Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1999

6. Kapitel

6.Kapitel

144/1. a) $\overline{AT} = 6{,}5(\sqrt{5} - 1)$ $\qquad \overline{TB} = 6{,}5(3 - \sqrt{5})$

a) $\overline{AC} = 13 + \overline{AT} = 6{,}5(\sqrt{5} + 1)$ (oder $\overline{AC} = 6{,}5(\sqrt{5} + 3)$)

144/2. $\overline{AT} = 4(\sqrt{5} - 1)$ $\qquad \overline{AC} = 8 + 4(\sqrt{5} - 1) = 4(1 + \sqrt{5})$

$\overline{AD} = \overline{TB} = 4(3 - \sqrt{5})$

144/3. Eine Strecke a heißt stetig geteilt, wenn der größere Streckenabschnitt x geometrisches Mittel von a und der Reststrecke $a - x$ ist.

144/4. Mit $\overline{ZP} = x$, $\overline{AB} = c$ und $\overline{AT} = z$ gilt:
$s : x = x : (s - x)$ (stetige Teilung). Wegen $\overline{QT} = x$ liefert der Strahlensatz: $s : x = a : z$ und $x : (s - x) = z : (a - z) \Rightarrow a : z = z : (a - z)$

144/5. a) vergl. Lehrtext $\quad$ b) $18° = \frac{36°}{2}$ $\quad$ c) $24° = \frac{60°}{4} + \frac{36°}{4}$

d) $3° = \frac{24°}{8}$ $\quad$ e) $81° = 2 \cdot 36° + \frac{36°}{4}$

144/6. a) Kathetensatz: $b^2 = c_a{}^2 = c(c - c_a) \Rightarrow c : c_a = c_a : (c - c_a)$

b) Man konstruiert den Teilpunkt $T = H_c$ auf c. Die Höhe h_c schneidet den Thaleskreis über c in C.

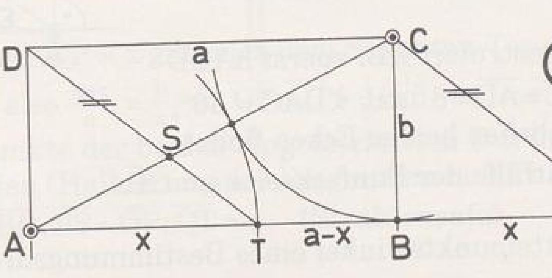
144/7. $f_1 \approx -2{,}9\%$ $\quad f_2 \approx 1{,}1\%$ $\quad f_3 \approx -0{,}43\%$ $\quad f_4 \approx 1{,}6\%$ $\quad f_5 \approx -0{,}063\%$

144/8. $\overline{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,c$, Fläche(ABC) $= \frac{1}{2}c^2 = \rho \cdot s = \rho \cdot \frac{1}{2}c(\sqrt{5} + 1) \Rightarrow \rho = \frac{1}{4}c(\sqrt{5} - 1)$

$\Rightarrow \overline{H_cS} = 2\rho = \frac{1}{2}c(\sqrt{5} - 1)$, $\quad \overline{SC} = \frac{1}{2}c(3 - \sqrt{5})$

144/9. a) Nach Konstruktion gilt DT || CE. Da T die Strecke [AE] stetig teilt, folgt aus dem Strahlensatz, dass S die Strecke [AC] stetig teilt.

b) $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$ $\quad \overline{AS} = 3(3\sqrt{5} - 5)$ $\quad \overline{SC} = 3(5 - \sqrt{5})$



9

145/10. a) $\frac{a}{xa} = \frac{xa-a}{a} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \tau$, also $\frac{1}{x} = \sigma$

b) $a + ya = xa \Rightarrow y = x - 1 = \tau - 1 = \sigma$

145/11. Nach Aufgabe **8.** teilt der Schnittpunkt von Inkreis und Höhe die Höhe stetig, weil $c = h_c$ ist $\Rightarrow \rho = \sqrt{5} - 1$

145/12. $\overline{QU} = a$, $\overline{MD} = \overline{MP} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,a \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{MP} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$

$\Rightarrow \overline{PQ} : \overline{QU} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

145/13. $s^2 = (1 - s)\cdot 1 \Rightarrow s^2 + s - 1 = 0$, also $s = \sigma = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

Das umbeschriebene Rechteck ist deshalb ein Goldenes Rechteck.

145/14. $\overline{AC} = \overline{CE} = 2a = \overline{CF}$

$\overline{BD} = \overline{BF} = d - a$

$\overline{AD} = \overline{AE} = d$

ΔACE ist gleichschenklig, also ist zu zeigen, dass gilt:

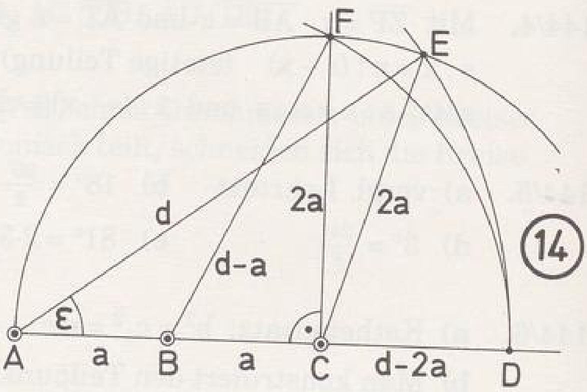
$\frac{d}{2a} = \tau$

Pythagoras in ΔBCF:

$(d - a)^2 = a^2 + 4a^2$

$\Rightarrow d = a(\sqrt{5} + 1)$

$\Rightarrow \frac{d}{2a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \tau \Rightarrow \varepsilon = 36°$

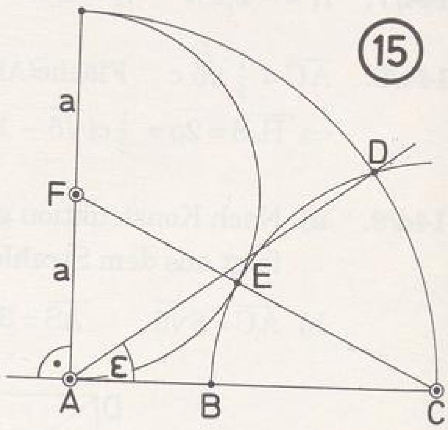


146/15. a) Wegen $\overline{AC} = \overline{AD} = 2a$ ist ΔACD gleichschenklig. Weil B nach Konstruktion [AC] stetig teilt, gilt:

$\overline{BC} = \frac{2a}{2}(\sqrt{5} - 1) = a(\sqrt{5} - 1) = \overline{DC}$

$\overline{AD} : \overline{DC} = (2a) : (a(\sqrt{5} - 1))$

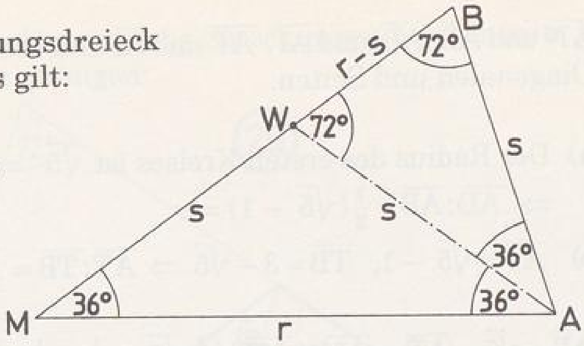
$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \tau \Rightarrow \varepsilon = 36°$



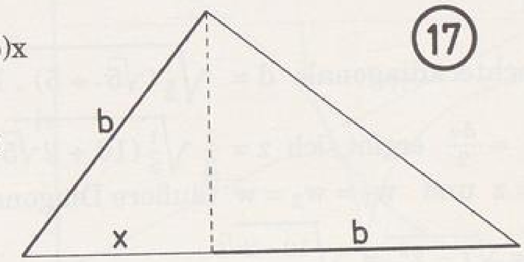
b) Man konstruiert z.B. zuerst ΔACD aus $\overline{AC} = \overline{AD} = 8$ und $\sphericalangle DAC = 36°$, die restlichen beiden Ecken findet man mithilfe der Fünfeckseite $s = \overline{CD}$.

c) Der Mittelpunktswinkel eines Bestimmungsdreiecks ist 36°.

d) Für das Bestimmungsdreieck ABM des Zehnecks gilt:
$\Delta ABM \sim \Delta BWA$
$\overline{AW} = \overline{MW} = \overline{AB} = s$
$\Rightarrow r : s = s : (r - s)$



146/16. $\frac{\overline{AT} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{TB} \cdot h_2}{2}$;
es gilt der Strahlensatz:
$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\overline{CB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AT} + \overline{TB}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} + 1$, daraus folgt:
$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{\overline{AT}/\overline{TB} + 1}$. Mit $\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = x$ gilt also
$x = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$



146/17. Kathetensatz: $b^2 = (x + b)x$
$\Rightarrow \frac{b}{x} = \frac{x}{b} + 1$, mit $\frac{x}{b} =: z$
$\frac{1}{z} = z + 1 \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0$
$\Rightarrow z = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$

146/18. $t = v$ (Mittelparallele), $h = \frac{2v}{2}\sqrt{3} = v\sqrt{3}$, $r = \frac{2v}{3}\sqrt{3}$,
ist M Kreismittelpunkt, N Mittelpunkt von t und R Endpunkt von s auf dem Kreis, so gilt wegen $\overline{MN} = \frac{1}{6}v\sqrt{3}$ nach Pythagoras in ΔMNR:
$(s + \frac{1}{2}v)^2 + (\frac{1}{6}v\sqrt{3})^2 = (\frac{2}{3}v\sqrt{3})^2$
$\Rightarrow s^2 + vs - v^2 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)v \Rightarrow s : t = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$

146/19. Das Fünfeck von Dürer ist nicht regelmäßig. Nachrechnen (mit Trigonometrie) zeigt: $\alpha = \beta \approx 108{,}4°$, $\gamma = \varepsilon \approx 107°$, $d \approx 109{,}2°$

147/20. Mit $a = 2r$ und $\overline{TP} = x$ gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz:
$a^2 = (a + x)x$, also $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x} \Rightarrow \overline{QP} : \overline{QT} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \tau$
Da die Endpunkte der beiden eingezeichneten Durchmesser ein Rechteck bilden (Halbierung der Diagonalen und Thales), gilt:
$QB \parallel TS \Rightarrow \overline{BP} : \overline{BS} = \overline{QP} : \overline{QT} = \tau$ (Strahlensatz)

147/21. $\overline{AN}$ und $\overline{AB}$, $\overline{AB}$ und $\overline{AI}$, $\overline{AT}$ und $\overline{AI}$ und ebenso bei den übrigen Diagonalen und Seiten.

147/22. a) Der Radius des ersten Kreises ist $\sqrt{5} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{5} - 1$

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{AB} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$

b) $\overline{AT} = \sqrt{5} - 1, \ \overline{TB} = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow \overline{AT}:\overline{TB} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \tau$

147/23. $\overline{AB} = \sqrt{5}, \ \overline{AT} = \overline{AM} + \overline{MT} = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \tau$

$\overline{TB} = \sqrt{5} - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$

147/24. $r = \sqrt{5}, \ \overline{AD} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \ \overline{AB} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{30 - 10\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$$

147/25. Das Trapez ist Teilfigur eines regelmäßigen Fünfecks $\Rightarrow \frac{l}{k} = \tau$.

147/26. Rechteckdiagonale $d = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 5)}$. Mithilfe der Flächenberechnung $\frac{\tau \cdot 1}{2} = \frac{d \cdot z}{2}$ ergibt sich $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}(10 + 2\sqrt{5})}$. Aus Symmetriegründen folgt: $x = z$ und $w_1 = w_2 = w$ (äußere Diagonalenabschnitte):

$$w = \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{20}}$$

$$y = d - 2w = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 5)} - 2\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{20}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 \cdot \frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} = z$$

148/27. Wegen $\frac{\tau + 1}{\tau} = \frac{\tau^2}{\tau} = \tau$ sind ACNL, BDEM, BCNM, usw.

Goldene Rechtecke.

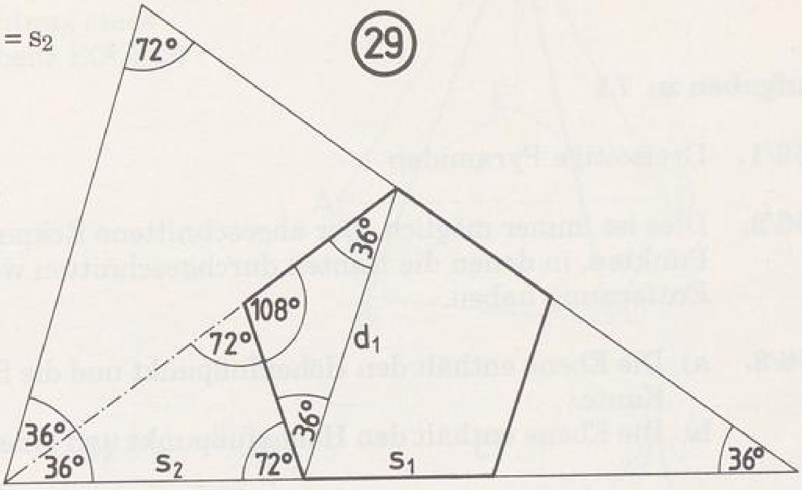
148/28. Die kürzere Parallelogrammseite sei s, die längere $s + x$.
Dann gilt wegen der Ähnlichkeit:

$(s + x) : s = s : x \Rightarrow (s + x) : s = \tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$

148/29. Die Figur entsteht durch zentrische Streckungen am Zentrum Z.
Es ergeben sich die Beziehungen:

$\frac{d_1}{s_1} = \tau$ und $d_1 = s_2$

$\Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \tau.$



148/30. a) $h = \sigma b \approx 14{,}5\text{m}$

b) Pythagoras in ΔABE:

$$(h+R)^2 = b^2 + R^2$$

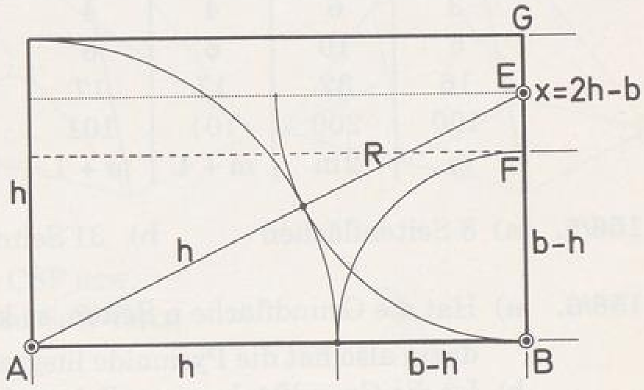
$$\Rightarrow R = \frac{b^2 - h^2}{2h}$$

$$\overline{EF} = \frac{b^2 - h^2}{2h} - (b-h)$$

$$= \frac{h}{2} + \frac{b^2}{2h} - b$$

$$= \frac{\sigma b}{2} + \frac{b^2}{2\sigma h} - b$$

$$= b \cdot \frac{2\sigma - 1}{2}$$



wegen $h = \sigma b$ und $\frac{1}{\sigma} = \sigma + 1$

wegen $\frac{1}{2}x = h - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b(2\sigma - 1)$ ist E also Mittelpunkt von [FG].