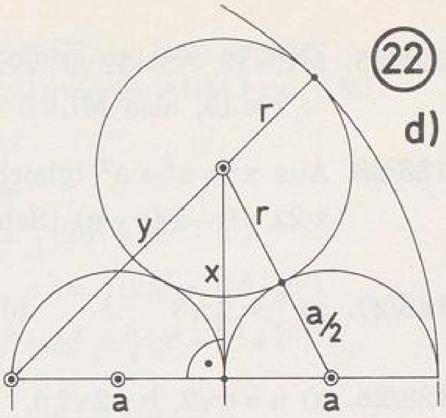
b) $r + a\sqrt{2} = 2a \Rightarrow r = a(2 - \sqrt{2})$

c) $(2a - r)^2 = a^2 + (a + r)^2 \Rightarrow r = \frac{1}{3}a$

d) $x = \sqrt{(r + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{r^2 + ar}$

$r + y = 2a$

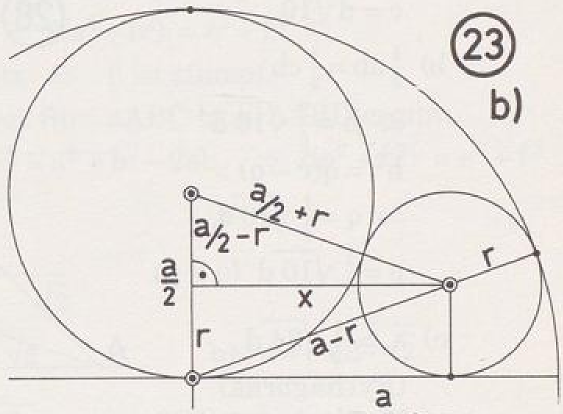
$r + \sqrt{a^2 + r^2 + ar} = 2a \Rightarrow r = \frac{3}{5}a$



127/23. **a)** $(r + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + (a - r)^2$

$\Rightarrow r = \frac{1}{3}a$

b) $x^2 = (a - r)^2 - r^2 = a^2 - 2ar$,
einsetzen in
$(\frac{1}{2}a - r)^2 + x^2 = (r + \frac{1}{2}a)^2$
ergibt $r = \frac{1}{4}a$



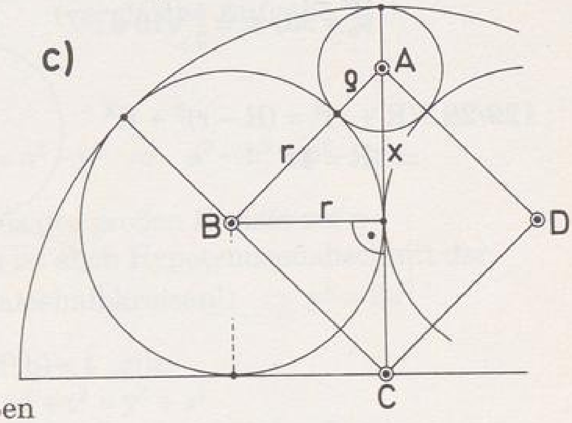
c) $a = r + r\sqrt{2} \Rightarrow r = a(\sqrt{2} - 1)$

$x = a - \rho - r = a(2 - \sqrt{2}) - \rho$

$(r + \rho)^2 = r^2 + x^2$

$\Rightarrow \rho = (3 - 2\sqrt{2})a$,

wegen $x = r$ ist ABCD ein Quadrat.



128/24. **a)** Die Mittelpunkte der drei großen Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck mit $h = r\sqrt{3}$. Der andere Mittelpunkt ist zugleich Umkreismittelpunkt.

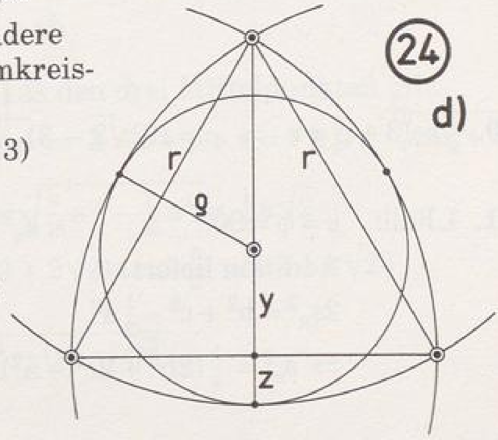
$\Rightarrow \rho = \frac{2}{3}r\sqrt{3} - r = \frac{1}{3}r(2\sqrt{3} - 3)$

b) $\rho = \frac{2}{3}r\sqrt{3} + r = \frac{1}{3}r(2\sqrt{3} + 3)$

c) $\rho = r + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{3}r(3 + \sqrt{3})$

d) $z = r - \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, $y = \frac{1}{6}r\sqrt{3}$

$\rho = y + z = \frac{1}{3}r(3 - \sqrt{3})$



128/25. $\overline{MS} = 12$, $\overline{AS} = 12\sqrt{2}$, $\overline{BS} = 4\sqrt{13}$, Höhensatz: $\overline{MS}^2 = \overline{BM} \cdot x \Rightarrow x = 18$
$\Rightarrow r = 13$, also $\overline{ML} = 5 \Rightarrow \overline{SL} = 13$

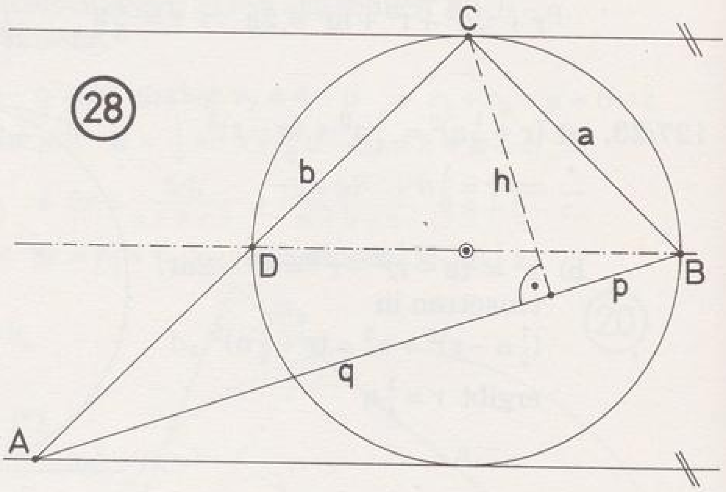
128/26. Aus $x^2 = a^2 + a^2$ (gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck) und
$x \cdot 2x = (r - a)(r + a)$ (Sehnensatz) folgt $x = \frac{1}{5} r\sqrt{10}$.

128/27. **a)** $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{b}{a} = \sqrt{5} - 1$

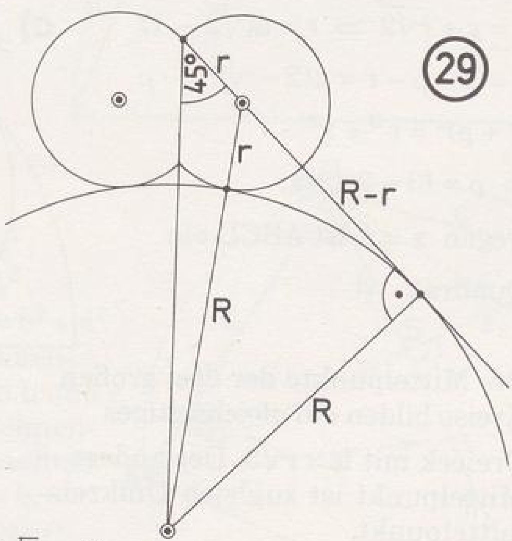
128/28. **a)** $a = d\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}\,d$,
$c = d\sqrt{10}$

b) $\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ch$
$\Rightarrow h = \frac{2}{5}\sqrt{10}\,d$
$h^2 = q(c - q)$
$\Rightarrow q = \frac{4}{5}\sqrt{10}\,d$,
$p = \frac{1}{5}\sqrt{10}\,d$ $(q > p)$

c) $s_a = \frac{1}{2}\sqrt{34}\,d$
(Pythagoras)
$s_b = 2d$, $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{10}\,d$.

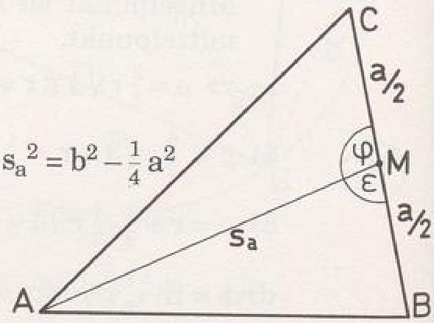


129/29. $(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2$
$\Rightarrow R = 4r$



129/30. $\frac{2}{3}\rho\sqrt{3} + \rho = r \Rightarrow \rho = r(2\sqrt{3} - 3)$

129/31. 1.Fall: $\varepsilon = \varphi = 90°$: ${s_a}^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$, ${s_a}^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$
Addition liefert
$2{s_a}^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$
$\Rightarrow {s_a}^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$



2.Fall: Einer der beiden Winkel, z.B. ε, ist spitz, also ist φ stumpf:
Der erweiterte Pythagoras für die Dreiecke ABM bzw. AMC
ergibt: $c^2 = s_a{}^2 + (\frac{1}{2}a)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot a_{sa}$

$b^2 = s_a{}^2 + (\frac{1}{2}a)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot a_{sa}$

Addition liefert wie im 1.Fall: $s_a{}^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Analog gilt: $s_b{}^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, $s_c{}^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$,

durch Addition ergibt sich $s_a{}^2 + s_b{}^2 + s_c{}^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

129/32. 1.Fall: $\alpha = \beta = 90° \Rightarrow$ ABCD ist ein Rechteck; es gilt:
$a^2 + b^2 = e^2, \quad a^2 + b^2 = f^2 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

2.Fall: Ein Winkel, z.B. α, ist spitz $\Rightarrow$ β ist stumpf.
Der erweiterte Pythagoras für ΔABC bzw. ΔABD ergibt:
$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab_a$ und $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab_a \Rightarrow 2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

129/33. **a)** $2h_a{}^2 = s^2 \Rightarrow h_a = \frac{1}{2}s\sqrt{2} = h_b$

$h_a{}^2 + (s - h_a)^2 = c^2 \Rightarrow c = s\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$h_c{}^2 = s^2 - c^2/4 \Rightarrow h_c = \frac{1}{2}s\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ **b)** $c = s\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $s_c = h_c \qquad s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (vergleiche Aufgabe **31.**)

$s_a = \frac{1}{2}s\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} = s_b$

129/34. $h^2 = b^2 - q^2,\ h^2 = a^2 - p^2 \Rightarrow b^2 - q^2 = a^2 - p^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = p^2 - q^2$

129/35. Die kürzere Kathete sei q, der Radius des großen Kreises sei r:
$y^2 = q \cdot 2r,\ x^2 = q \cdot r$ (Kathetensatz, q ist auch Hypotenusenabschnitt der rechtwinkligen Dreiecke in den Thaleshalbkreisen!) $\Rightarrow y^2 = 2x^2$

129/36. Mit $d(P,c) = r$, $d(P,a) = s$ und $d(P,b) = t$ gilt:
$u^2 + r^2 = z^2 + t^2, \quad v^2 + s^2 = x^2 + r^2, \quad w^2 + t^2 = y^2 + s^2$
Addition: $u^2 + r^2 + v^2 + s^2 + w^2 + t^2 = z^2 + t^2 + x^2 + r^2 + y^2 + s^2$,
$\Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + z^2$

129/37. **a)** Für die Höhe x des Dreiecks aus den drei Mittelpunkten gilt:
$x = \sqrt{(r + \rho)^2 - \rho^2} = \sqrt{r^2 + 2\rho r} \Rightarrow h = r + \rho + x = r + \rho + \sqrt{r(r + 2\rho)}$

b) Mit x – wie in **a)** – gilt: $x = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 - \frac{1}{16}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{2})a \Rightarrow \frac{a}{b} = 4(3 - 2\sqrt{2})$

130/38. $(s/2)^2 + (m - r)^2 = R^2 \Rightarrow s = \sqrt{R^2 - (m - r)^2}$

130/39. **a)** $R^2 - (m-r)^2 \geq 0$ **b)** nein

c) $s' = 2\sqrt{r^2 - (m-R)^2}$

d) konzentrische Kreise: $s = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

Berührung von innen: $s = 2\sqrt{R^2 - (2r-R)^2}$

130/40. **a)** $2h = m + r + R \Rightarrow h = \frac{1}{2}(m + r + R)$

für die Fläche des Dreiecks aus den beiden Mittelpunkten und einem Schnittpunkt der Kreise gilt: $F = \sqrt{h(h-R)(h-r)(h-m)}$ (HERON)

oder auch: $F = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \frac{1}{2}s = \frac{1}{4}ms$,

Gleichsetzen ergibt: $s = \frac{4}{m}\sqrt{h(h-R)(h-r)(h-m)}$

b) $s = 2r \Rightarrow m = \sqrt{R^2 - r^2}$

130/41. Fällt man von P aus die Lote auf die Schenkel, so ergibt sich ein Rechteck mit den Seiten $\frac{1}{2}v\sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}w\sqrt{2}$.

Aus $\overline{CP}^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2$ folgt $v^2 + w^2 = 2\,\overline{CP}^2$.

130/42. Dreieck VAM ist gleichseitig wegen $\overline{VM} = \overline{AM}$ und $\sphericalangle AMV = 60°$,

$\Rightarrow \overline{AV} = r = \frac{1}{3}s\sqrt{3} \Rightarrow \overline{VP} = \sqrt{\frac{7}{12}}\,s$ (Pythagoras),

Sehnensatz: $\overline{CP}(2r - \overline{CP}) = \overline{VP}\cdot\overline{PW} \Rightarrow \overline{PW} = \frac{1}{4}s\sqrt{\frac{12}{7}}$,

$\overline{VW} = \overline{VP} + \overline{PW} = \frac{5}{21}s\sqrt{21}$.

131/43. $z = 7$ (Pythagoras)

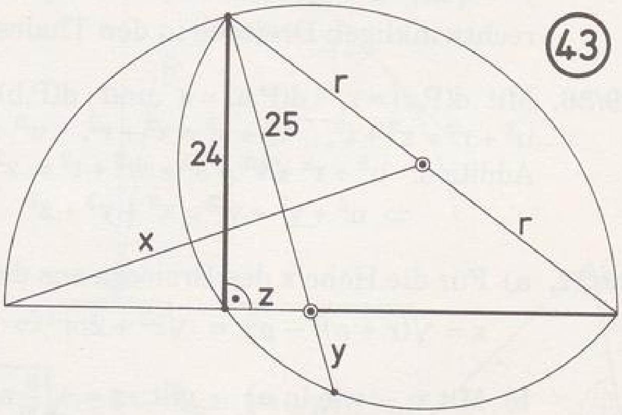
$y = 7$ (Sehnensatz)

$r = 20$ (Pythagoras)

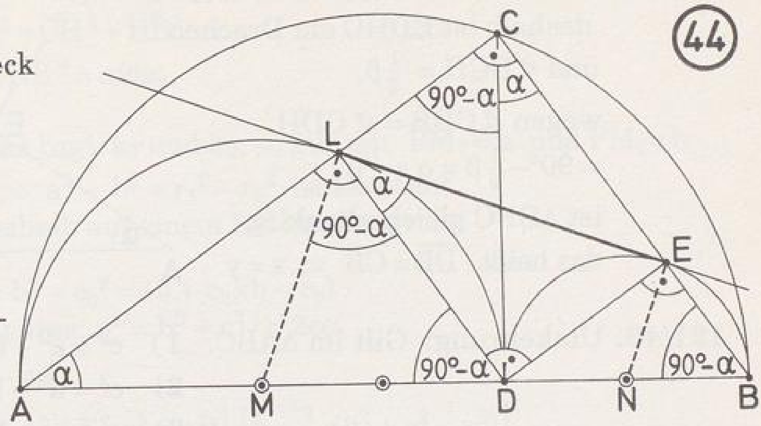
Sekantensatz:

$(x - 20)(x + 20) = 18\cdot 50$

$\Rightarrow x = 10\sqrt{13}$



131/44. **a)** CLDE ist wegen seiner rechten Winkel einRechteck
$\Rightarrow \overline{EL} = \overline{CD} = 24$



b) eine Winkelbetrachtung zeigt:
$\overline{EL} \perp \overline{ML}$ und
$EL \perp NE$
$\Rightarrow$ EL ist gemeinsame Tangente.

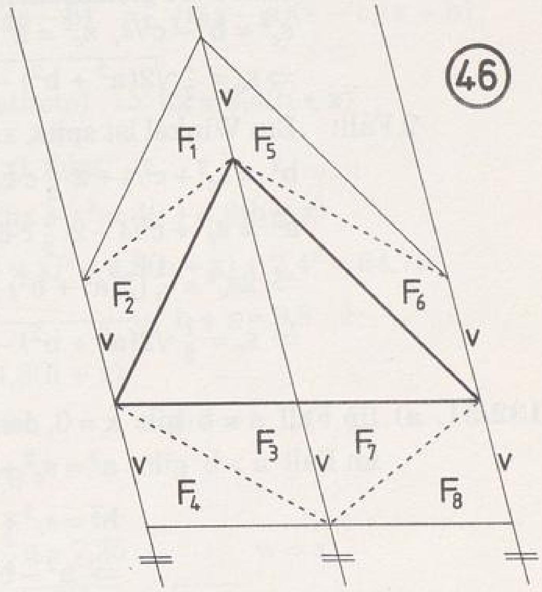
c) $\sphericalangle B = 90° - \alpha$
$\sphericalangle DEB = 90°$
$\sphericalangle DEL = 90° - \alpha \Rightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle E = 180° \Rightarrow$ ABEL ist ein Sehnenviereck.

131/45. $p^2 + (1-q)^2 = x^2 + 1 + (x+p)^2 + q^2 \Rightarrow x^2 + px + q = 0$

a) $x_1 = 0 \quad x_2 = -3$ **b)** $x_1 = -2 \quad x_2 = 1$

c) $x_1 = -3 \quad x_2 = 4$ **d)** $x_{1;2} = 2$ **e)** $x_1 = -2{,}5 \quad x_2 = 2$

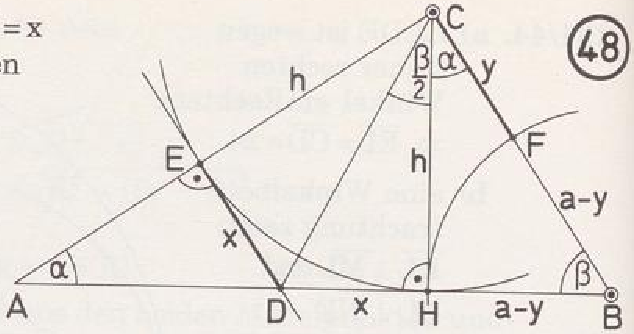
f) keine Schnittpunkte, also keine Lösung



131/46. Wegen gleicher Grundlinien und Höhen gilt:
$F_1 = F_2 = F_3 = F_4$
$F_5 = F_6 = F_7 = F_8$
$\Rightarrow \boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{3}$

131/47. Ist H der Höhenfußpunkt und $\overline{DH} = x$, so folgt aus dem erweiterten Pythagoras:
$b^2 = q^2 + d^2 + 2qx \Rightarrow 2x = \frac{1}{q}(b^2 - q^2 - d^2)$,
$a^2 = p^2 + d^2 - 2px \Rightarrow 2x = \frac{1}{p}(p^2 + d^2 - a^2)$
$\Rightarrow \frac{1}{q}(b^2 - q^2 - d^2) = \frac{1}{p}(p^2 + d^2 - a^2)$
$\Rightarrow a^2q + b^2p = (p+q)d^2 + pq(p+q) \Rightarrow a^2q + b^2p = c(d^2 + pq)$

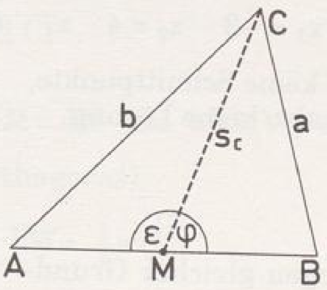
131/48. $\Delta DCE \cong \Delta DHC$ (SsW) $\Rightarrow \overline{DH} = x$
deshalb ist EDHC ein Drachen
und $\sphericalangle DCH = \frac{1}{2}\beta$,
wegen $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CDH$
$= 90° - \frac{1}{2}\beta = \alpha + \frac{1}{2}\beta$
ist ΔDBC gleichschenklig,
das heißt, $\overline{DB} = \overline{CB} \Rightarrow x = y$



131/49. Umkehrung: Gilt im ΔABC: **1)** $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \gamma = 90°$
2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2aa_b \Rightarrow \gamma < 90°$
3) $c^2 = a^2 + b^2 + 2aa_b \Rightarrow \gamma < 90°$

Beweis: **1)** siehe Umkehrung des Pythagoras
2) wäre $\gamma \geq 90°$, so ergäbe sich mit dem erweiterten Satz von Pythagoras ein Widerspruch
3) analog wie **2)**

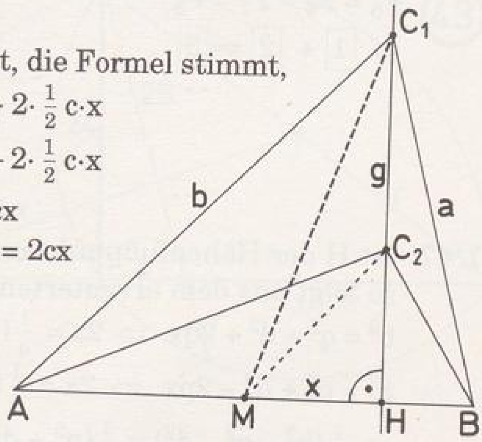
131/50. 1.Fall: $\varepsilon = \varphi = 90°$, das heißt,
ΔABC ist gleichschenklig
$s_c{}^2 = b^2 - c^2/4$, $s_c{}^2 = a^2 - c^2/4$
$\Rightarrow s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$



2.Fall: Ein Winkel ist spitz, z.B. φ
$b^2 = s_c{}^2 + c^2/4 + 2 \cdot \frac{1}{2} c \cdot c_{sc}$
$a^2 = s_c{}^2 + c^2/4 - 2 \cdot \frac{1}{2} c \cdot c_{sc}$
$\Rightarrow 2s_c{}^2 = \frac{1}{2}[2(a^2 + b^2) - c^2]$
$\Rightarrow s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$

132/51. a) Im Fall $a = b$ gilt $x = 0$, das heißt, die Formel stimmt,
im Fall $a > b$ gilt: $a^2 = s_c{}^2 + c^2/4 + 2 \cdot \frac{1}{2} c \cdot x$
$b^2 = s_c{}^2 + c^2/4 - 2 \cdot \frac{1}{2} c \cdot x$
$\Rightarrow a^2 - b^2 = 2cx$
im Fall $a < b$ gilt analog: $b^2 - a^2 = 2cx$
insgesamt folgt: $x = \dfrac{|a^2 - b^2|}{2c}$

b) ist die Differenz der Quadrate der Entfernungen konstant, so ist nach **a)** auch die senkrechte Projektion x von [MC] auf AB konstant $\Rightarrow C \in g \perp AB$.



Liegt umgekehrt C auf $g \perp AB$, so folgt:

$b^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$, $a^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = \overline{AH}^2 - \overline{HB}^2 = \text{const}$

132/51. **c)** hat P gleiche Potenz bzgl. k_1 und k_2, so gilt mit $\overline{PM_1} = a$ und $\overline{PM_2} = b$:

$a^2 - r_1^2 = b^2 - r_2^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = r_1^2 - r_2^2$ ist konstant.

Nach **b)** liegt P deshalb auf einem Lot zur Zentrale.

132/52. **a)** Pythagoras: $h_c^2 = b^2 - c_b^2 = (b + c_b)(b - c_b)$

erweiterter Pythagoras: $a^2 = b^2 + c^2 \oplus 2cc_b$

$\Rightarrow c_b = \frac{1}{2c} \left|b^2 + c^2 - a^2\right|$

b) $h_c^2 = b^2 - c_b^2 = \left[b + \frac{1}{2c}(b^2 + c^2 - a^2)\right]\left[b - \frac{1}{2c}(b^2 + c^2 - a^2)\right]$

$= \frac{1}{2c}\left[(b+c)^2 - a^2\right] \cdot \frac{1}{2c}\left[a^2 - (b-c)^2\right]$

$= \frac{1}{4c^2}(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$

c) $2s = a + b + c$ $\qquad b + c - a = 2(s - a)$

$a + b - c = 2(s - c)$ $\qquad a - b + c = 2(s - b)$

$h_c^2 = \frac{1}{4c^2} \cdot 2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-b)$

$F = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)} = \sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}$

132/53. $\frac{h - 2{,}4}{2{,}4} = \frac{h}{x}$ (Strahlensatz, x ist 2.Kathete) $\Rightarrow hx = 2{,}4(h + x)$

aus $h^2 + x^2 = 49$ und $hx = 2{,}4(h + x)$ folgt:

$h^2 + 2hx + x^2 = 49 + 2hx \Rightarrow h^2 + 2hx + x^2 = 49 + 4{,}8(h + x)$

$\Rightarrow (h + x)^2 = 49 + 4{,}8(h + x) \Rightarrow (h + x)^2 - 4{,}8(h + x) + 2{,}4^2 = 54{,}76$

$\Rightarrow (h + x - 2{,}4)^2 = 54{,}76 \qquad \Rightarrow h + x = 9{,}8 \quad \text{I}$

weiter gilt: $h^2 - 2hx + x^2 = 49 - 4{,}8(h + x)$

$\Rightarrow (h - x)^2 = 49 - 47{,}04 \qquad \Rightarrow h - x = 1{,}4 \quad \text{II}$

Addition von I und II liefert: $h = 5{,}6$

132/54. $u = 2\sqrt{612{,}5} - 35 \approx 14{,}5$ $\qquad x = \frac{1}{2}u \approx 7{,}25$ $\qquad w = x$

$v = 35 - \sqrt{612{,}5} \approx 10{,}25$ $\qquad y = \sqrt{918{,}75} - \sqrt{612{,}5} \approx 5{,}56$

$z = 35 - \sqrt{918{,}75} \approx 4{,}69$

133/55. a) Das Lot durch M_1 auf AB schneide AB in F, $z = \overline{M_1F}$, $\overline{CB} = x$, und $\overline{BF} = y$. Dann gilt für ΔFDM_1: $z^2 = r^2 - (x+y)^2$ und $\overline{M_1M_2}^2 =$
$z^2 + (R+y)^2 = r^2 - (x+y)^2 + (R+y)^2 = r^2 + R^2 - x^2 - 2xy + 2Ry$ $\boxed{1}$

Wegen der harmonischen Teilung gilt aber $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{DB}$,
das heißt $\frac{2R - x}{x} = \frac{2R + 2y + x}{2y + x} \Rightarrow 2Ry - 2xy - x^2 = 0$,
damit lautet $\boxed{1}$: $\overline{M_1M_2}^2 = r^2 + R^2 \Rightarrow \sphericalangle T = 90°$;

schneiden sich umgekehrt die Kreise rechtwinklig, so gilt:
$r^2 + R^2 = (R - x + r)^2 \Rightarrow x^2 + 2rR - 2rx - 2Rx = 0 \Rightarrow$
$2x^2 + 4rR - 4rx - 4Rx = 0 \Rightarrow 4rR - 2Rx - 2rx + x^2 = -x^2 + 2Rx + 2rx$
$\Rightarrow (2R - x)(2r - x) = 2x(R + r) - x^2$
$\Rightarrow \frac{2R - x}{x} = \frac{2(R + r) - x}{2r - x}$, also $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{DB}$

b) Weil ein Apollonioskreis zu [AB] einen Durchmesser eines Kreises durch A und B immer harmonisch teilt, schneiden sich die Kreise nach **a)** senkrecht.