Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1999

7. Kapitel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83422

7.Kapitel

Aufgaben zu 7.1

156/1. Dreiseitige Pyramiden

156/2. Dies ist immer möglich. Der abgeschnittene Eckpunkt muss von den Punkten, in denen die Kanten durchgeschnitten werden, gleiche Entfernung haben.

156/3. **a)** Die Ebene enthält den Höhenfußpunkt und die Spitze, aber keine Kante.
b) Die Ebene enthält den Höhenfußpunkt und eine einzige Kante.

156/4.

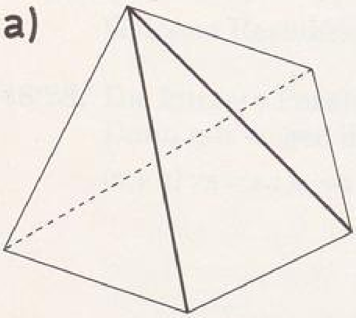
n	k	e	f
3	6	4	4
5	10	6	6
16	32	17	17
100	200	101	101
m	2m	m + 1	m + 1

156/5. **a)** 8 Seitenflächen **b)** 31 Seitenflächen **c)** 96 Kanten

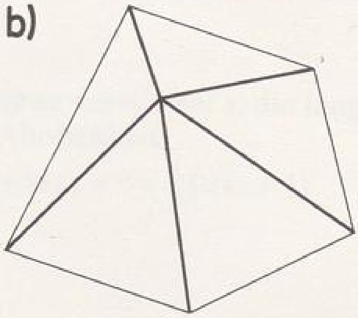
156/6. **a)** Hat die Grundfläche n Seiten, so kommen noch $\frac{2n}{2}$ Seitenkanten dazu, also hat die Pyramide insgesamt 2n Kanten.
b) Ist die Grundfläche ein n-Eck, so hat die Pyramide n+1 Ecken. Weil zur Grundfläche noch n Seitenflächen-Dreiecke dazukommen, hat die Pyramide n+1 Flächen.

156/7.

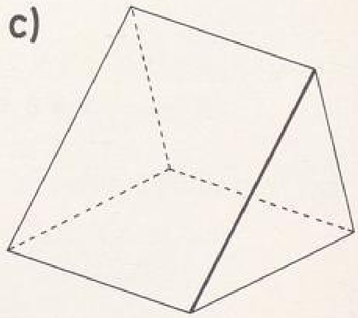
a)



b)

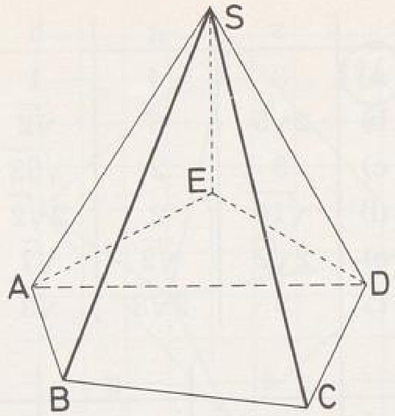


c)

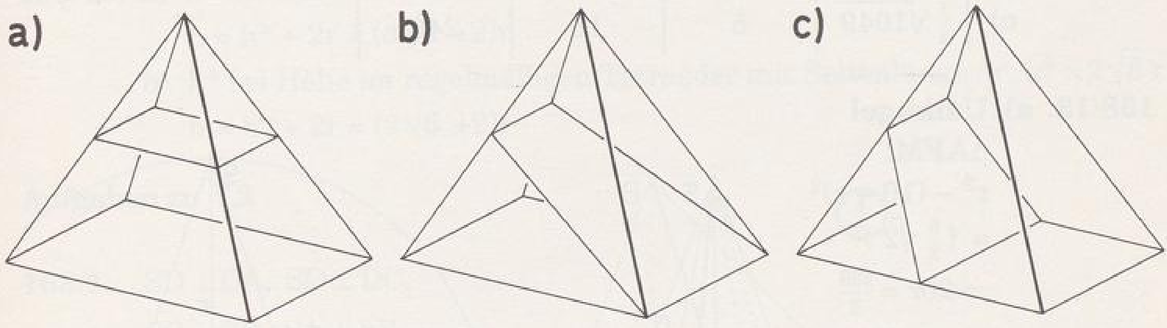


156/8. **a)** z.B. in Richtung der Höhe

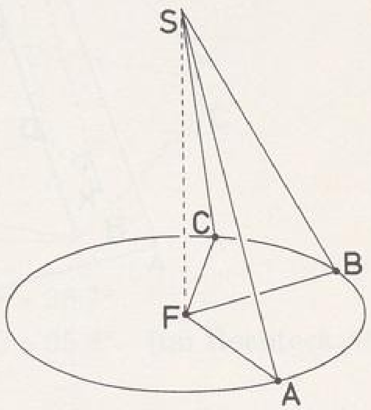
b) z.B. in Richtung eines
Lots der Ebene E(A,D,S)



156/9.



157/10. **a)** Die Dreiecke ASF, BSF, CSF usw.
sind kongruent nach dem SsW-Satz,
$\Rightarrow \overline{FA} = \overline{FB} = \overline{FC} = \ldots$
$\Rightarrow$ F ist Umkreismittelpunkt.



b) Aus $\overline{SM} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106}$
und $\overline{SU} = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97}$ folgt:
Die Pyramide ist nicht gerade.

c) Weil der Höhenfußpunkt außerhalb der Grundfläche liegt,
sieht die gerade Pyramide MIES nicht gerade gerade aus.

157/11.

	s	g	h	M
a)	3	4	1	$8\sqrt{5}$
b)	$2\sqrt{5}$	6	$\sqrt{2}$	$12\sqrt{11}$
c)	8	2	$\sqrt{62}$	$12\sqrt{7}$
d)	$\sqrt{10}$	2	$2\sqrt{2}$	12
e)	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{15}$
f)	3	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$12\sqrt{2}$

158/12.

	s	g	h	M
a)	10	6	8	$18\sqrt{91}$
b)	6	3,6	4,8	$\frac{162}{25}\sqrt{91}$
c)	$\frac{1}{2}\sqrt{1049}$	5	16	240

158/13. a) Umkugel

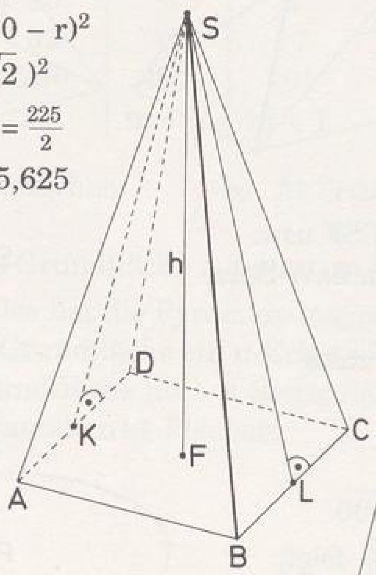
ΔAFM:

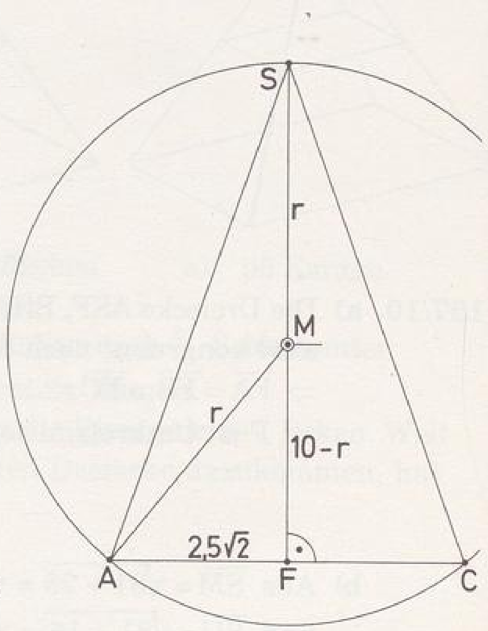
$r^2 - (10 - r)^2$

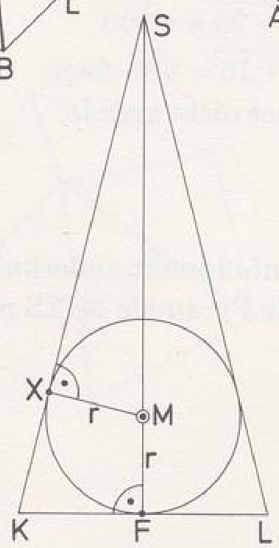
$= (\frac{5}{2}\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow 20r = \frac{225}{2}$

$\Rightarrow r = 5{,}625$







Inkugel

$\Delta XMS \sim \Delta FSK$:

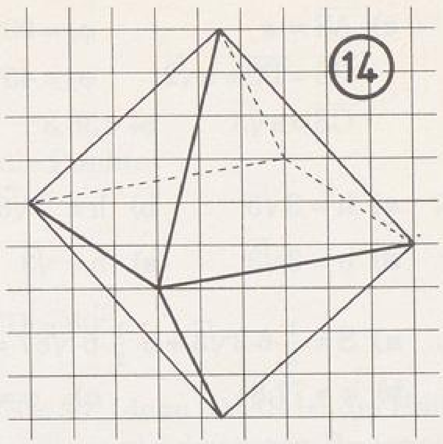
$\Rightarrow \frac{r}{\overline{MS}} = \frac{g}{2 \cdot \overline{KS}}$

$\Rightarrow \frac{r}{10 - r} = \frac{5}{2\sqrt{106{,}25}}$

$\Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{17} + 1}$

$\Rightarrow r = \frac{5}{8}(\sqrt{17} - 1)$

b) ähnlich wie in a) ergibt sich:
Umkugel $r = \frac{17}{8}a$
Inkugel: $r = \frac{1}{16}(\sqrt{201} - 3)a$



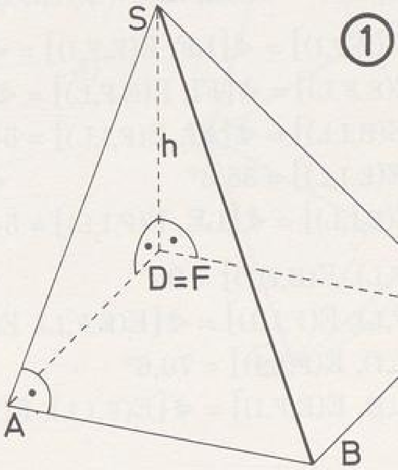
158/14. a) Oktaeder

b) $S = 50\sqrt{3}$

c) $\overline{S_1S_2} = 5\sqrt{2}$

159/15. a) h^* sei Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 6r: $h^* = 3\sqrt{3}\,r$
$h = h^* + 2r = (3\sqrt{3} + 2)r$
b) h^* sei Höhe im regelmäßigen Tetraeder mit Seitenlänge 6r: $h^* = 2\sqrt{6}\,r$
$h = h^* + 2r = (2\sqrt{6} + 2)r$

Aufgaben zu 7.2



163/1. $SD \perp DA$, $SD \perp DC$,
$SC \perp CB$, $SA \perp AB$
$E(A,D,S) \perp E(A,B,C)$
$E(D,C,S) \perp E(A,B,C)$
$E(A,D,S) \perp E(D,C,S)$
$E(B,C,S) \perp E(C,S,D)$
$E(A,B,S) \perp E(A,D,S)$

163/2. a) Kantenwinkel: $\sphericalangle UFS \approx 76{,}7°$ $\sphericalangle USF \approx 26{,}7°$
$\sphericalangle CUS \approx 72{,}1°$ $\sphericalangle USC \approx 35{,}8°$ (im Rechteck: 90°)
b) $\varphi \approx 67{,}4°$
c) $\sphericalangle[E(U,C,S), E(F,U,C)] \approx 76°$ $\sphericalangle[E(F,U,S), E(F,U,C)] \approx 71{,}6°$

163/3. a) $\varphi \approx 54{,}7°$ b) $\varphi = 45°$ c) $\varphi \approx 31{,}7°$

163/4. a) $\varphi \approx 70{,}5°$ b) $\varphi \approx 109{,}5°$ c) $\varphi \approx 138{,}2°$

164/5. a) $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$ $\varphi \approx 54{,}7°$
b) $\overline{AS} = \overline{BS} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ $\varphi_1 \approx 63{,}4°$
$\overline{CS} = \overline{DS} = \frac{3}{2}a$ $\varphi_2 \approx 41{,}8°$

c) $\overline{AS} = a$ $\varphi_1 = 90°$

$\overline{BS} = \overline{DS} = a\sqrt{2}$ $\varphi_2 = 45°$

$\overline{CS} = a\sqrt{3}$ $\varphi_3 \approx 35{,}3°$

164/6. a) $h = 3\sqrt{3}$ b) $h = \frac{3}{2}\sqrt{6}$ c) $h = 3$

d) $h = 3\sqrt{3}$ e) $h = \sqrt{3}$ f) $h = 3$

164/7. a) $S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{67} = 9\sqrt{3} + 9\sqrt{67} = 9(\sqrt{3} + \sqrt{67})$

b) $\varphi \approx 77{,}8°$ c) $\varphi \approx 57{,}8°$

164/8. a) $\overline{EF} = 10$, $\overline{EF} = \overline{LF} = \overline{EI} = \overline{FI} = \overline{LI} = 5\sqrt{2}$

b) ΔLMI ist gleichschenklig-rechtwinklig; $d(M;LI) = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

c) $\sphericalangle(EI, FI) = \sphericalangle(EL, LF) = 90°$ $\sphericalangle(EL, EF) = \sphericalangle(EF, FL) = 45°$

$\sphericalangle(LF, FI) = \sphericalangle(FI, IL) = \sphericalangle(IL, LF) =$

$= \sphericalangle(EI, EL) = \sphericalangle(EL, LD) = \sphericalangle(LI, IE) = 60°$

d) $\sphericalangle[EL, E(E,F,I)] = \sphericalangle[LF, E(E,F,I)] = \sphericalangle[IL, E(E,F,I)] = 45°$

$\sphericalangle[EI, E(E,F,L)] = \sphericalangle[FI, E(E,F,L)] = \sphericalangle[IL, E(E,F,L)] = 45°$

$\sphericalangle[LF, E(E,I,L)] = \sphericalangle[FI, E(F,I,L)] \approx 54{,}7°$

$\sphericalangle[EF, E(E,I,L)] \approx 35{,}3°$ $\sphericalangle[EF, E(F,I,L)] \approx 35{,}3°$

$\sphericalangle[EI, E(F,I,L)] = \sphericalangle[LE, E(F,I,L)] \approx 54{,}7°$

e) $\sphericalangle[E(E,F,L), E(E,F,I)] = 90°$

$\sphericalangle[E(E,F,L), E(F,L,I)] = \sphericalangle[E(E,F,L), E(E,L,I)] \approx 54{,}7°$

$\sphericalangle[E(E,L,I), E(F,L,I)] \approx 70{,}6°$

$\sphericalangle[E(E,L,I), E(E,F,I)] = \sphericalangle[E(F,I,L), E(E,F,I)] \approx 54{,}7°$

164/9. a) Die Grundfläche der Pyramide ist das Quadrat EFGH, die Höhe ist [FB].

b) $\sphericalangle(FB, FG) = \sphericalangle(FB, FE) = 90°$ $\sphericalangle(FG, GB) = 45°$

$\sphericalangle(GH, GB) = 90°$ $\sphericalangle(HG, HB) \approx 54{,}7°$ $\sphericalangle(HE, HB) \approx 54{,}7°$

$\sphericalangle(EH, EB) = 90°$ $\sphericalangle(FE, EB) = 45°$

d) $\sphericalangle[E(F,G,E), E(F,G,B)] = \sphericalangle[E(F,G,E), E(F,E,B)] = 90°$

$\sphericalangle[E(F,G,E), E(H,E,B)] = \sphericalangle[E(F,G,E), E(G,H,B)] = 45°$

e) $\sphericalangle[E(F,B,G), E(F,B,E)] = \sphericalangle[E(F,E,B), E(H,E,B)] = 90°$

$\sphericalangle[E(H,E,B), E(H,G,B)] = 60°$

$\sphericalangle[E(H,G,B), E(G,F,B)] = 90°$

$\sphericalangle[E(G,F,B), E(H,E,B)] = \sphericalangle[E(F,E,B), E(G,H,B)] = 45°$

Aufgaben zu 7.3

167/1. Netze liegen vor in **b)**, **e)**, **g)** und **h)**.

167/2. **a)** Es ergeben sich näherungsweise die Punkte:
$S_2(19|7)$, $S_3(11|24)$, $S_4(1|21)$

b) $h \approx 6{,}3$

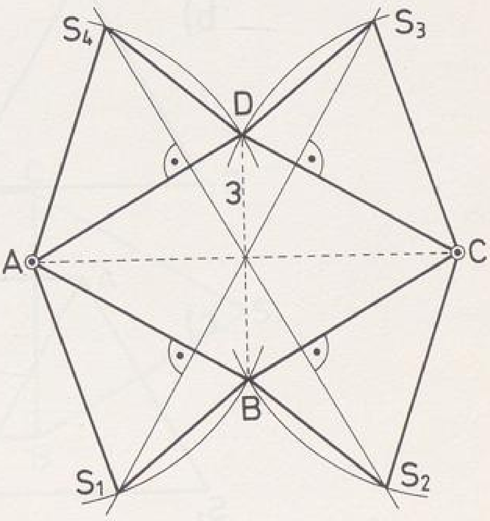
168/3. **a)** Wegen $\overline{BD} = 6$ gilt: $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD = 60°$
$\Rightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle CDA = 120°$

b) $\overline{AS} = \overline{CS} = 6 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle MAS = \measuredangle MCS = 30°$ (denn ΔMAS ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks)

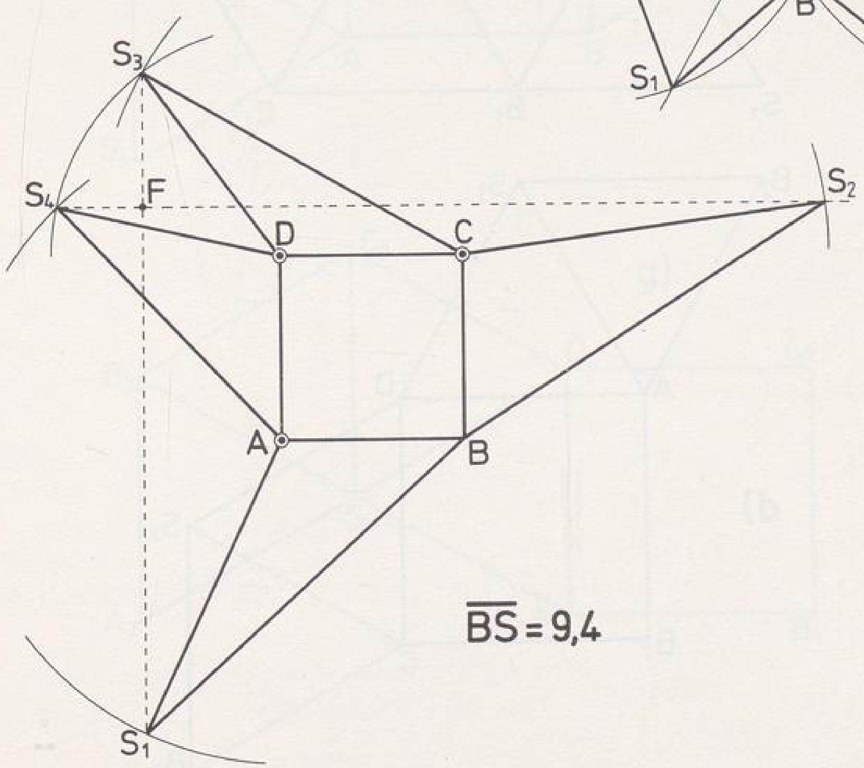
$\overline{BS} = \overline{DS} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \measuredangle MBS = \measuredangle MDS = 45°$ (denn ΔMBS ist gleichschenklig-rechtwinklig)

c) $S = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{14}$
$= 18\sqrt{3} + 18\sqrt{7} = 18(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

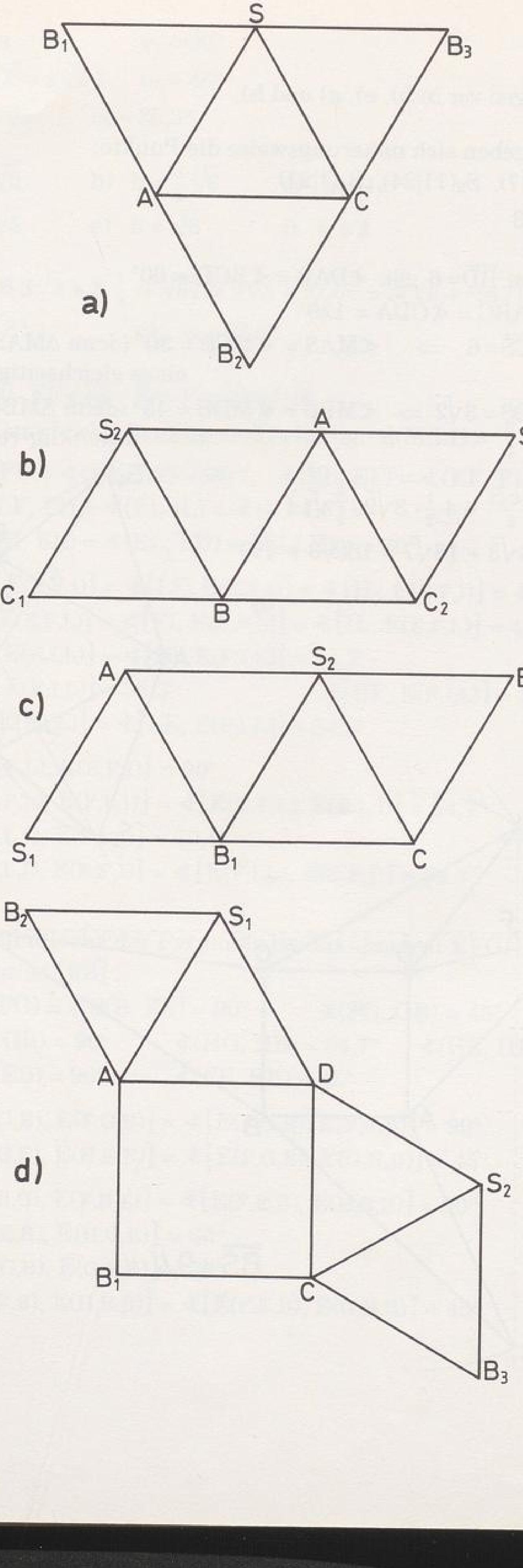
d)



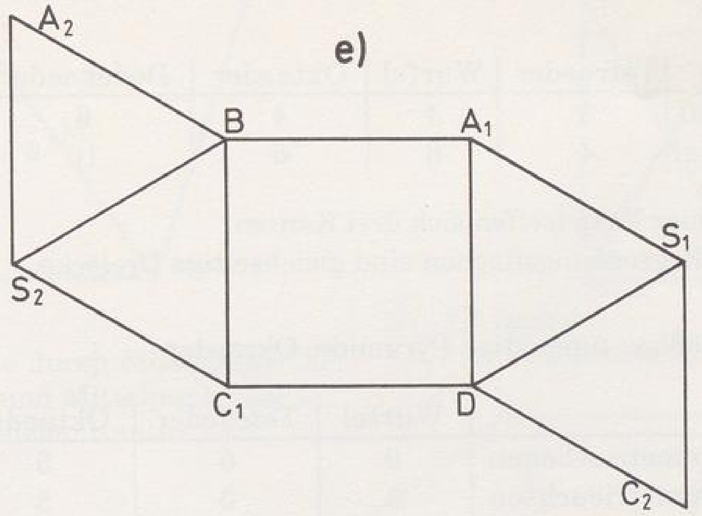
168/4.

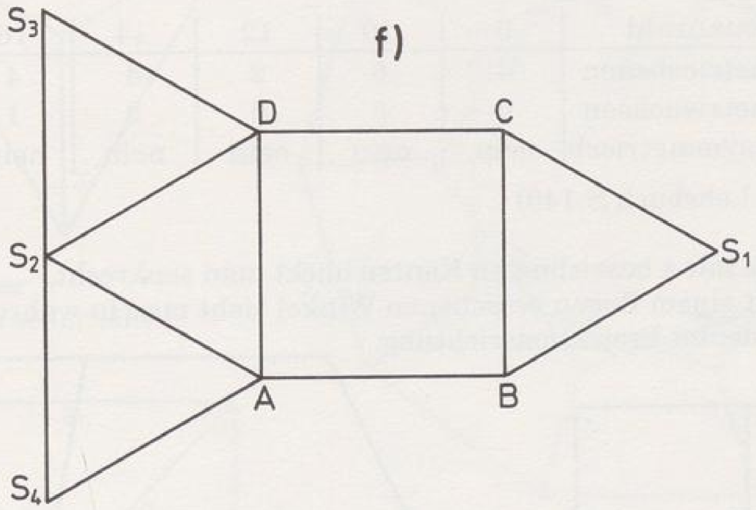


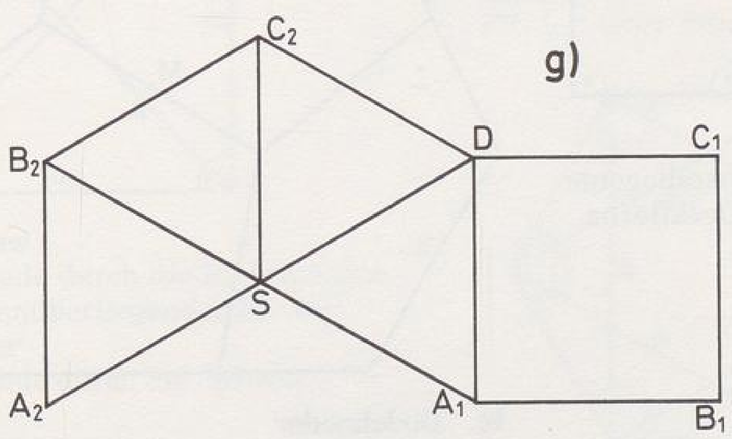
168/5.



168/5.







Aufgaben zu 7.4

177/1.

	Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
minimal	3	4	4	6	6
maximal	4	6	6	10	10

177/2. **a)** In einer Ecke treffen sich drei Kanten.
b) Die Begrenzungsflächen sind gleichseitige Dreiecke.

177/3. Regelmäßige, fünfseitige Pyramide, Oktaeder

177/4. **a)**

	Würfel	Tetraeder	Oktaeder
Symmetrieebenen	9	6	5
Symmetrieachsen	3	0	5

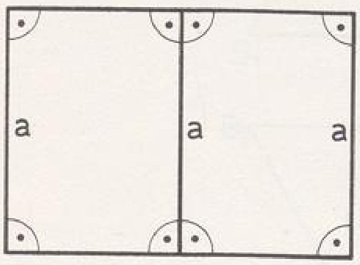
b) Bis aufs Tetraeder sind alle Platonischen Körper punktsymmetrisch.

177/5.

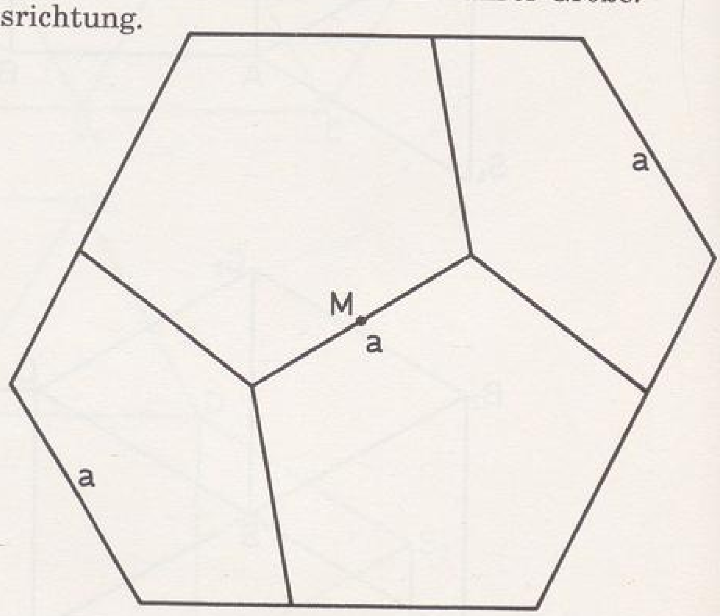
Flächenanzahl	6	10	12	14	16
Symmetrieebenen	4	6	2	4	4
Symmetrieachsen	0	5	0	3	1
punktsymmetrisch	nein	nein	nein	nein	nein

(vergl.Lehrbuch S.140)

177/6. Auf die mit a bezeichneten Kanten blickt man senkrecht, die mit einem Bogen versehenen Winkel sieht man in wahrer Größe. PR bedeutet Projektionsrichtung.

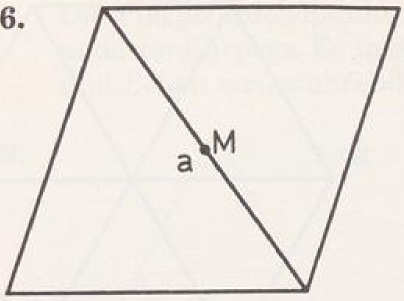


a) **Würfel**
PR: Flächendiagonle der Deckfläche

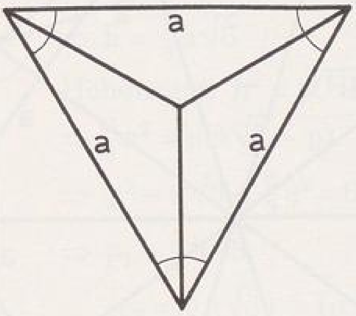


b) **Dodekaeder**
PR: Gerade durch Mittelpunkt M von a und Mittelpunkt der zu a parallelen Kante

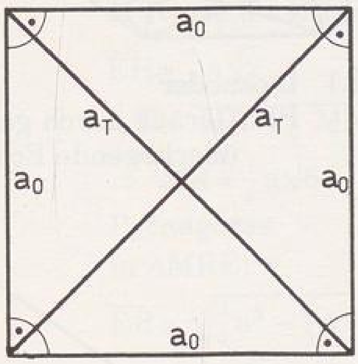
177/6.



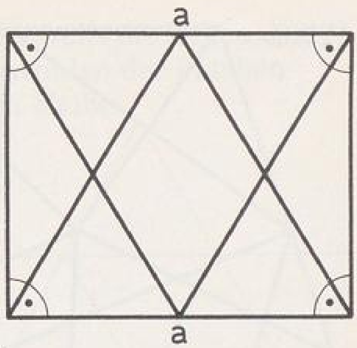
c) Oktaeder
PR: Gerade durch Mittelpunkt M von a und Mittelpunkt der zu a parallelen Kante



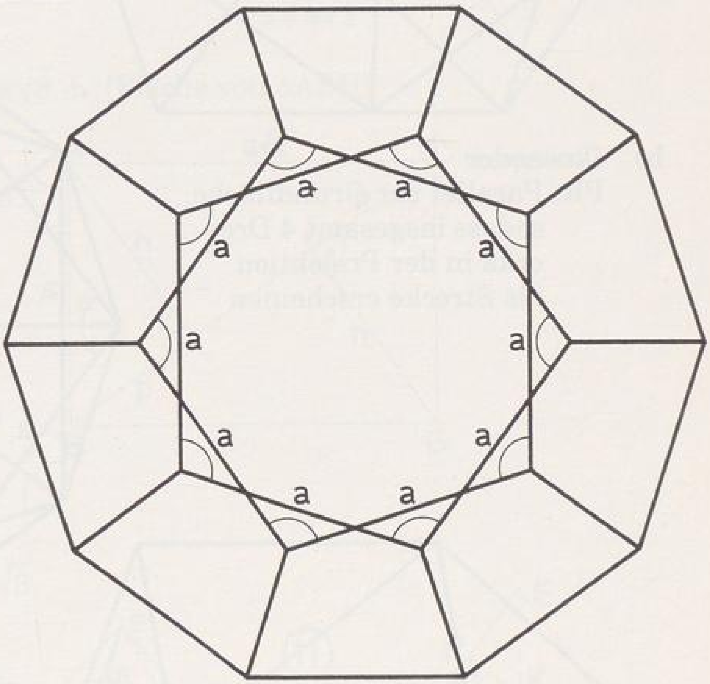
d) Tetraeder
PR: Tetraederhöhe



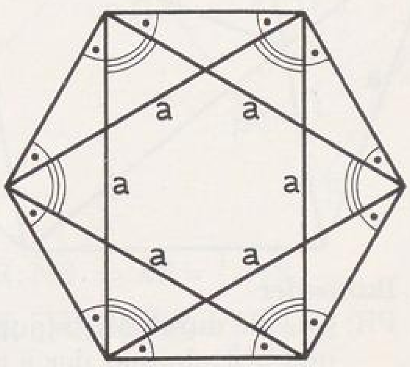
i) Tetraeder
PR: Gerade durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten
Oktaeder
PR: Gerade durch die Spitzen



e) Oktaeder
PR: Höhe eines Seitenflächendreiecks

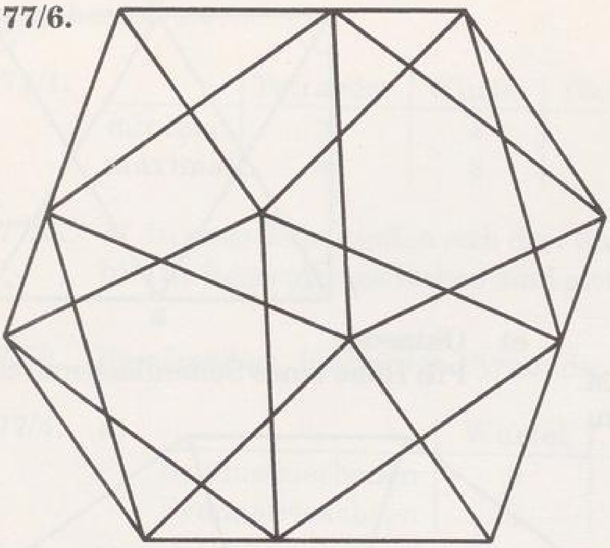


f) Dodekaeder
PR: Lot einer Fünfeckebene

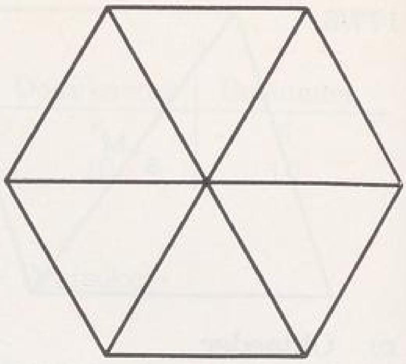


g) Oktaeder
PR: Lot einer Dreieckebene

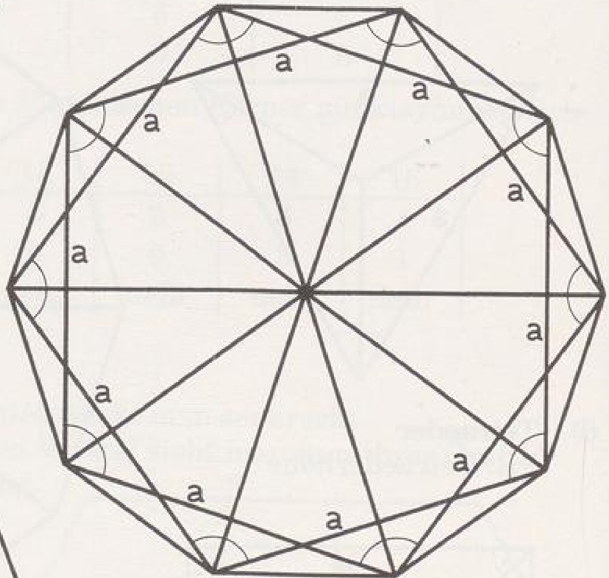
177/6.



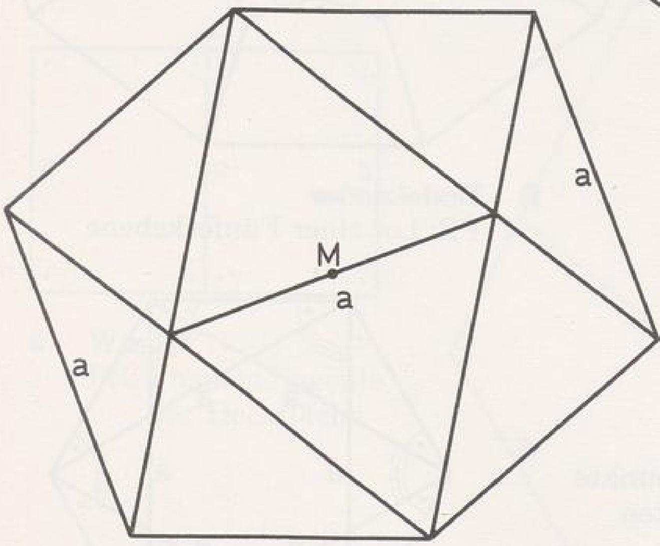
h) Ikosaeder
PR: Parallel zur Grundfläche, sodass insgesamt 4 Dreiecke in der Projektion als Strecke erscheinen



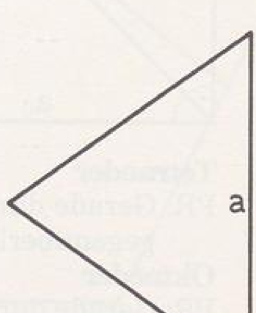
j) Würfel
PR: Raumdiagonale



k) Ikosaeder
PR: Gerade durch gegenüberliegende Ecken



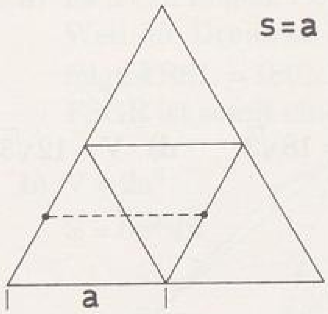
m) Ikosaeder
PR: Gerade durch Mittelpunkt M von a und Mittelpunkt der a gegenüberliegenden Kante



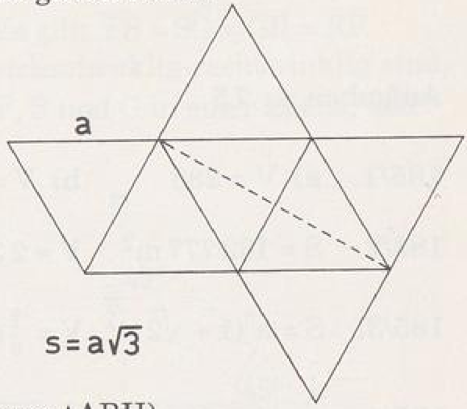
l) Tetraeder
PR: Kante

178/7. Die Flächenmittelpunkte des einen Körpers sind jeweils die Ecken des anderen Körpers. Es tauschen sich jeweils die Anzahlen der Flächen und Ecken aus, während die Kantenanzahl gleich bleibt.

178/8.



178/9.



178/10. $\overline{HB} = a\sqrt{3}$, $\quad \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot h$ (Fläche von ΔABH)

$\Rightarrow h = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$

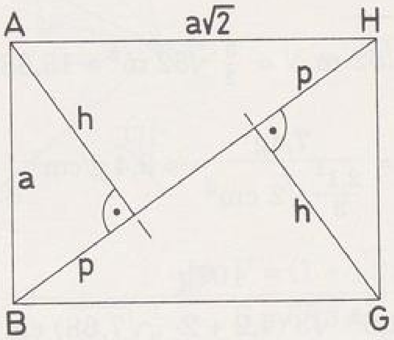
Höhensatz: $h^2 = p(\overline{HB} - p)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}a^2 = p(a\sqrt{3} - p)$

$\Rightarrow p^2 - a\sqrt{3} + \frac{2}{3}a^2 = 0$

$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$

$(p_2 = \frac{2}{3}a\sqrt{3})$ $\quad (p < a!)$



178/11. a) N ist Mitte von [DC]

$\overline{MN} = a$, $h = \overline{EN} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

$\overline{EH} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\overline{EN} \cdot \overline{MR} = \frac{1}{2}\overline{MN} \cdot \overline{EH}$

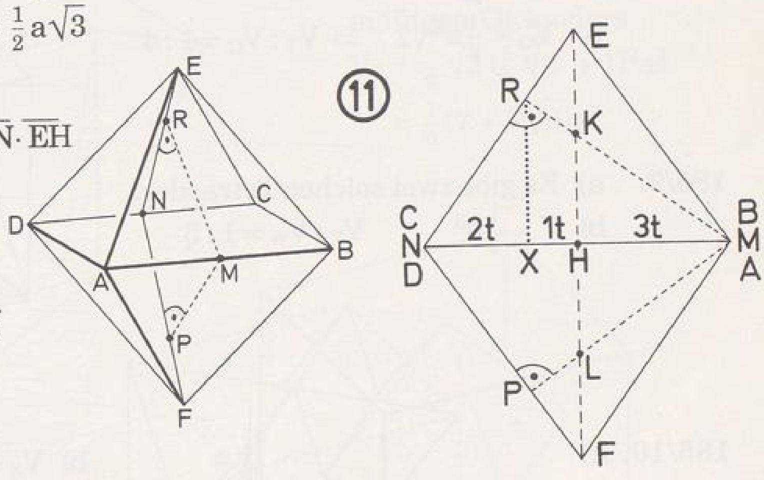
$\Rightarrow \overline{MR} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$

Pythagoras in ΔMRE:

$\overline{ER} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{3}a^2}$

$= \frac{1}{6}a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{ER} = \frac{1}{3}\overline{EN}$



b) Strahlensatz in ΔHNE: $\overline{XR} : \overline{HE} = \overline{NR} : \overline{NE} \Rightarrow \overline{XR} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$

Strahlensatz in ΔMXR: $\overline{HK} : \overline{MH} = \overline{XR} : \overline{MX} \Rightarrow \overline{HK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overline{HK} = \frac{1}{4}a\sqrt{2} \Rightarrow \overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{EF}$

179/12. a) $S = a^2\sqrt{3}$ b) $h = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$ c) $r = \frac{1}{4}a\sqrt{6}$

d) $r = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$ e) $r = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$ f) $d = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

Aufgaben zu 7.5

185/1. a) $V = 288$ b) $V = 4320$ c) $V = 18\sqrt{3}$ d) $V = 12\sqrt{3}$

185/2. $S \approx 132\,777\ \mathrm{m}^2$ $V \approx 2\,363\,535\ \mathrm{m}^3$

185/3. $S = a^2(1 + \sqrt{2})$ $V = \frac{1}{6}a^3$

185/4. $a = 2\mathrm{m}$ $h_s = \frac{1}{2}\sqrt{13}\ \mathrm{m}$ $M = 2\sqrt{13}\ \mathrm{m}^2 \approx 7{,}2\mathrm{m}^2$

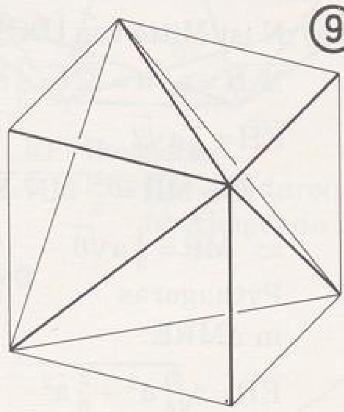
185/5. $h = \frac{1}{2}\sqrt{82}\ \mathrm{m}$ $V = \frac{3}{2}\sqrt{82}\ \mathrm{m}^3 \approx 13{,}58\mathrm{m}^3$

185/6. $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{7{,}4\mathrm{g}}{\frac{2{,}1^3}{3}\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3} \approx \cancel{3{,}4}\ 11{,}7\ \mathrm{g/cm}^3$

185/7. $\rho = \dfrac{107\mathrm{g}}{\frac{3}{2}\cdot 1{,}6^2\cdot\sqrt{3}\,(4{,}2 + 2\cdot\frac{1}{3}\sqrt{7{,}68})\ \mathrm{cm}^3} \approx 2{,}7\ \mathrm{g/cm}^3$

185/8. a) $V_T = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$

b) $V_O = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2} \Rightarrow V_T : V_O = 1 : 4$

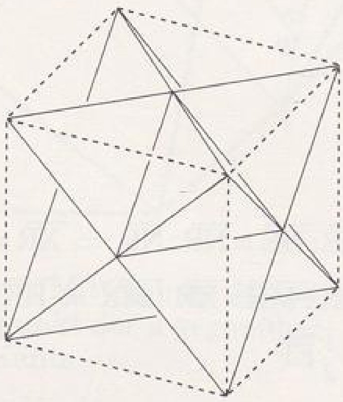


9

185/9. a) Es gibt zwei solcher Tetraeder.

b) $V = \frac{1}{3}a^3$ $V_T : V_W = 1 : 3$

185/10. a)



b) $V_S = a^3 - 12\cdot\frac{1}{3}\cdot\dfrac{a\cdot\frac{a}{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^3$

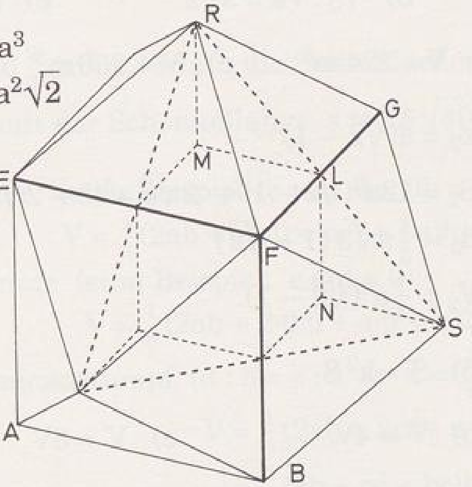
$V_S : V_W = 1 : 2$

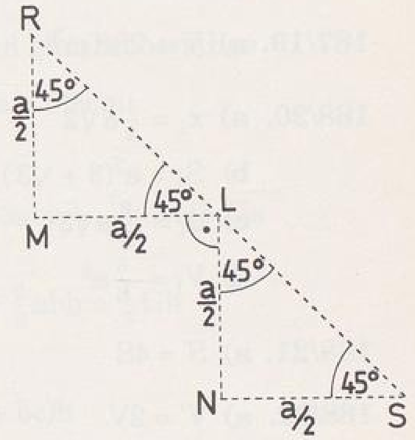
186/11. a) 87,5%

b) $h_{oben}{}^3 = \frac{1}{2}h^3 \Rightarrow h_{oben} \approx 0{,}794h \Rightarrow h_{unten} \approx 20{,}6\% \cdot h \approx 30{,}3m$

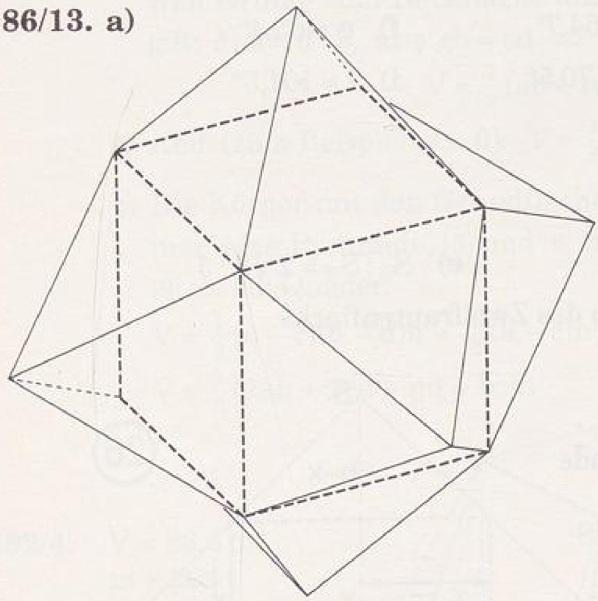
186/12. a) Es ist zu zeigen: FSGR ist eine Raute.Es gilt: $\overline{FS} = \overline{SG} = \overline{GR} = \overline{RF}$.
Weil die Dreiecke MLR und NSL gleichschenklig-rechtwinklig sind, folgt: $\sphericalangle RSL = 180°$. Deshalb liegen R, F, S und G in einer Ebene, und FSGR ist somit eine Raute.

b) $V = 2a^3$
$S = 6a^2\sqrt{2}$





186/13. a)

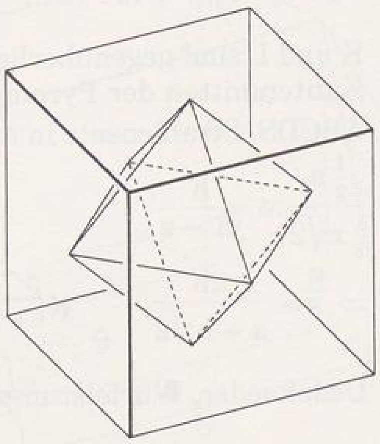


b) $V = (1 + \sqrt{2})a^3$
$S = 6\sqrt{3}\ a^2$

c) die Pyramidenspitzen sind die Ecken eines regel–mäßigen Oktaeders
$V_O = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1)^3 a^3$
$= \frac{1}{6}(7 + 5\sqrt{2})a^3$

186/14. b) $V_O = \frac{1}{6}a^3$
$V_O : V_W = 1 : 6$

a)



187/15. **a)** $V_O : V_T = 1 : 2$ **b)** $S_O : S_T = 1 : 2$

187/16. **a)** $V_K : V_G = 1 : 27$ **b)** $S_K : S_G = 1 : 9$

187/17. **a)** Würfelstumpf **b)** $V_O : V_{WS} = 8 : 5$

c) $S_O : S_{WS} = 4\sqrt{3} : (3 + \sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} - 1) : 1$

187/18. **a)** Würfel **b)** $V_O : V_W = 9 : 2$ **c)** $S_O : S_W = 3\sqrt{3} : 2$

187/19. **a)** $V = 288\,m^3$ **b)** $V = 224\,m^3$ **c)** $V = 256\,m^3$ **d)** $V = 192m^3$

188/20. **a)** $x_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ $x_2 = a(\sqrt{2} - 1)$

b) $S_1 = a^2(3 + \sqrt{3})$ $S_2 = 12a^2(\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{3}\,a^2(3 - 2\sqrt{2})$

c) $d_1 = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$ $d_2 = \frac{1}{3}a\sqrt{3}\,(1 + \sqrt{2})$

d) $V_1 = \frac{5}{6}a^3$ $V_2 = \frac{7}{3}a^3(\sqrt{2} - 1)$

188/21. **a)** $S' = 4S$ **b)** $S' = k^2 S$

188/22. **a)** $V' = 2V$ **b)** $V' = 4V$ **c)** $V' = 8V$

188/23. **a)** $h = a$ **b)** $V = \frac{1}{3}a^3$ **c)** $S = a^2(1 + \sqrt{5})$

d) $\delta \approx 65{,}9°$ **e)** $\varepsilon \approx 54{,}7°$ **f)** $\varphi \approx 63{,}4°$

g) $\gamma \approx 48{,}2°$ **h)** $\eta \approx 70{,}5°$ **i)** $\iota \approx 101{,}5°$

k) $\kappa \approx 53{,}1°$

189/24. **a)** $S = 3a^2(1 + \sqrt{3})$ $V = \frac{3}{2}a^3$

b) $V_O : V_W = 4 : 3$ **c)** $S_O : S_W = 2\sqrt{3} : 3$

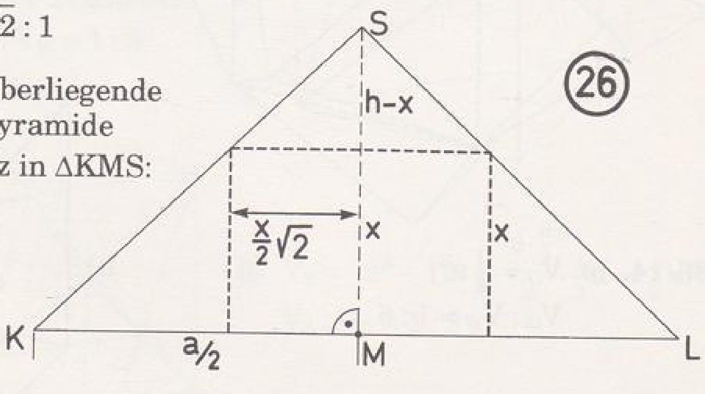
d) Die 14 Spitzen sind Ecken des Zwölfrautenflachs.

189/25. $V_W : V_O : V_T = \sqrt{\sqrt{3}} : \sqrt{2} : 1$

189/26. K und L sind gegenüberliegende Kantenmitten der Pyramide ABCDS. Strahlensatz in ΔKMS:

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}x\sqrt{2}} = \frac{h}{h - x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ah}{a + h\sqrt{2}}$$



189/27. Dodekaeder, Würfelstumpf 3 (Lehrbuch S.138)

Aufgaben zu 7.6

191/1.

G	D	h	V
22,5	2,5	24	260
16	9	6	74
12	3	7	49
27	3	10	130

191/2. $V = 37\,916\,\frac{2}{3}\,\text{cm}^3 \approx 38\,\text{dm}^3$; die Seitenflächen sind gleichschenklige Trapeze mit der Schenkellänge $s = 2{,}5\sqrt{402}\,\text{cm} \approx 50\,\text{cm}$.

191/3. **a)** Prisma (zum Beispiel: $c = a,\ d = 0$):

$$V = \frac{1}{6}(2ab + 2a\cdot 0 + a\cdot 0 + ba)h = \frac{1}{6}\cdot 3abh = \frac{1}{2}h\cdot b\cdot a = Ga$$

Pyramide (zum Beispiel: $c = d = 0$):

$$V = \frac{1}{6}(2ab + 2\cdot 0\cdot 0 + a\cdot 0 + b\cdot 0)h = \frac{2}{6}abh = \frac{1}{3}Gh$$

Pyramidenstumpf ($d : b = c : a \Rightarrow d = \frac{cb}{a}$):

$$V = \frac{1}{6}(2ab + 2cd + a\cdot\frac{cb}{a} + bc)h$$
$$= \frac{1}{3}(ab + cd + bc)h = \frac{1}{3}(ab + cd + \sqrt{bc\cdot bc}\,)h,$$

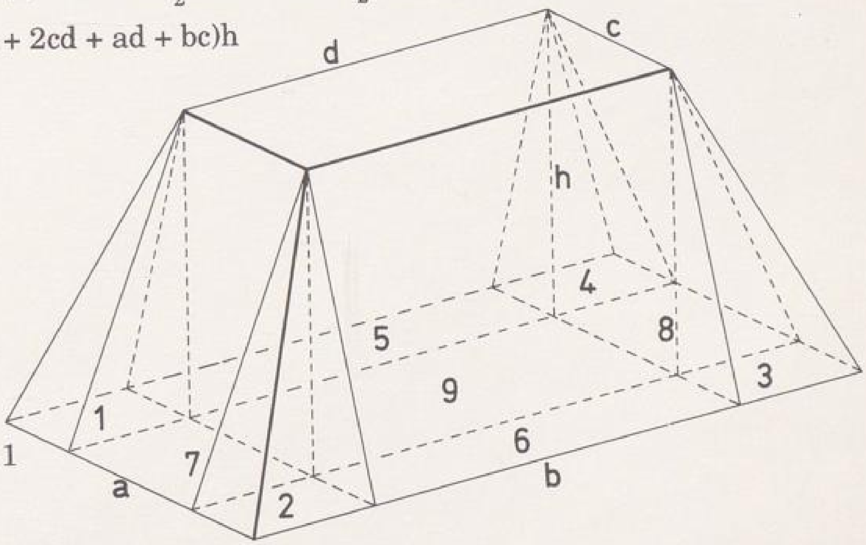
weil Grund- und Deckfläche ähnliche Rechtecke sind, gilt: $c : a = d : b$, also $cb = ad \Rightarrow$

$$V = \frac{1}{3}(ab + cd + \sqrt{ad\cdot bc}\,)h = \frac{1}{3}(G + D + \sqrt{DG})h$$

b) Keil (zum Beispiel $d = 0$): $V = \frac{1}{6}(2ab + bc)h = \frac{1}{6}(2a + c)hb$

c) Die Körper mit den Grundflächen $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ und $\boxed{4}$ ergeben zusammen eine Pyramide, $\boxed{5}$ und $\boxed{6}$ ergeben ein Prisma, ebenso $\boxed{7}$ und $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ ist ein Quader:

$$V = \frac{1}{3}(a - c)(b - d)h + \frac{1}{2}(a - c)hd + \frac{1}{2}(b - d)hc + cdh$$
$$V = \frac{1}{6}(2ab + 2cd + ad + bc)h$$



192/4. $V = 83{,}6\,\text{m}^3$
$m \approx 224\,\text{t}$

192/5. **a)** $V' = 130$
$V = 126\,\frac{2}{3}$
b) $G : D = 1 : 1$