Anschauliche Geometrie

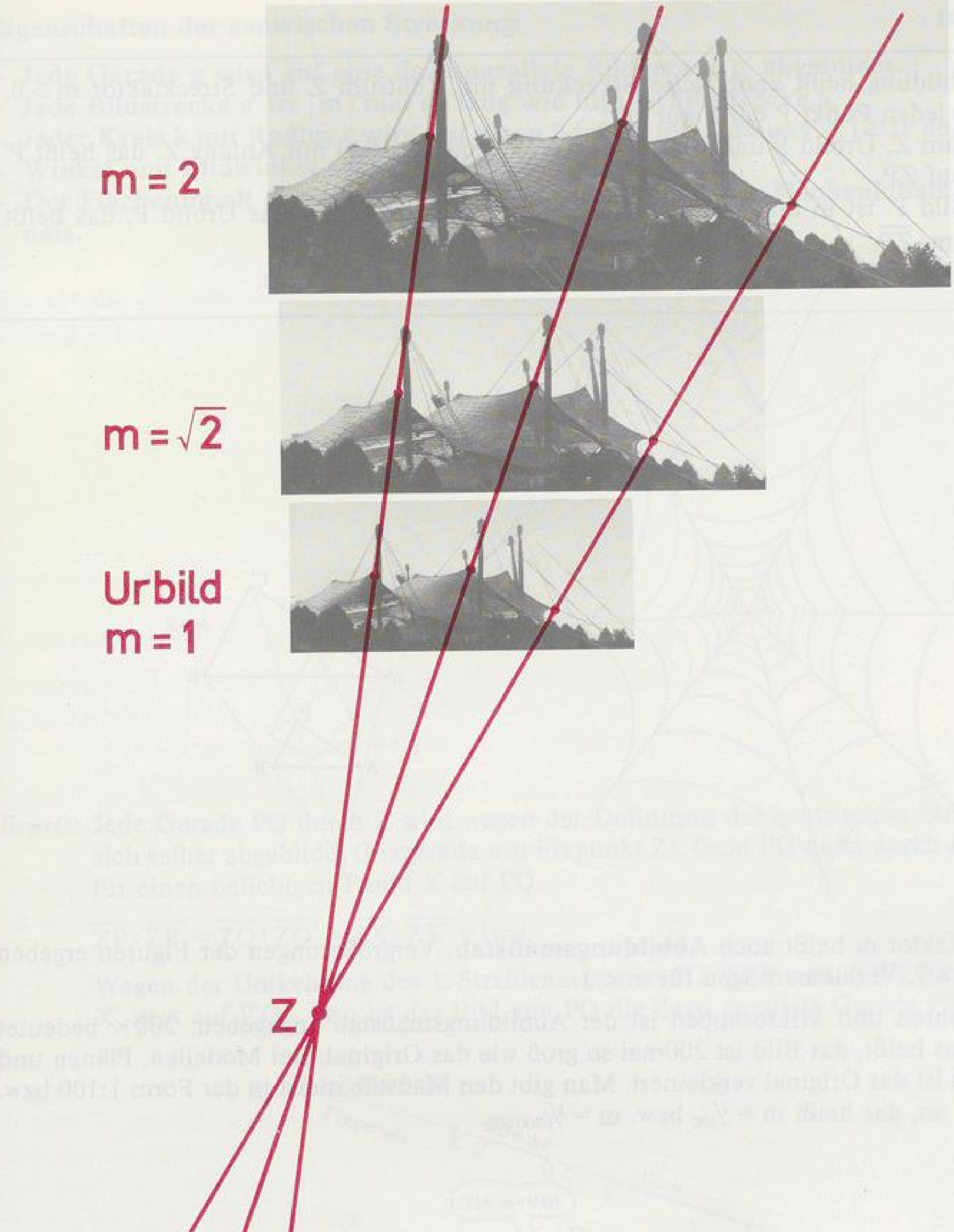
Barth, Friedrich

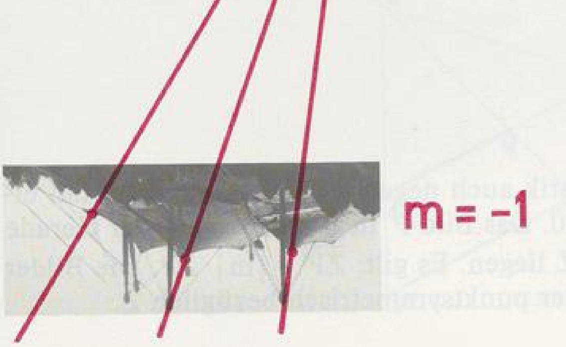
München, 1995

3. Kapitel: Zentrische Streckung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

3. Kapitel
Zentrische Streckung





3.1 Grundlagen

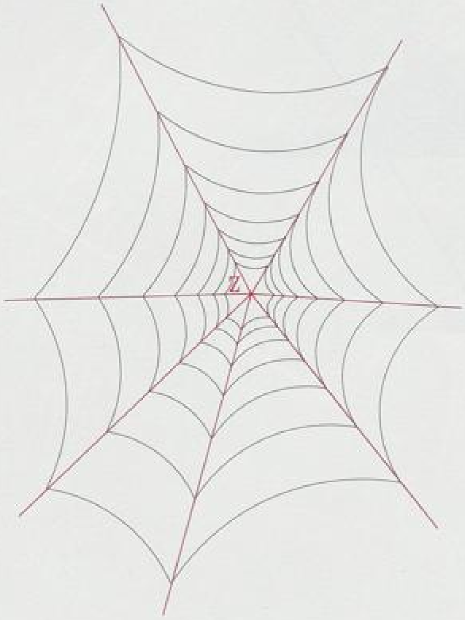
Verschiedene Vergrößerungen ein und desselben Bilds lassen sich immer so anordnen, daß entsprechende Punkte auf Strahlen liegen, die alle von einem Punkt Z, dem Zentrum, ausgehen. Diesen Bildfolgen liegt eine geometrische Abbildung zugrunde, die zentrische Streckung.

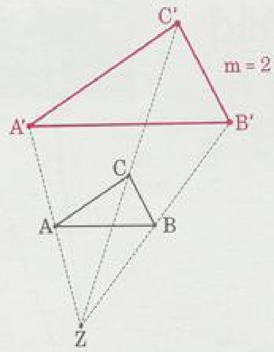
Definition:

Eine Abbildung heißt **zentrische Streckung** mit Zentrum Z und Streckfaktor $m > 0$, wenn für jeden Punkt P der Figur gilt:

1. Zentrum Z, Urbild P und Bild P′ liegen auf einem Strahl mit Anfang Z, das heißt P′ liegt auf ZP.
2. Das Bild P′ ist m mal so weit vom Zentrum Z entfernt wie das Urbild P, das heißt $\overline{ZP'} = m \cdot \overline{ZP}$.

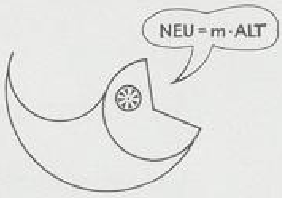
Man bezeichnet die zentrische Streckung symbolisch mit S (Z, m).





Der Streckfaktor m heißt auch **Abbildungsmaßstab.** Vergrößerungen der Figuren ergeben sich für $m > 1$, Verkleinerungen für $m < 1$.

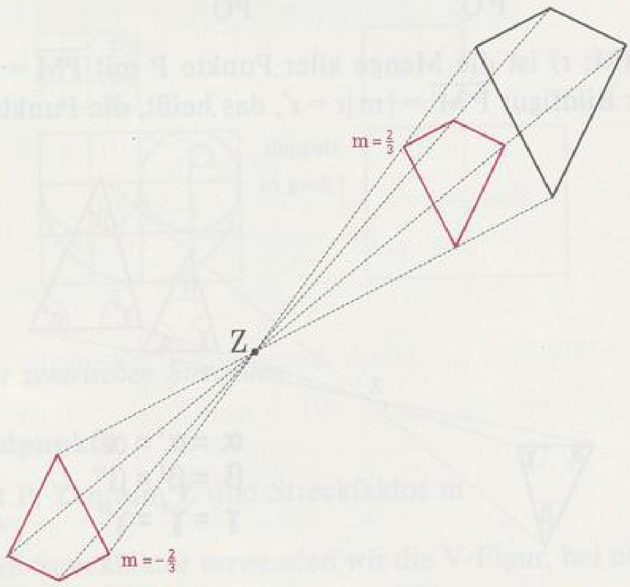
Auf Fernrohren und Mikroskopen ist der Abbildungsmaßstab angegeben. 200× bedeutet $m = 200$, das heißt, das Bild ist 200mal so groß wie das Original. Bei Modellen, Plänen und Landkarten ist das Original verkleinert. Man gibt den Maßstab meist in der Form 1:100 bzw. 1:1 000 000 an, das heißt $m = 1/100$ bzw. $m = 1/1\,000\,000$.



Im Gegensatz zur Praxis gibt es in der Mathematik auch negative Streckfaktoren: Man erweitert den Begriff zentrische Streckung auf $m < 0$. Das Bild P′ liegt dann so auf der Gerade ZP, daß P und P′ auf verschiedenen Seiten von Z liegen. Es gilt: $\overline{ZP'} = |m| \cdot \overline{ZP}$. Die Bilder einer Figur zu $m = s$ und $m = -s$ sind zueinander punktsymmetrisch bezüglich Z.

Eigenschaften der zentrischen Streckung:

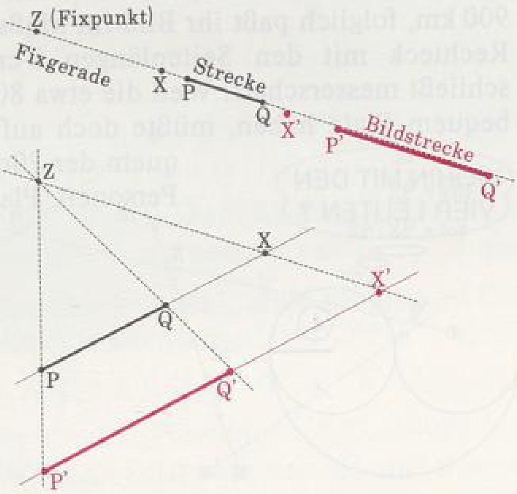
- **Jede Gerade g wird auf eine dazu parallele Bildgerade g′ abgebildet.**
- **Jede Bildstrecke s′ ist |m| mal so lang wie ihre Urbildstrecke s.**
- **Jeder Kreis k mit Radius r wird auf einen Kreis k′ mit Radius r′ = |m| r abgebildet.**
- **Winkel und Bildwinkel sind gleich groß.**
- **Der Flächeninhalt der Bildfigur ist m^2 mal so groß wie der Flächeninhalt des Originals.**



Beweis: Jede Gerade PQ durch Z wird wegen der Definition der zentrischen Streckung auf sich selber abgebildet (Fixgerade mit Fixpunkt Z). Geht PQ nicht durch Z, dann gilt für einen beliebigen Punkt X auf PQ

$\overline{ZP} : \overline{ZP'} = \overline{ZQ} : \overline{ZQ'} = \overline{ZX} : \overline{ZX'} = |m|$.

Wegen der Umkehrung des 1. Strahlensatzes ist P′X′ ∥ PX und Q′X′ ∥ QX, das heißt, X′ liegt auf P′Q′. Also ist das Bild von PQ die dazu parallele Gerade P′Q′.



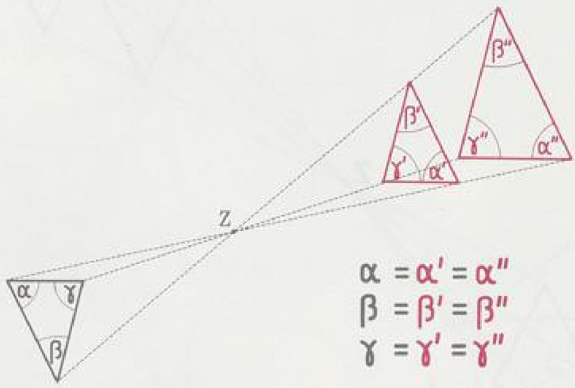
Wegen des 2. Strahlensatzes gilt außerdem

$\overline{P'Q'} : \overline{PQ} = \overline{P'Z} : \overline{PZ} = |m|$, also $\overline{P'Q'} = |m| \cdot \overline{PQ}$.

Liegt Z auf PQ, dann gilt

$$\left.\begin{aligned}\overline{ZP'} &= |m| \cdot \overline{ZP}\\ \overline{ZQ'} &= |m| \cdot \overline{ZQ}\end{aligned}\right\} \underbrace{|\overline{ZQ'} - \overline{ZP'}|}_{\overline{P'Q'}} = |m| \cdot \underbrace{|\overline{ZQ} - \overline{ZP}|}_{\overline{PQ}}$$

Der Kreis k (M; r) ist die Menge aller Punkte P mit $\overline{PM} = r$. Deshalb gilt für alle Punkte P′ der Bildfigur $\overline{P'M'} = |m| r = r'$, das heißt, die Punkte P′ bilden den Kreis k (M′; r′).



$$\alpha = \alpha' = \alpha''$$
$$\beta = \beta' = \beta''$$
$$\gamma = \gamma' = \gamma''$$

Die Schenkel des Bildwinkels sind parallel zu den Schenkeln des Winkels, Winkel und Bildwinkel sind also gleich groß: Ein Dreieck wird auf ein Dreieck mit denselben Winkelmaßen abgebildet.

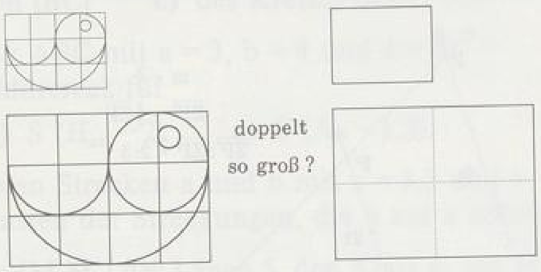
Für die Fläche eines Dreiecks gilt $A = \frac{1}{2}gh$. Demnach hat das Bilddreieck den Flächeninhalt $A' = \frac{1}{2}g'h' = \frac{1}{2}|m| \cdot g \cdot |m| h = m^2 \cdot \frac{1}{2}gh = m^2 A$. Weil sich jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen läßt, stimmt diese Beziehung auch für Vieleckflächen. Sie gilt sogar für krummlinig begrenzte Flächen. Der Beweis ist allerdings kompliziert.

Geobold hat Schwierigkeiten mit Flächeninhalten. Die Bundesrepublik paßt in ein Rechteck mit den Seitenlängen 600 km und 900 km, folglich paßt ihr Bild im Maßstab 1:20 Millionen in ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 cm und 4,5 cm. Geobold schließt messerscharf: Weil die etwa 80 Millionen Bundesbürger bequem Platz haben, müßte doch auf seiner kleinen Karte bequem der 20millionste Teil, das sind 4 Personen, Platz haben.

In der Umgangssprache unterscheidet man oft nicht deutlich genug zwischen Längen- und Flächenverhältnissen. Was bedeutet zum Beispiel:

ein doppelt so großes Rechteck,
ein doppelt so großes Zimmer,
ein doppelt so großes Foto?

Der Klarheit halber sollte man den Maßstab immer nur auf Längenverhältnisse beziehen, so, wie es bei der zentrischen Streckung üblich ist.

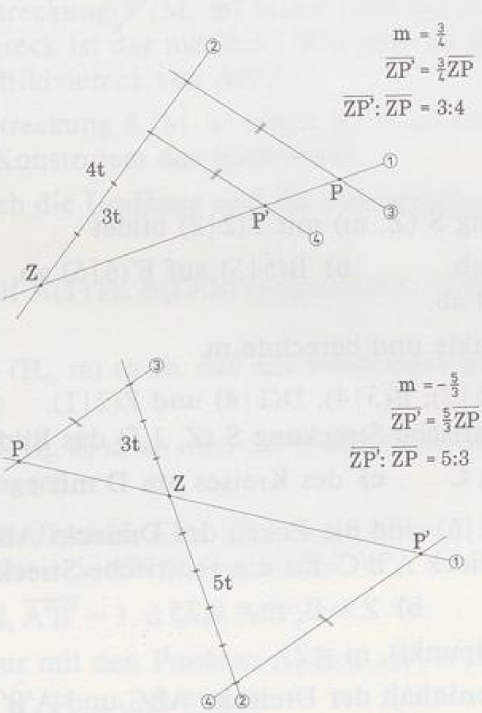


Grundkonstruktionen zur zentrischen Streckung

Konstruktion des Bildpunkts

Gegeben: Urbildpunkt P, Zentrum Z und Streckfaktor m
Gesucht: Bildpunkt P′
Lösung: Bei positivem Streckfaktor verwenden wir die V-Figur, bei negativem Streckfaktor verwenden wir die X-Figur.

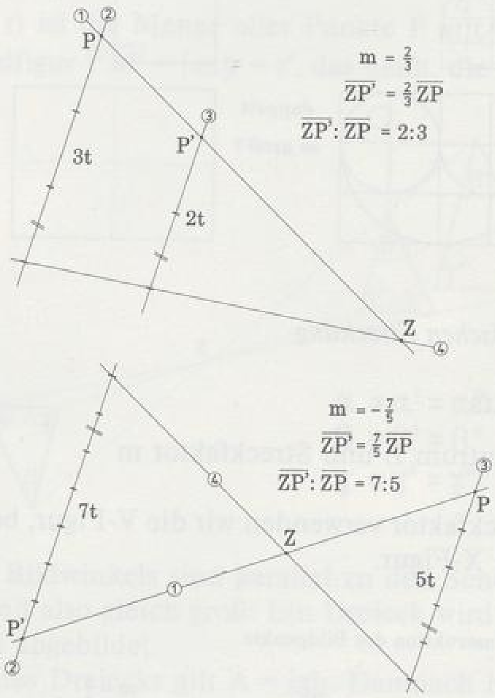
Konstruktion des Bildpunkts



Konstruktion des Zentrums

Gegeben: Urbild P, Bildpunkt P′ und Streckfaktor m
Gesucht: Zentrum Z
Lösung: Bei positivem Streckfaktor verwenden wir die V-Figur, bei negativem Streckfaktor verwenden wir die X-Figur.

Konstruktion des Zentrums



Aufgaben

1. Die zentrische Streckung S (Z, m) mit Z(2 | 2) bildet

a) A(7 | 2) auf A′(8 | 2) ab. **b)** B(5 | 5) auf B′(6 | 6) ab.
c) C(6 | 0) auf C′(3 | 1,5) ab.

Zeichne jeweils die Punkte und berechne m.

2. Zeichne die Punkte A(5 | 2), B(3 | 4), D(1 | 4) und Z(2 | 1).
Konstruiere für die zentrische Streckung S (Z, 1,5) das Bild

a) von [AB] **b)** von C **c)** des Kreises um D mit r = 1.

3. A(1 | 1), B(6 | 1) und C(3 | 6) sind die Ecken des Dreiecks ABC.
Konstruiere das Bilddreieck A′B′C′ für die zentrische Streckung S (Z, m)

a) Z = D(0 | 3), m = 1,5 **b)** Z = B, m = 0,75
c) Z = H (Höhenschnittpunkt), m = 2
d) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke ABC und A′B′C′.

4. Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit $a = 6$, $\alpha = 75°$ und $b = 4$.
Konstruiere das Bild des Parallelogramms für die zentrische Streckung S (Z, m)

a) $Z = B$, $m = 0{,}5$ **b)** Z ist Mitte von [AD], $m = 0{,}5$

c) Z ist Fußpunkt des Lots durch D auf AB, $m = 1{,}5$.

5. Zeichne die Punkte A(7 | 0), B(3 | 0), C(0 | 2,5) und Z(4 | 3).
Konstruiere für die zentrische Streckung S (Z, −0,5) das Bild

a) von A **b)** von [BC] **c)** des Kreises um A mit $r = 3$.

6. Zeichne das Dreieck ABC mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$.
Konstruiere das Bilddreieck für

a) S (C, −1) **b)** S (H_c, −2) **c)** S (A, −1,5).

7. Zeichne die parallelen Strecken a und b mit $a = 3{,}5$ und $b = 2$ im Abstand 3.
Konstruiere die Zentren der Streckungen, die b auf a abbilden, und gib m an.

8. Zeichne die Strecke $[M_1M_2]$ der Länge 5, den Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 1$ und den Kreis k_2 um M_2 mit $r_2 = 2$.
Konstruiere die Zentren der Streckungen, die k_1 auf k_2 abbilden, und gib m an.

9. Zeichne die Strecke [PP′] der Länge 4. Die zentrische Streckung S (Z, m) bildet P auf P′ ab.
Konstruiere Z für

a) $m = 2$ **b)** $m = 0{,}5$ **c)** $m = \frac{2}{3}$

d) $m = -1$ **e)** $m = -\frac{1}{3}$ **f)** $m = -2$.

•10. Zeichne das Viereck ABCD mit A(0 | 1), B(8 | 1), C(9 | 7) und D(5 | 7). M ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

a) Die zentrische Streckung S (M, m) bildet [AB] auf [CD] ab. 14
Bei welchem Viereck ist das möglich? Wie groß ist m? 0 0 19
Konstruiere das Bildviereck von ABCD. 0

b) Die zentrische Streckung S (M, k) bildet [CD] auf [AB] ab.
Wie groß ist k? Konstruiere das Bildviereck.

c) Wie verhalten sich die Umfänge und die Flächeninhalte von Urbild und Bild in **a)** und **b)**?

•11. Im Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(13,5 | 1) und C(5,5 | 7) haben die Katheten die Länge 7,5 und 10.

a) Bilde ABC mit S (H_c, m) so ab, daß das Bilddreieck den Umfang 20 hat. 9
(Zwei Lösungen) 0 0 14

b) Bilde ABC mit S (H_c, k) so ab, daß das Bilddreieck den Flächeninhalt $\frac{200}{3}$ 7
hat. (Zwei Lösungen)

12. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Spitze bei C) wird durch die Streckung S (C; m) mit $m > 0$ auf das Dreieck A′B′C′ abgebildet.

Bekannt ist: $\overline{AB} = 4$, $\overline{A'B'} = 3$, d (AB, A′B′) = 1

a) Zeichne die Figur mit den Punkten A, B, C, A′, B′, C′!

b) Berechne m, h_c, h_c', F_{ABC} und $F_{A'B'C'}$!

13. Ein Dreieck ZAB wird von Z aus auf das Dreieck ZA′B′ gestreckt ($m > 0$). Die Fläche des Vierecks AA′B′B ist viermal so groß wie die Fläche des Dreiecks ZAB. Berechne den Streckfaktor m!

14. Bei einer zentrischen Streckung mit negativem Streckfaktor m wird das Dreieck $A(3|1)$, $B(4|5)$, $C(0|5)$ auf ein Dreieck mit Flächeninhalt 4,5 abgebildet.

a) Berechne m!

b) Zeichne das Bilddreieck A′B′C′, wenn $Z(5|3)$ gegeben ist und gib seine Koordinaten an!

15. Zeichne das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $a = 4$ und $b = 3$ und bilde dieses Dreieck durch die Streckung $S(C; m_1)$ mit $m_1 > 1$ so ab, daß $\overline{AA'} = 2$ gilt.

a) Berechne m_1!

b) Berechne die Länge $\overline{B'C}$!

c) Welchen Abbildungsfaktor m_2 hat eine Streckung mit dem Zentrum A′, die C auf A abbildet? Konstruiere für diese Streckung das Bild B″ von B′!

d) Was für eine Figur ist AB″B′B?

e) Welchen Inhalt hat das Dreieck AA′B″?

16. Von drei Punkten A, B und C ist bekannt: es gibt eine zentrische Streckung $S(Z; m)$ mit $m > 0$, die A auf B und B auf C abbildet.

a) Zeichne die drei Punkte, wenn $\overline{AB} = 3{,}5$ und $\overline{BC} = 2$!

b) Berechne m und konstruiere Z!

17. Zeichne zwei parallele Geraden g und g′ mit dem Abstand 3. Wähle auf g einen Punkt A und bestimme dazu auf g′ einen Punkt A′ so, daß $\overline{AA'} = 4$.

a) Konstruiere das Zentrum Z der Streckung $S(Z; \frac{5}{8})$, die A auf A′ abbildet!

b) Das gemeinsame Lot von g und g′ durch Z schneidet g in F und g′ in F′. Warum bildet die in a) angegebene Streckung F auf F′ ab?

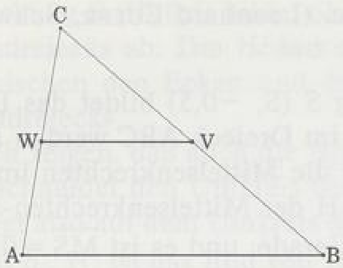
c) Berechne den Abstand von Z zu g′!

3.2 Berühmte Sätze

Mit der zentrischen Streckung beweisen wir einige berühmte Sätze der Geometrie. (Die beiden ersten haben wir schon bei den Strahlensätzen bewiesen.)

Satz über die Mittelparallele im Dreieck:

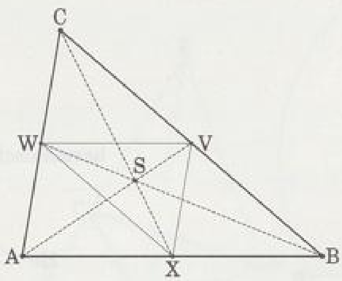
Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten im Dreieck ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie sie.



Beweis: Die zentrische Streckung S $(C, \frac{1}{2})$ bildet die Strecke [AB] ab auf die dazu parallele und halb so lange Strecke [WV].
Außerdem gilt: $\overline{CW} = \frac{1}{2}\overline{CA}$ und $\overline{CV} = \frac{1}{2}\overline{CB}$.

Schwerpunktsatz:

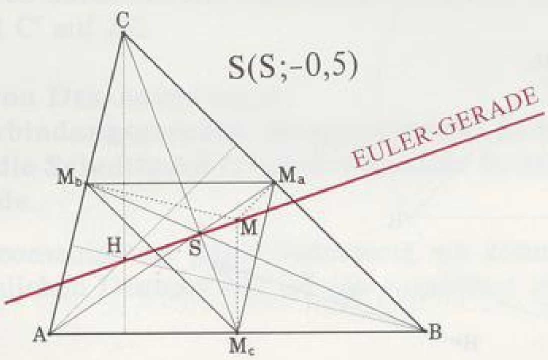
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks.
Die Abschnitte, in die der Schwerpunkt eine Seitenhalbierende teilt, verhalten sich wie 2:1. Das längere Stück ist immer an der Ecke.



Beweis: Die Seitenhalbierenden AV und BW schneiden sich in S. Die zentrische Streckung S (S, −2) bildet dann die Mittellinie [VW] auf [AB] und die Mittelparallele [WX] auf [BC] ab, C ist das Bild von X. S liegt deshalb auch auf der dritten Seitenhalbierenden CX. Weil [CS], [AS] und [BS] die Bilder von [XS], [VS] und [WS] sind, gilt: $\overline{CS} = 2\overline{XS}$, $\overline{AS} = 2\overline{VS}$ und $\overline{BS} = 2\overline{WS}$.

*** Satz über die Euler-Gerade:**

In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten auf einer Gerade.
Es gilt $\overline{HS} = 2 \cdot \overline{MS}$.



Diese Gerade heißt Euler-Gerade. (Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker, Basel 1707 bis 1783 Petersburg)

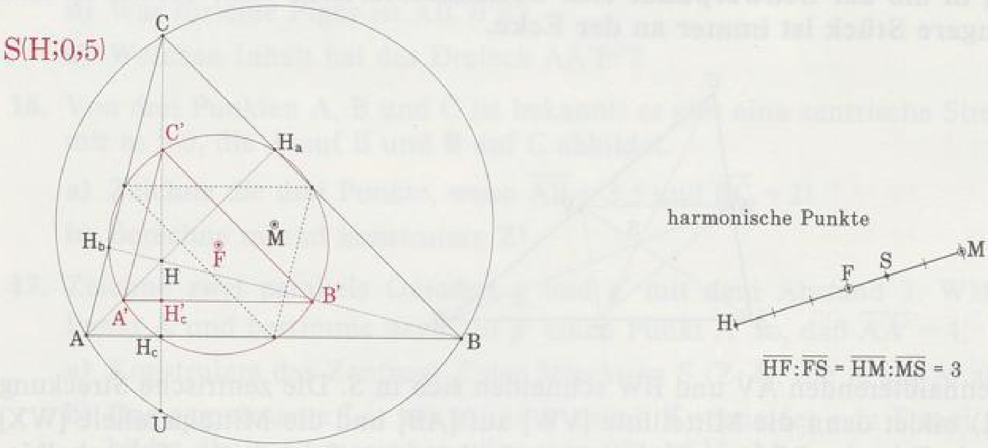
Beweis: Die zentrische Streckung S (S, −0,5) bildet das Dreieck ABC aufs Mittendreieck $M_aM_bM_c$ ab. Die Höhen im Dreieck ABC werden auf die Höhen im Mittendreieck abgebildet, das sind aber die Mittelsenkrechten im Dreieck ABC. Also ist das Bild des Höhenschnittpunkts H der Mittelsenkrechten-Schnittpunkt M, das heißt, H, S und M liegen auf einer Gerade, und es ist $\overline{MS} = 0{,}5 \cdot \overline{HS}$ bzw. $\overline{HS} = 2\,\overline{MS}$.

*** Satz über den Feuerbach-Kreis:**

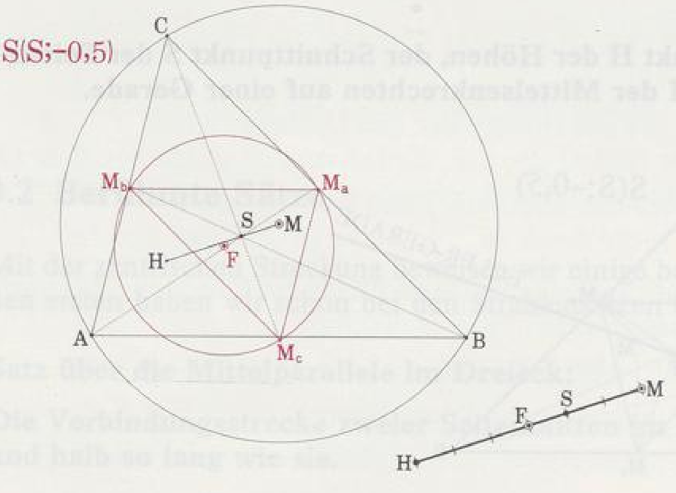
In jedem Dreieck liegen die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mitten zwischen dem Höhenschnittpunkt H und den Ecken auf einem Kreis.

Der Kreis heißt Feuerbach-Kreis oder auch Neunpunktekreis.
(Karl Wilhelm Feuerbach, deutscher Mathematiker, 1800 bis 1834 Erlangen)

FEUERBACH-KREIS



Beweis: Der Umkreis des Dreiecks ABC (Mittelpunkt M, Radius r) wird bei der zentrischen Streckung S (S, −0,5) auf den Umkreis des Mittendreiecks $M_aM_bM_c$ (Mittelpunkt F, Radius r/2) abgebildet. Wegen $\overline{SM} : \overline{SF} = 2 : 1$ halbiert F die Strecke [MH].



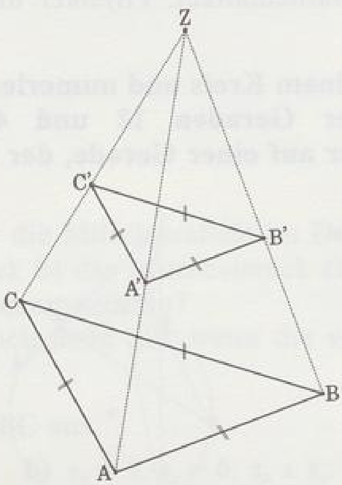
Auch die zentrische Streckung S (H, 0,5) bildet den Umkreis des Dreiecks ABC auf den Umkreis des Mittendreiecks ab. Die Höhen sind Fixgeraden. Also liegen die Mitten A′, B′ und C′ zwischen den Ecken und dem Höhenschnittpunkt auch auf dem Umkreis des Mittendreiecks.

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß auch die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c auf diesem Kreis liegen. h_c schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC in U. S (H, 0,5) bildet U auf H_c ab. H_c liegt also auf dem Umkreis des Mittendreiecks. Weil h_c Fixgerade ist, liegt H_c auch auf h_c. H_c' ist das Bild von H_c, und es gilt: $\overline{H_cH_c'} = \overline{H_c'H}$. Folglich liegt H_c' auf A′B′ und ist Höhenfußpunkt im Dreieck A′B′C′. Deshalb ist das Urbild H_c von H_c' Höhenfußpunkt im Dreieck ABC.

* Sonderfall des Satzes von Desargues

(Gérard Desargues, französischer Mathematiker, Lyon 1593 bis 1662 Lyon)

Liegen zwei nicht kongruente Dreiecke so, daß ihre Seiten paarweise parallel sind, so schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken in einem Punkt.

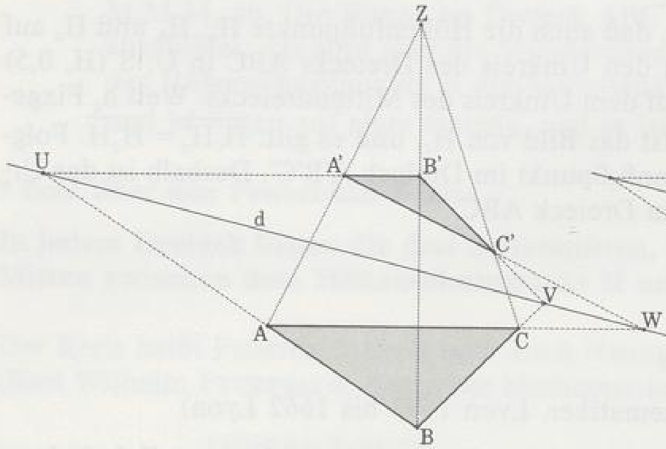


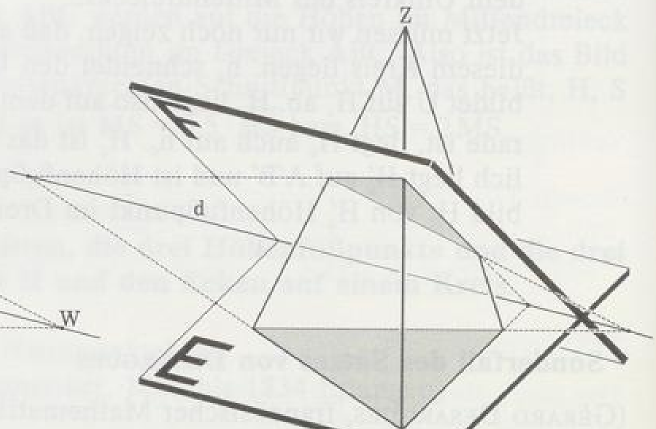
Beweis: AA′ und BB′ schneiden sich in Z. Die zentrische Streckung S (Z, c′/c) bildet [AB] auf [A′B′] ab. Das Bild C* von C ist Schnittpunkt der Parallele zu BC durch B′ und der Parallele zu AC durch A′. Die Parallelen schneiden sich aber in C′, das heißt, C′ = C*, also liegt C′ auf ZC.

*** Der allgemeine Satz von Desargues** lautet:
Schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke in einem Punkt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten (bzw. ihrer Verlängerungen) auf einer Gerade.

Dieser Satz hat in der Geometrie eine große Bedeutung, wir können ihn hier jedoch nicht beweisen. Mit einer räumlichen Deutung läßt er sich zumindest plausibel machen:

Wir stellen uns ZABC als Pyramide mit der Spitze Z vor. Die Ebenen E (A, B, C) und F (A′, B′, C′) schneiden die Pyramiden in den beiden Dreiecken. Im allgemeinen sind die beiden Ebenen nicht parallel und schneiden sich in d.

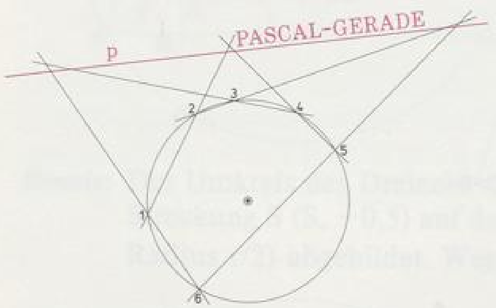


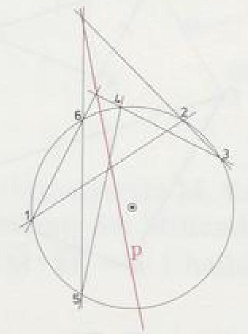


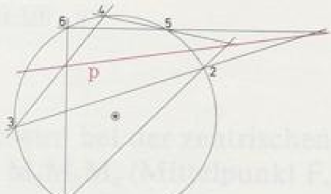
* Und nun als Krönung der **Satz von Pascal**

(Blaise Pascal, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, Clermont-Ferrand 1623 bis 1662 Paris)

Wählt man sechs Punkte auf einem Kreis und numeriert sie beliebig mit 1 bis 6, dann liegen die Schnittpunkte der Geraden 12 und 45, 23 und 56, 34 und 67 (Ecke 7 = Ecke 1) selber wieder auf einer Gerade, der Pascal-Gerade.







Je nachdem, wie man die sechs Punkte numeriert, ergibt sich eine andere Pascal-Gerade. Insgesamt gibt's davon 60 Stück! Zum Beweis braucht man den richtigen Blick:

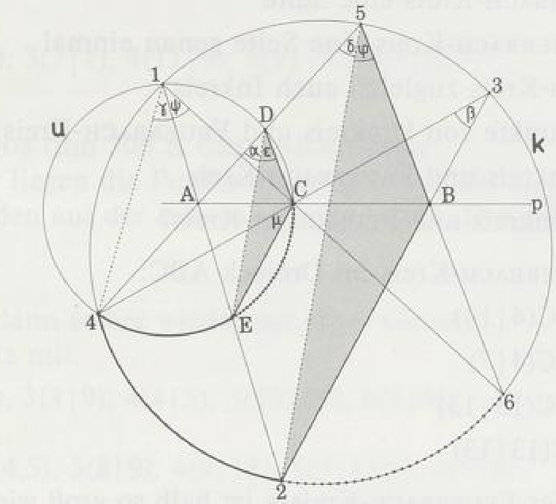
C ist Schnittpunkt von 61 und 43,
u ist Umkreis des Dreiecks 1 C4,
54 schneidet u in D, 12 schneidet u in E

Umfangswinkel in den Kreisen k und u:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \gamma \text{ (Kreis u)}\\ \gamma = \delta \text{ (Kreis k)}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \delta \Rightarrow \mathrm{DE} \parallel 52 \qquad \left.\begin{array}{l}\varepsilon = \psi \text{ (Kreis u)}\\ \psi = \varphi \text{ (Kreis k)}\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon = \psi \Rightarrow \mathrm{DC} \parallel 5\,\mathrm{B}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta = \delta \text{ (Kreis k)}\\ \delta = \alpha \text{ (oben!)}\\ \alpha = \mu \text{ (Kreis u)}\end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \mu \Rightarrow \mathrm{CE} \parallel \mathrm{B}\,2$$

Die Dreiecke CDE und B52 haben also paarweise parallele Seiten. Deshalb liegen A, B und C nach Desargues auf einer Gerade.



Übrigens hat Pascal diesen Satz mit 16 Jahren bewiesen und 1640 in seinem »Essai pour les Coniques« veröffentlicht.

Aufgaben

1. Folgere aus dem Satz über die Mittelparallele im Dreieck den Satz:
In einem beliebigen Viereck ist das Mittenviereck ein Parallelogramm.
Wie lang sind die Parallelogrammseiten?
Begründe, daß der Satz auch dann gilt, wenn die vier Ecken im Raum liegen (also nicht in einer Ebene).

• **2.** Konstruiere ein Dreieck ABC aus
a) $a = 8$, $s_b = 9$, $s_a = 7{,}5$ **b)** $s_a = 3$, $s_c = 6$, $s_a \perp s_c$.

3. Bei welchen Dreiecken ist die Euler-Gerade zugleich auch
a) Winkelhalbierende **b)** Seitenhalbierende?

4. Konstruiere die Euler-Gerade im Dreieck ABC:

12
0 0 15
0

a) A(0|0), B(15|0), C(3|12)
b) A(1|2), B(13|5), C(10|11)
c) A(1|1), B(13|4), C(7|7)
d) A(0|2), B(15|2), C(9|8)
e) A(1|0), B(13|6), C(10|12)
f) A(0|1), B(15|4), C(9|10)
g) A(13|0), B(7|12), C(1|6)
h) A(0|4), B(15|1), C(9|10)

5. Bei welchen Dreiecken

a) geht der FEUERBACH-Kreis durch eine Ecke

b) berührt der FEUERBACH-Kreis eine Seite

c) schneidet der FEUERBACH-Kreis eine Seite genau einmal

d) ist der FEUERBACH-Kreis zugleich auch Inkreis

e) fallen die Mittelpunkte von Umkreis und FEUERBACH-Kreis zusammen

f) berühren sich Umkreis und FEUERBACH-Kreis

g) schneiden sich Umkreis und FEUERBACH-Kreis?

6. Konstruiere den FEUERBACH-Kreis im Dreieck ABC: 13

a) A(0 | 1), B(10 | 1), C(4 | 13) 0 0 13

b) A(1 | 4), B(13 | 4), C(4 | 7) 0

c) A(1 | 1), B(13 | 5), C(13 | 13)

d) A(1 | 7), B(7 | 1), C(13 | 13)

7. Zeige: Der Radius des FEUERBACH-Kreises ist halb so groß wie der des Umkreises.

• **8.** Der FEUERBACH-Kreis eines Dreiecks ABC um F(9 | 8) geht durch M_a(9 | 3). 16
Konstruiere das Dreieck, wenn M(10 | 6) Umkreismittelpunkt ist. 0 0 18
0

9. Zwei nicht kongruente Dreiecke liegen so, daß ihre Seiten paarweise parallel sind. Zeichne sie so, daß der »DESARGUES-Punkt Z« zwischen den entsprechenden Punkten liegt.

• **10.** A(14 | 3), B(16 | 9), C(12 | 11) A′(7 | 4), B′(4 | 6)
Die Dreiecke ABC und A′B′C′ liegen so, daß sich die Verbindungsgeraden 12
entsprechender Ecken in einem Punkt Z treffen. 0 0 16
Konstruiere C′ so, daß die »DESARGUES-Gerade d« parallel zu AC ist, und 0
zeichne d. Welcher Punkt C′ ergibt sich, wenn d parallel AB ist?

11. Die Punkte 1 bis 6 liegen auf einem Kreis.
Konstruiere die Pascal-Gerade für 12

a) 1(13,5 | 5), 2(7 | 11,5), 3(2,5 | 7), 4(13 | 3,5), 5(10,5 | 1), 6(3 | 3,5) 0 0 14
0

b) 1(8 | 16,5), 2(4 | 13,5), 3(8 | 5,5), 4(3,5 | 10), 5(14 | 8,5), 6(11,5 | 6) 17
0 0 15
0

c) 1(14,5 | 8,5), 2(12 | 11), 3(4 | 7), 4(14,5 | 3,5), 5(12 | 1), 6(4,5 | 3,5) 12
0 0 17
0

12. Die Punkte 1 bis 6 liegen auf einem Kreis. Fallen zwei Punkte in einem Punkt zusammen, dann zeichne statt der Sekante die Tangente in diesem Punkt.

Konstruiere die Pascal-Gerade für
15

a) 1(9 | 13), 2(1 | 9), 3(1 | 9), 4(10 | 9), 5(9 | 7), 6(9 | 7) 0 0 13
0

10
b) 1(2 | 4), 2(10 | 2), 3(2 | 6), 4(11 | 6), 5(11 | 6), 5(11 | 6), 6(5,5 | 0,5) 0 0 12
0

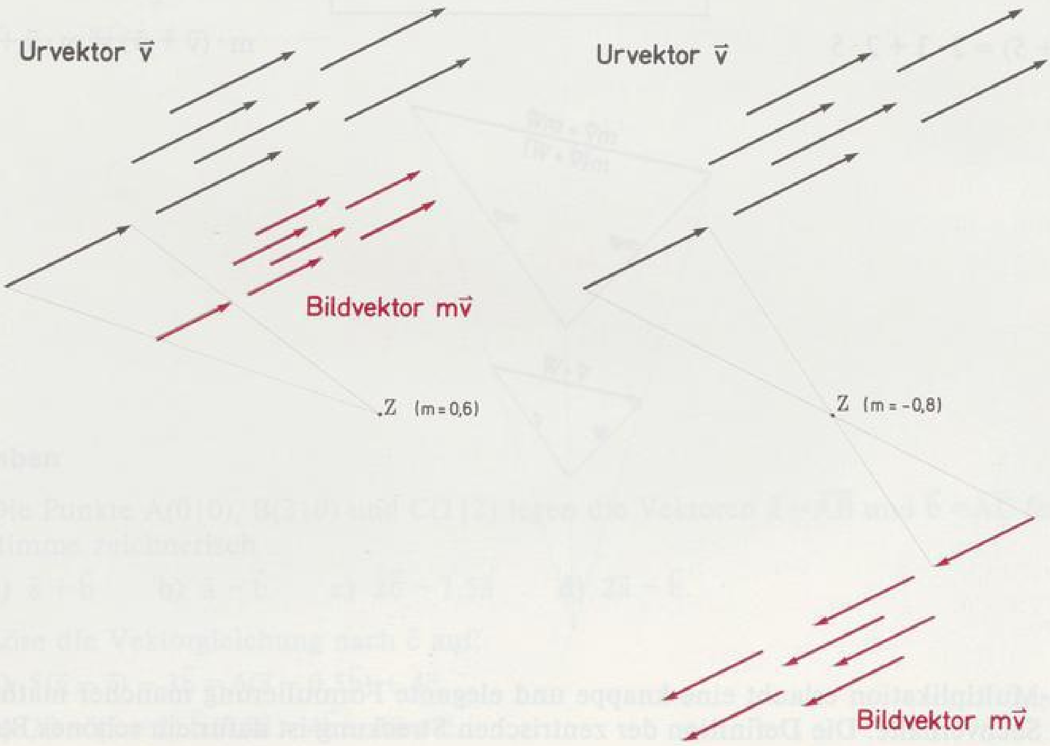
17
c) 1(7 | 12), 2(7 | 1), 3(7 | 1), 4(11 | 9), 5(11 | 9), 6(7 | 12) 0 0 19
0

13. Der Satz von PAPPOS (um 300 n. Chr., Alexandria)
Auf zwei Geraden liegen die Punkte 1 bis 6 so, daß die ungeraden auf der einen Gerade und die geraden auf der andern Gerade liegen. Die Schnittpunkte der Geraden
12 und 45,
23 und 56,
34 und 61 liegen dann selber wieder auf einer Gerade.
Überprüfe den Satz mit

14
a) 1(5 | 10), 2(3 | 6), 3(3 | 9), 4(4 | 5), 5(13 | 14), 6(5 | 4) 0 0 13
0

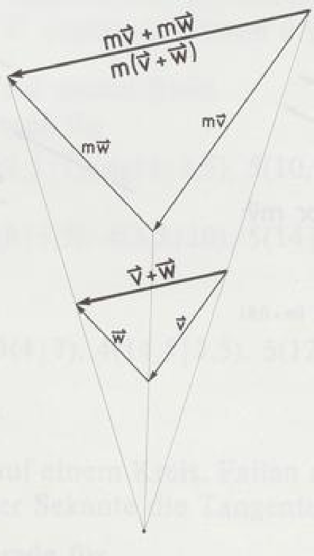
18
b) 1(14 | 0), 2(3,5 | 4,5), 3(8 | 9), 4(8 | 18), 5(5 | 13,5), 6(5 | 9) 0 0 14
0

3.3 S-Multiplikation



Wendet man die zentrische Streckung S (Z; m) auf den Vektor $\vec{v}$ an, so ist das Bild wieder ein Vektor. Man bezeichnet den Bildvektor mit $m \cdot \vec{v}$. Die Pfeile von $m \cdot \vec{v}$ sind parallel zu den Pfeilen von $\vec{v}$ und $|m|$ mal so lang. Für $m > 0$ sind die Pfeile von $\vec{v}$ und $m \cdot \vec{v}$ gleich gerichtet (gleichsinnig parallel), für $m < 0$ sind die Pfeile von $\vec{v}$ und $m \cdot \vec{v}$ entgegengesetzt gerichtet (gegensinnig parallel). Unter $0 \cdot \vec{v}$ versteht man den Nullvektor $\vec{0}$. Die Schreibweise $m \cdot \vec{v}$ erinnert an ein Produkt. Im Gegensatz zum Produkt von Zahlen »multipliziert« man jetzt aber eine Zahl und einen Vektor. Weil Zahlen auch Skalare heißen, nennt man diese besondere Multiplikation die S-Multiplikation. Die Bezeichnung »Multiplikation« ist gerechtfertigt, weil viele Gesetze der Zahlenmultiplikation auch hier gelten, zum Beispiel

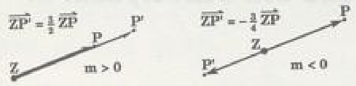
Zahlen-Multiplikation		S-Multiplikation
$2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$		$\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} = 3 \cdot \vec{v}$
$1 \cdot 2 = 2$		$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
$0 \cdot 2 = 0$		$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$
$(-1) \cdot 2 = -2$		$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$
	Assoziativgesetz	
$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$		$(m \cdot n) \cdot \vec{v} = m \cdot (n \cdot \vec{v})$
	1. Distributivgesetz	
$(2 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$		$(m + n) \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{v}$
	2. Distributivgesetz	
$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$		$m \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = m \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w}$



Die S-Multiplikation erlaubt eine knappe und elegante Formulierung mancher mathematischen Sachverhalte. Die Definition der zentrischen Streckung ist dafür ein schönes Beispiel.

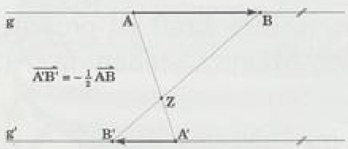
Eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor m ist eine Abbildung $P \to P'$, für die gilt: $\overrightarrow{ZP'} = m\overrightarrow{ZP}$. In dieser einen Gleichung stecken alle Eigenschaften der zentrischen Streckung, Beispiele:

- Z ist Fixpunkt
  Begründung: $\overrightarrow{ZZ'} = m\overrightarrow{ZZ} = \vec{0}$, also ist $Z = Z'$.



- Z, P und P' liegen auf einer Gerade
  Begründung: Folgt direkt aus der Definition der S-Multiplikation.
- Für einen beliebigen Vektor $\overrightarrow{AB}$ und sein Bild $\overrightarrow{A'B'}$ gilt: $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$
  Begründung: $\overrightarrow{ZA'} = m\overrightarrow{ZA} \Rightarrow \overrightarrow{A'Z} = m\overrightarrow{AZ}$ (I)
  $\overrightarrow{ZB'} = m\overrightarrow{ZB'}$ (II)
  I + II: $\overrightarrow{A'Z} + \overrightarrow{ZB'} = m(\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZB})$
  $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$

  Damit ist auch gezeigt:
  Gerade und Bildgerade sind parallel,
  die Bildstrecke [A'B'] ist $|m|$ mal so lang wie die Strecke [AB].
  (Im Bild ist $m = -\frac{1}{2}$)



Aufgaben

1. Die Punkte A(0|0), B(3|0) und C(1|2) legen die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ fest. Bestimme zeichnerisch
   a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $\vec{a} - \vec{b}$ **c)** $2\vec{b} - 1{,}5\vec{a}$ **d)** $2\vec{a} - \vec{b}$.

2. Löse die Vektorgleichung nach $\vec{c}$ auf:
   a) $5(\vec{a} - \vec{c}) - 3\vec{b} = 6(\vec{a} - 0{,}5\vec{b}) + 4\vec{c}$
   b) $2\vec{a} - (5 - 2)\,\vec{b} - 3\vec{c} = 4\vec{b} - 3\vec{a} + \vec{c}$

3. Zeichne die Punkte A(0|0), B(4|2), C(1|3) und die Vektoren $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. Überprüfe durch Zeichnung das

a) Assoziativgesetz $(mn)\vec{v} = m(n\vec{v})$ für $m = 1{,}5$ und $n = 0{,}5$

b) 1. Distributivgesetz $(m + n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$ für $m = 1{,}5$ und $n = 0{,}5$

c) 2. Distributivgesetz $m(\vec{v} + \vec{w}) = m\vec{v} + m\vec{w}$ für $m = 1{,}5$.

4. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC, seine Seitenmitten und den Schwerpunkt S. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ aus.

a) $\overrightarrow{AM_c}$ **b)** $\overrightarrow{AM_a}$ **c)** $\overrightarrow{CM_c}$ **d)** $\overrightarrow{SM_a}$

e) $\overrightarrow{BS}$ **f)** $\overrightarrow{M_bS} - \overrightarrow{BM_c}$.

5. In einem Parallelogramm mit Diagonalenschnittpunkt M gilt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Drücke mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus:

a) $\overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{DM}$ **c)** $\overrightarrow{MC}$ **d)** $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}$.

6. Zeichne die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ mit A(0|0), C(3|1,5) und bestimme den Punkt D so, daß $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ gilt:

a) B(1,5|0) **b)** B(−0,5|−1,5) **c)** B(1|−2).

•7. Im Trapez ABCD mit AB ∥ CD und $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ liegt E so auf [DC], daß $\overline{DC} = 3\overline{DE}$ ist; M ist der Mittelpunkt von [AD]. Drücke mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ folgende Vektoren aus:

a) $\overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{CE}$ **d)** $\overrightarrow{BE}$

e) $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{MC}$ **f)** $\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{MC}$.

•8. Fünf Männer wollen den Gordischen Knoten G(0|0) lösen. Ihre Kraft ist proportional zur Seillänge, alle ziehen gleichzeitig am Knoten, vier Männer stehen in A(2|2), B(2|1), C(1|−2), D(−2|−3).

a) Wo muß E stehen und ziehen, damit der Knoten G im Ursprung bleibt?

b) Mit welcher Kraft zieht E, wenn die Kraft von D 800 N beträgt?