Anschauliche Geometrie

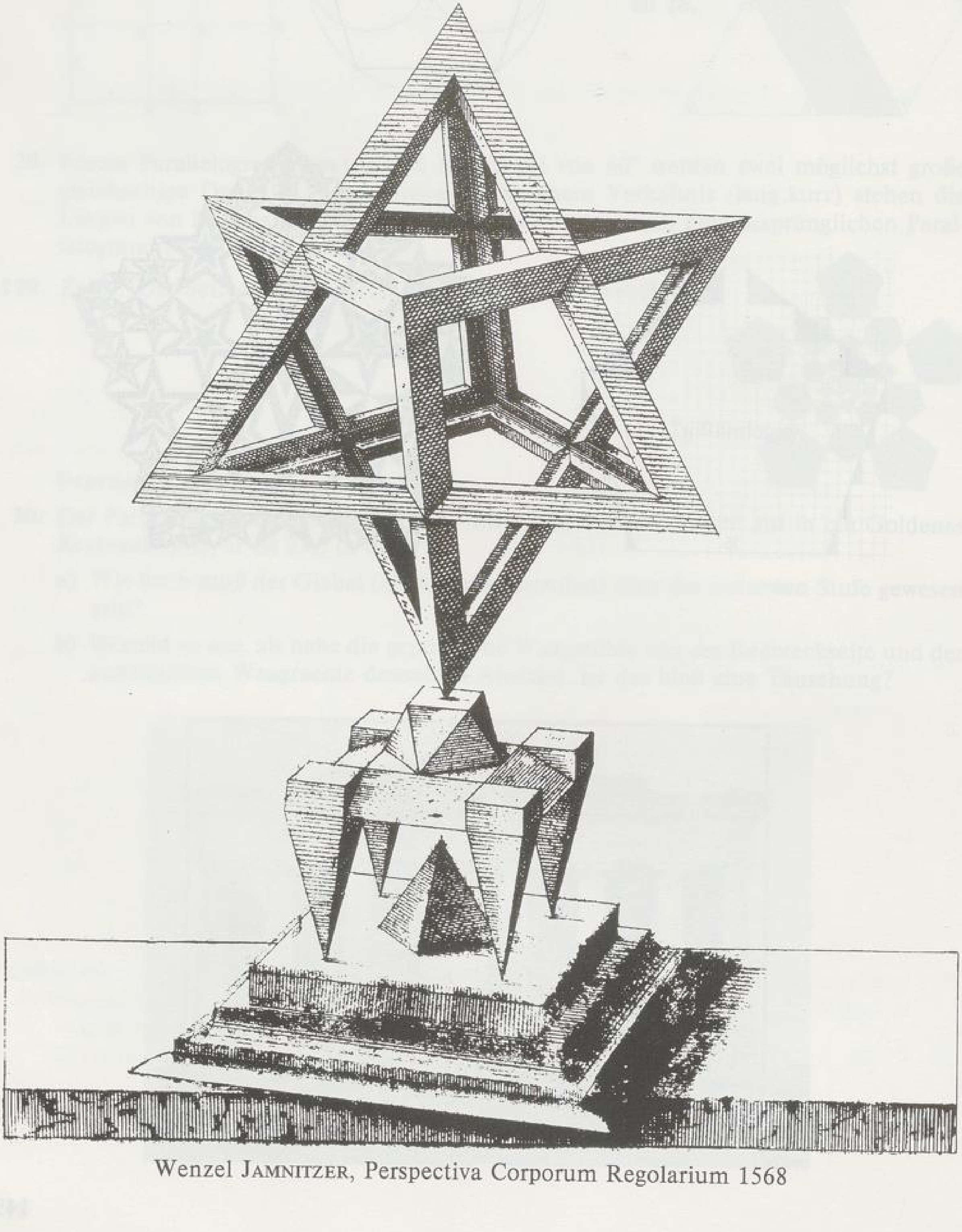
Barth, Friedrich

München, 1995

7. Kapitel: Die Pyramide

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

7. Kapitel
Die Pyramide

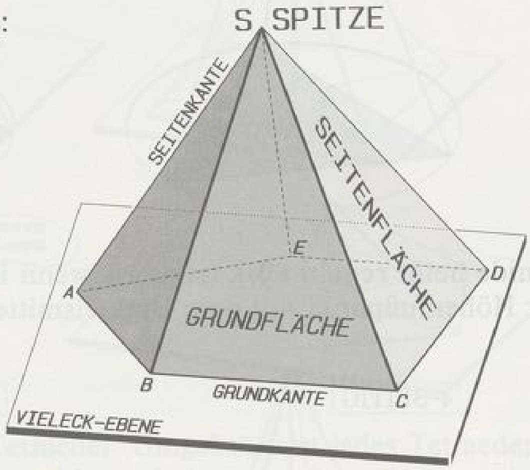


Wenzel JAMNITZER, Perspectiva Corporum Regolarium 1568

7.1 Grundlagen

Vor rund 4000 Jahren ließen sich einige Pharaonen im alten Ägypten monumentale Grabstätten bauen. Über einer quadratischen Grundfläche schichtete man behauene Felsquader zu einem Körper, den wir heute Pyramide nennen. In der ägyptischen Sprache bedeutete damals (Hieroglyphen) (vermutliche Aussprache piremus) eine Abmessung der Pyramide, wahrscheinlich eine Kantenlänge. Die Griechen mißverstanden diesen Begriff und verwendeten als Lehnwort »pyramis« zur Bezeichnung des ganzen Körpers.

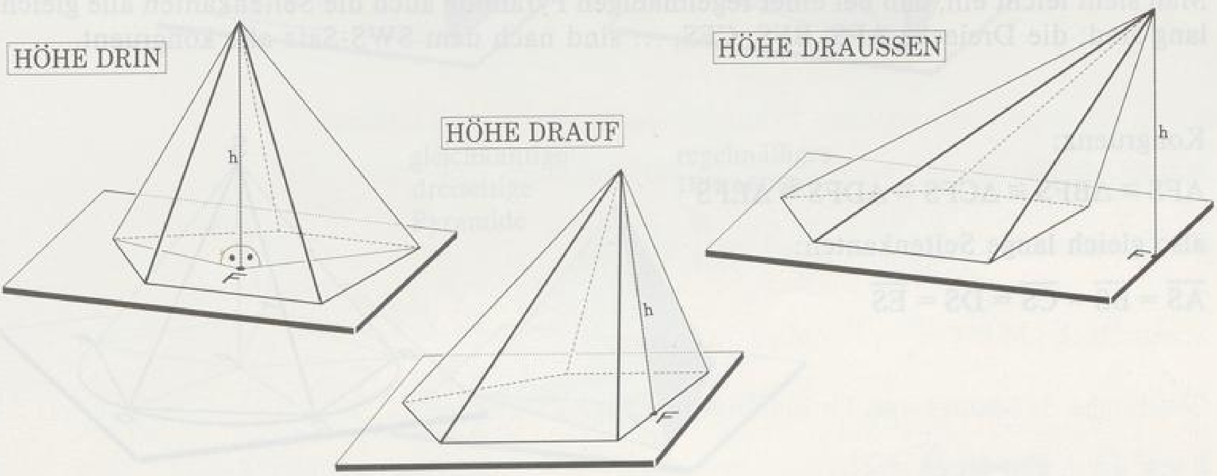
In der Mathematik verallgemeinert man:



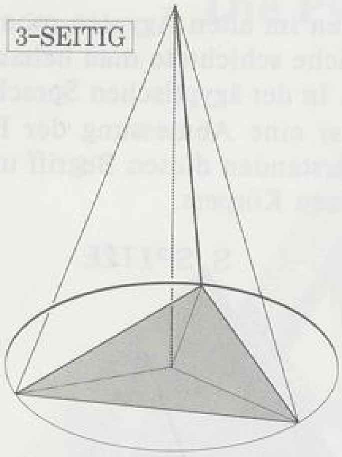
Definition:

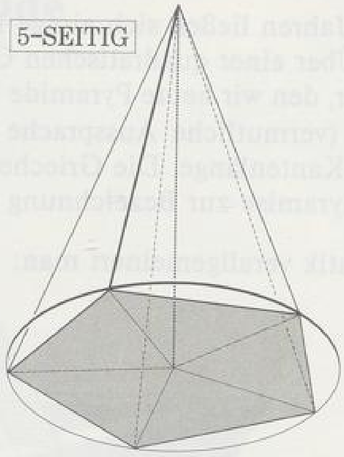
> Verbindet man alle Punkte eines Vielecks mit einem Punkt S, der außerhalb der Vieleckebene liegt, so entsteht der **Mantel** einer Pyramide.
> Die Vieleckfläche heißt **Grundfläche;** zusammen mit der Mantelfläche bildet sie die Pyramide. S heißt Spitze der Pyramide.
> Mantel und Grundfläche bilden zusammen die **Oberfläche** der Pyramide.

Ist die Grundfläche ein n-Eck, so besteht der Mantel aus n Dreiecken (Seitenflächen); die Pyramide heißt dann **n-seitig.**
Das Lot (und auch seine Länge) von der Pyramidenspitze auf die Vieleckebene heißt **Höhe h** der Pyramide; der Lotfußpunkt heißt **Höhenfußpunkt F.**

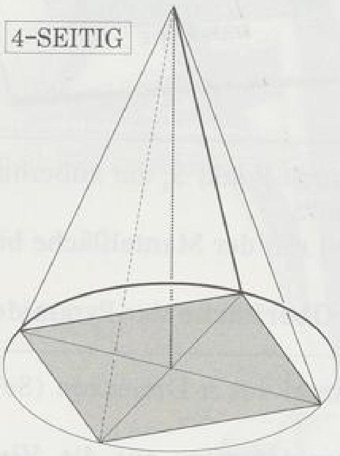


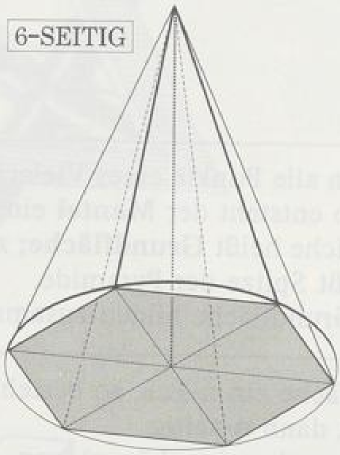
Ein n-Eck heißt **regelmäßig** (regulär), wenn es lauter gleich lange Seiten und einen Umkreis hat.





Eine Pyramide heißt **regelmäßig** (regulär), wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck ist und der Höhenfußpunkt mit dem Umkreismittelpunkt der Grundfläche zusammenfällt.





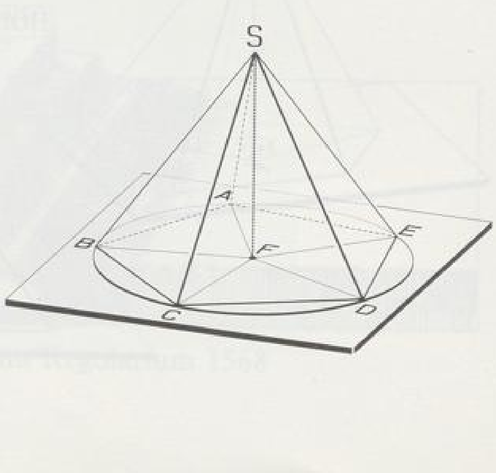
Man sieht leicht ein, daß bei einer regelmäßigen Pyramide auch die Seitenkanten alle gleich lang sind: die Dreiecke AFS, BFS, CFS, … sind nach dem SWS-Satz alle kongruent.

Kongruenz:

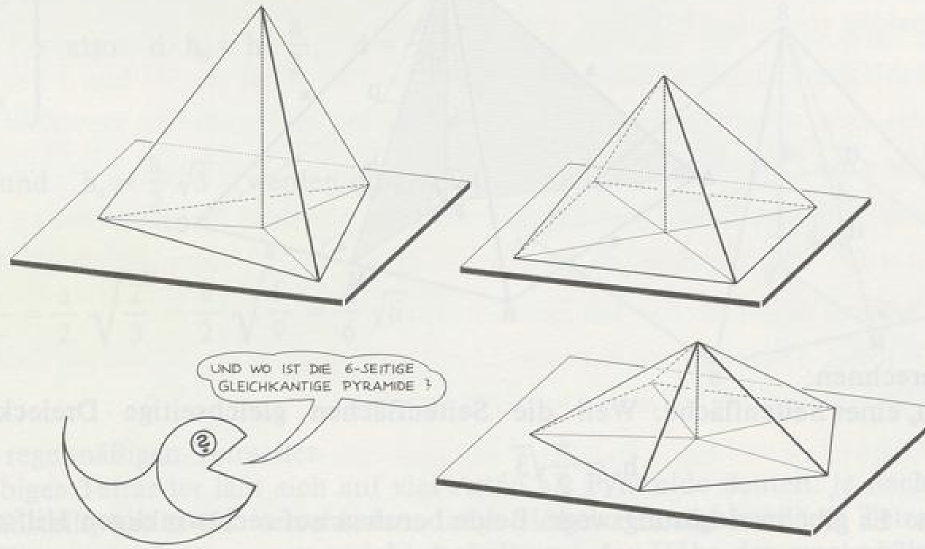
$AFS \cong \Delta BFS \cong \Delta CFS \cong \Delta DFS \cong \Delta EFS$

also gleich lange Seitenkanten:

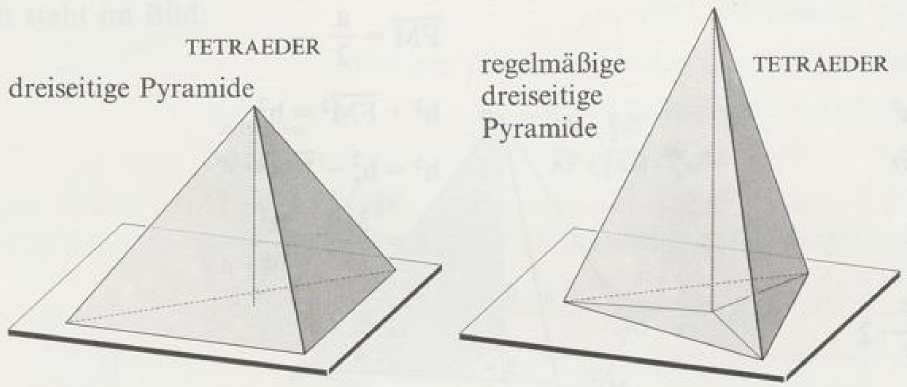
$\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS} = \overline{ES}$

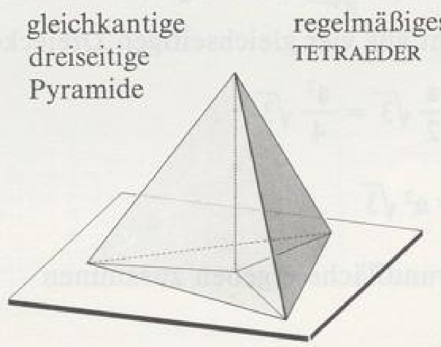


Eine regelmäßige Pyramide mit lauter gleich langen Kanten nennen wir **gleichkantig.** Eine gleichkantige Pyramide hat entweder drei oder vier oder fünf Seitenflächen. Die gleichkantige dreiseitige Pyramide ist etwas ganz Besonderes: bei ihr kann man die Grundfläche nicht mehr von den Seitenflächen unterscheiden; wir nennen sie **regelmäßiges Tetraeder.**



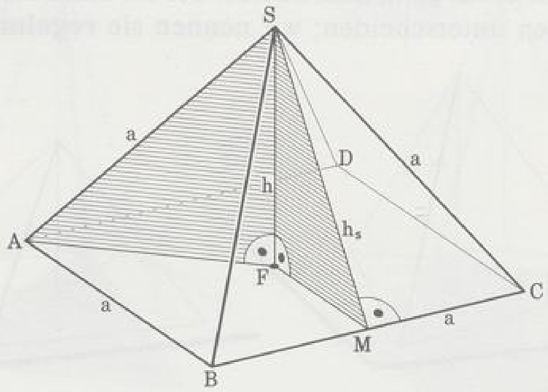
Jede dreiseitige Pyramide ist auch ein Tetraeder. Umgekehrt ist jedes Tetraeder auch eine Pyramide. Die regelmäßige dreiseitige Pyramide muß aber noch lange kein regelmäßiges Tetraeder sein. Erst die gleichkantige dreiseitige Pyramide ist zugleich auch ein regelmäßiges Tetraeder. Obacht: »regelmäßig« bedeutet bei Pyramiden etwas anderes als bei Tetraedern.





In zwei Beispielen machen wir uns mit den neuen Begriffen vertraut.

1. Gegeben ist eine gleichkantige 4seitige Pyramide der Kantenlänge a.



Wir berechnen:

Höhe h_s einer Seitenfläche: Weil die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind, ist

$$h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Höhe h: Es gibt zwei Lösungswege. Beide beruhen auf rechtwinkligen Hilfsdreiecken:

Dreieck AFS

[AF] ist die halbe Diagonale im Grundflächenquadrat:

$$\overline{AF} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$h^2 + \overline{AF}^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \overline{AF}^2$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot 2$$

Dreieck FMS

$$\overline{FM} = \frac{a}{2}$$

$$h^2 + \overline{FM}^2 = h_s^2$$

$$h^2 = h_s^2 - \overline{FM}^2$$

$$= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot 2$$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, F ist also von allen Pyramidenecken gleich weit entfernt.

Mantel M: Der Mantel besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken.

Fläche eines Dreiecks $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

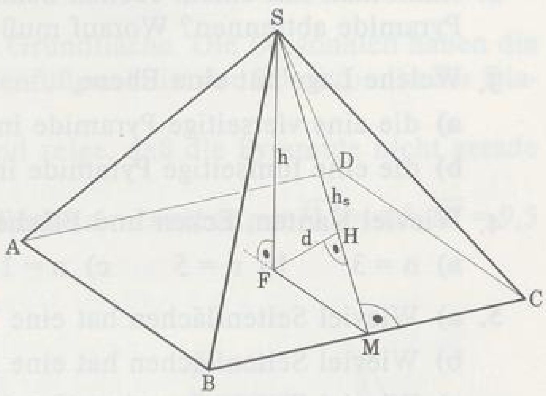
Mantelfläche $M = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$

Oberfläche S: Mantel und Grundfläche ergeben zusammen

$S = a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(\sqrt{3} + 1).$

Abstand d des Höhenfußpunkts F von einer Seitenfläche:
d = [FH] ist eine Höhe im Dreieck FMS. Wir berechnen den Flächeninhalt A des Dreiecks FMS auf zwei Arten:

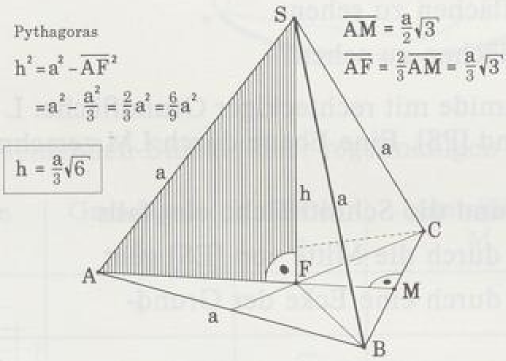
$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{a}{2} \\ A &= \frac{1}{2}\cdot d\cdot h_s \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad d\cdot h_s = h\cdot\frac{a}{2}, \quad d = \frac{ah}{2h_s}$$



$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ werden eingesetzt:

$$d = \frac{a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}}{2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

2. Höhe im regelmäßigen Tetraeder
Ein beliebiges Tetraeder läßt sich auf vier Arten als Pyramide deuten: je nachdem, wie man es hinstellt, hat es vier verschiedene lange Höhen. Im regelmäßigen Tetraeder sind alle vier Höhen gleich lang, man spricht deshalb von **der** Höhe des regelmäßigen Tetraeders.
Wir berechnen die Länge der Höhe eines regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge a. Die Grundfläche ABC ist ein gleichseitiges Dreieck mit F als Mittelpunkt. Also ist F auch Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und teilt deshalb [AM] im Verhältnis 2:1. Der Rest steht im Bild.



Aufgaben

1. Eine Pyramide ist durch Spitze und Grundfläche festgelegt. Welche Körper lassen sich auf verschiedene Arten als Pyramide deuten?

2. Kann man mit einem ebenen Schnitt von jedem Quader eine dreiseitige regelmäßige Pyramide abtrennen? Worauf muß man achten?

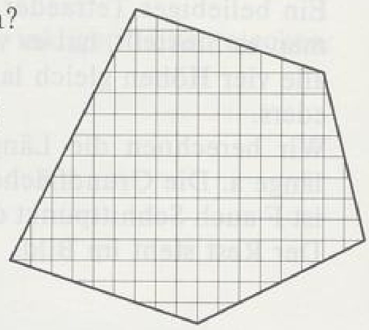
3. Welche Lage hat eine Ebene,
   a) die eine vierseitige Pyramide in zwei vierseitige Pyramiden zerschneidet?
   b) die eine fünfseitige Pyramide in zwei vierseitige Pyramiden zerschneidet?

4. Wieviel Kanten, Ecken und Flächen hat eine n-seitige Pyramide, falls
   a) $n = 3$ **b)** $n = 5$ **c)** $n = 16$ **d)** $n = 100$ **e)** n beliebig?

5. **a)** Wieviel Seitenflächen hat eine 16-kantige Pyramide?
   b) Wieviel Seitenflächen hat eine 32-eckige Pyramide?
   c) Wieviel Kanten hat eine 49-eckige Pyramide?

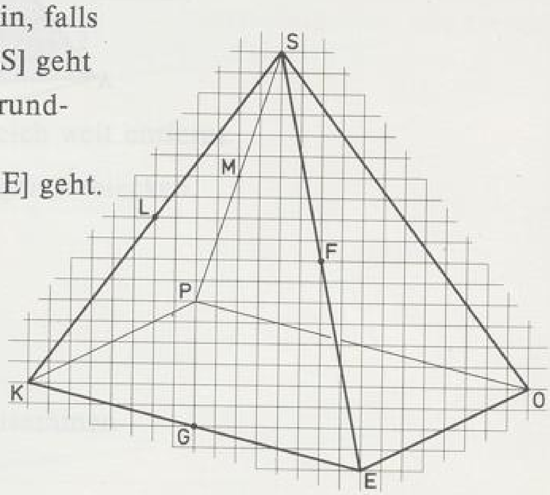
6. **a)** Warum gibt es keine Pyramide mit ungerader Kantenzahl?
   b) Warum hat jede Pyramide so viele Ecken wie Flächen?

7. Umriss
   Zeichne den Umriß ab und vervollständige ihn zum Bild
   a) einer vierseitigen Pyramide
   b) einer fünfseitigen Pyramide
   c) eines dreiseitigen Prismas.



8. Wie muß man eine n-seitige Pyramide anschauen,
   a) um alle n Seitenflächen zu sehen
   b) um $n - 2$ Seitenflächen zu sehen?

9. KEOPS ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. L und M sind die Mitten der Seitenkanten [KS] und [PS]. Eine Ebene durch LM zerschneidet die Pyramide in zwei Teilkörper.
   Zeichne KEOPS ab und die Schnittfläche ein, falls
   a) die Schnittebene durch die Mitte von [ES] geht
   b) die Schnittebene durch eine Ecke der Grundfläche geht
   c) die Schnittebene durch die Mitte von [KE] geht.



•10. »Gerade« Pyramiden

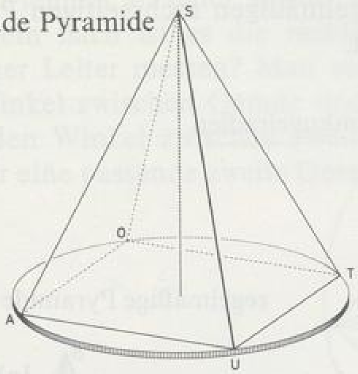
Unter einer geraden Pyramide versteht man eine Pyramide mit lauter gleich langen Seitenkanten.

a) Begründe: Der Höhenfußpunkt F einer geraden Pyramide ist der Umkreismittelpunkt der Grundfläche.

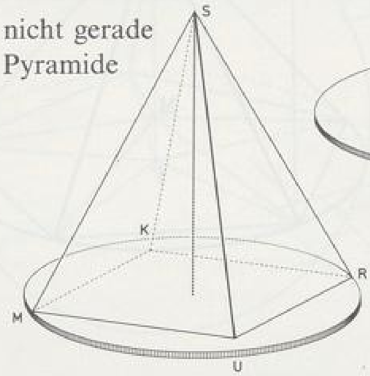
b) Die Pyramide MURKS hat eine Raute als Grundfläche. Die Diagonalen haben die Längen 8 und 10, die Höhe ist 9. Der Höhenfußpunkt ist der Schnittpunkt der Diagonalen.
Berechne die Längen der Seitenkanten und zeige, daß die Pyramide nicht gerade ist, obwohl sie gerade aussieht.

c) Die gerade Pyramide MIES hat als Grundfläche ein Dreieck mit $\overline{IM} = 4{,}5$, $\overline{EI} = 9{,}5$ und $\overline{EM} = 7{,}3$.
Warum sieht MIES nicht gerade aus?

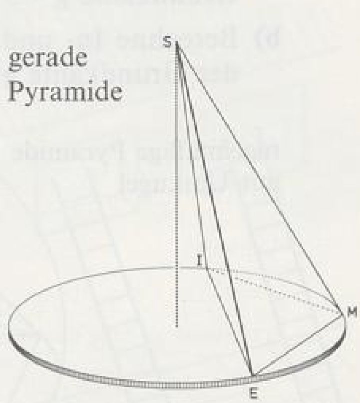
gerade Pyramide



nicht gerade Pyramide



gerade Pyramide



11. Berechne jeweils die fehlenden Stücke einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide:

	Seitenkante s	Grundkante g	Höhe h	Mantelfläche M
a)	3	4		
b)	$2\sqrt{5}$		$\sqrt{2}$	
c)		2	$\sqrt{62}$	
d)		2		12
•e)			$\sqrt{7}$	$2\sqrt{15}$
•f)	3			$12\sqrt{2}$

12. Berechne jeweils die fehlenden Stücke einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide:

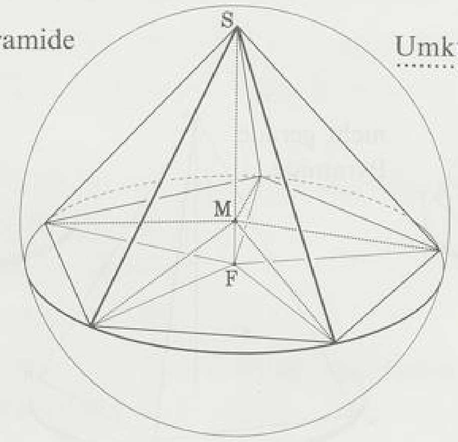
	s	g	h	M
a)	10	6		
b)		3,6	4,8	
c)		5		240

•**13.** Die Kugel, die durch alle Ecken einer Pyramide geht, heißt **Umkugel.** Die Kugel, die alle Flächen berührt, heißt **Inkugel.**

a) Berechne In- und Umkugelradius einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit der Grundkante $g = 5$ und der Höhe $h = 10$.

b) Berechne In- und Umkugelradius einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit der Grundkante $g = a$ und der Höhe $h = 4a$.

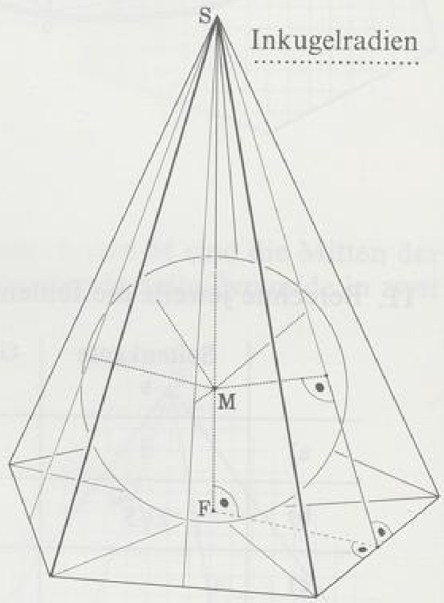
regelmäßige Pyramide mit Umkugel



Umkugelradien

regelmäßige Pyramide mit Inkugel

Inkugelradien



14. Zwei kongruente gleichkantige vierseitige Pyramiden (Kantenlänge 5) werden so zusammengesetzt, daß sich ihre Grundflächen decken.

a) Zeichne den Körper.

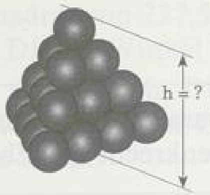
b) Berechne seine Oberfläche.

c) Berechne die Entfernung der beiden Pyramidenspitzen.

15. Gegeben: Kugelradius r

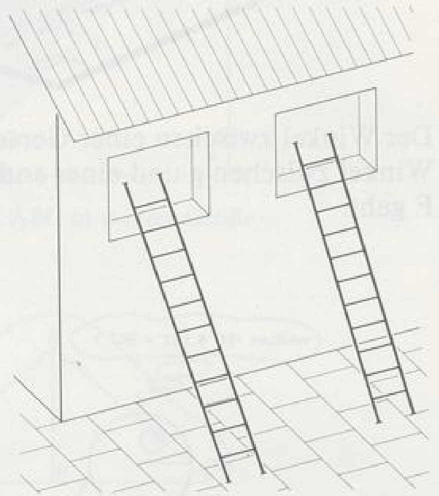
a)

b)



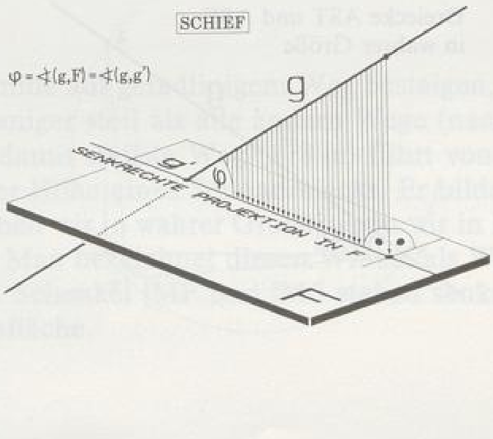
7.2 Winkel im Raum

Zwei Leitern lehnen an einer Wand. Welche ist steiler? Dem Anschein nach ist es die rechte. Kann man die Steilheit einer Leiter messen? Man verwendet dafür als Maß den Winkel zwischen Gerade und Ebene. Weil wir bisher nur den Winkel zwischen zwei Geraden kennen, brauchen wir eine passende zweite Gerade in der Ebene.



Definition:

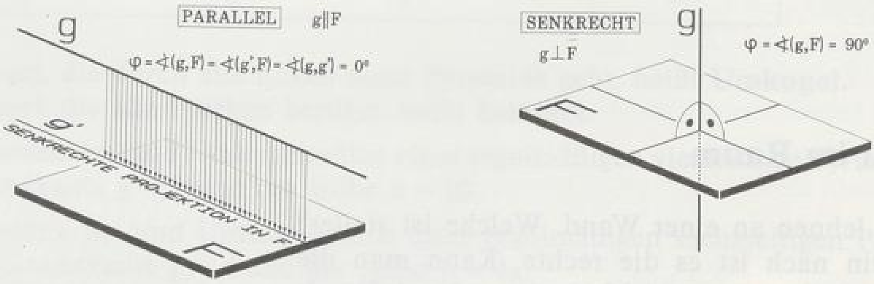
> Der Winkel φ zwischen einer Gerade g und einer Ebene F ist der Winkel zwischen der Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g′ in der Ebene. Symbolisch $\varphi = \sphericalangle(g, F)$



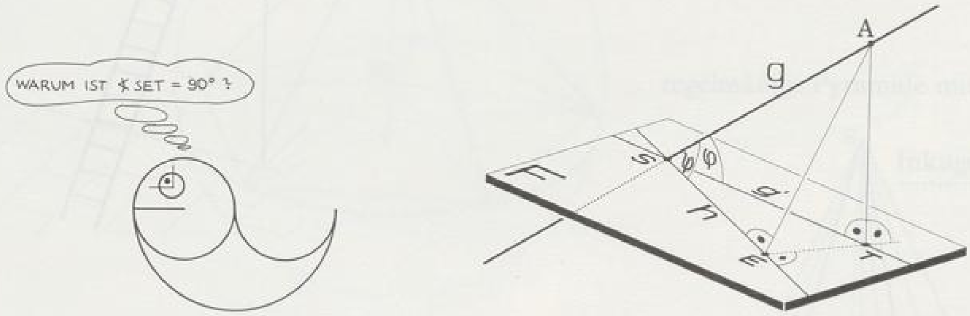
Zwei Sonderfälle müssen eigens definiert werden:

Definition:

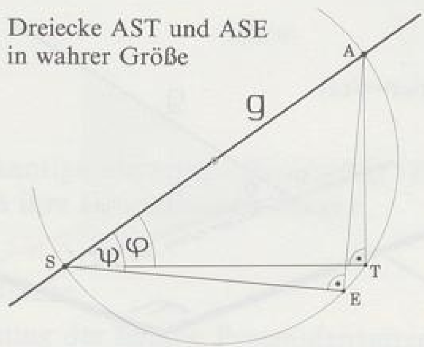
Ist die Gerade g parallel zur Ebene F, so ist der Winkel zwischen g und F gleich 0°. Ist die Gerade g senkrecht zur Ebene F, so ist der Winkel zwischen g und F gleich 90°.



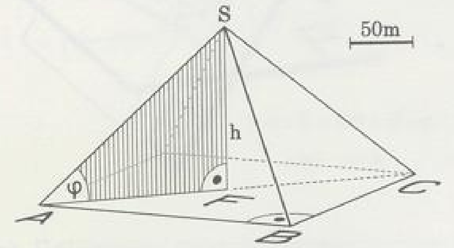
Der Winkel zwischen einer Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g′ ist kleiner als jeder Winkel zwischen g und einer andern Gerade h in F, die durch den Schnittpunkt S von g und F geht.

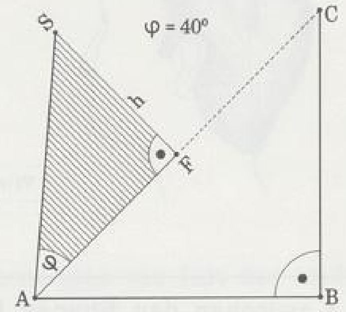


Beweis: Fällt man von A das Lot auf h (Lotfußpunkt E) und zeichnet die rechtwinkligen Dreiecke AST und ASE in wahrer Größe wieder mit der gemeinsamen Hypotenuse [AS], dann liegen E und T auf dem Thaleskreis über [AS].
[AE] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ETA und deshalb länger als die Kathete [AT]. Also ist auch der Winkel ψ größer als der Winkel φ.

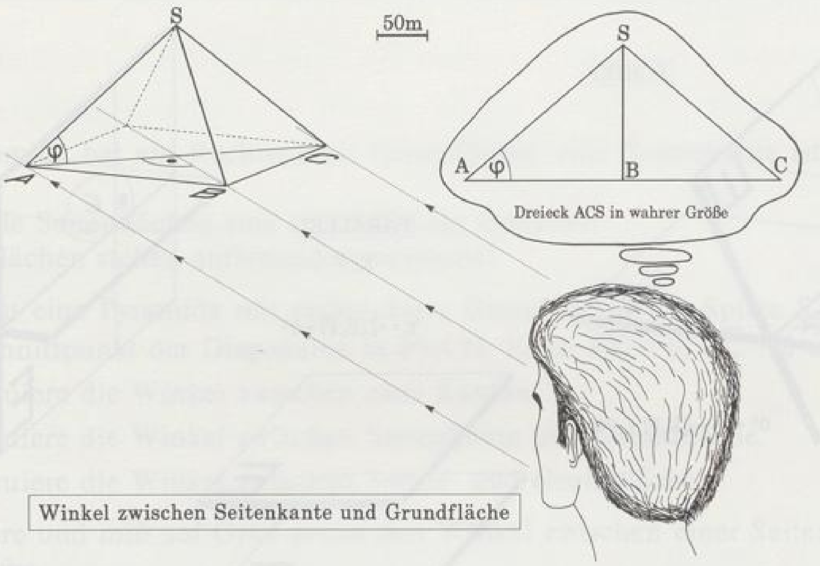


In einem Beispiel konstruieren wir den Winkel zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche der Cheops-Pyramide. Die Grundfläche ist ein Quadrat von 227,5 m Seitenlänge. Die Spitze liegt 137 m überm Schnittpunkt der Diagonalen. Diesen Winkel finden wir im Dreieck AFS; wir konstruieren es aus $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\sphericalangle F = 90°$ und $\overline{SF} = h$. Die Zeichnung ergibt 40°, ein genauerer Wert ist 40,4°. Man sieht diesen Winkel in wahrer Größe, wenn man in Richtung der Grundflächen-Diagonale auf die Pyramide blickt.



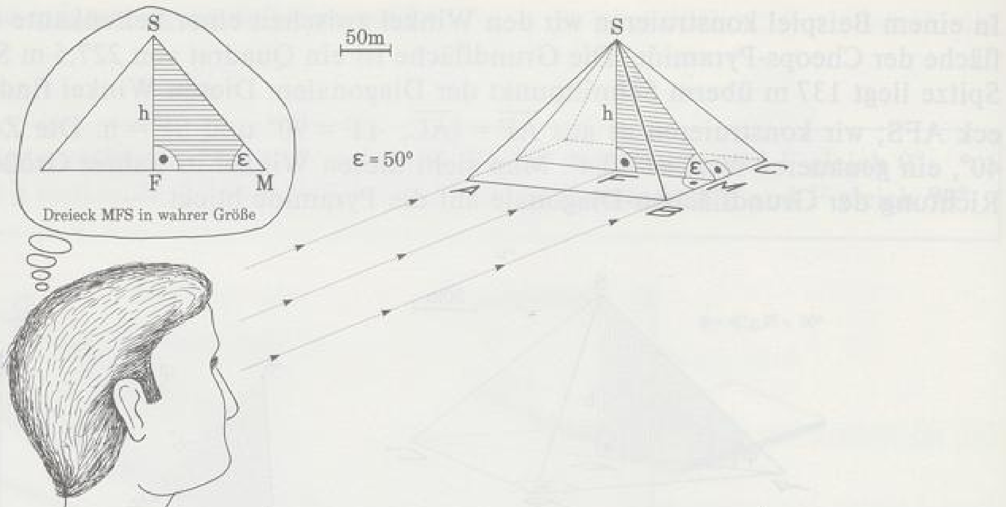


Dreieck ABC in wahrer Größe



Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche

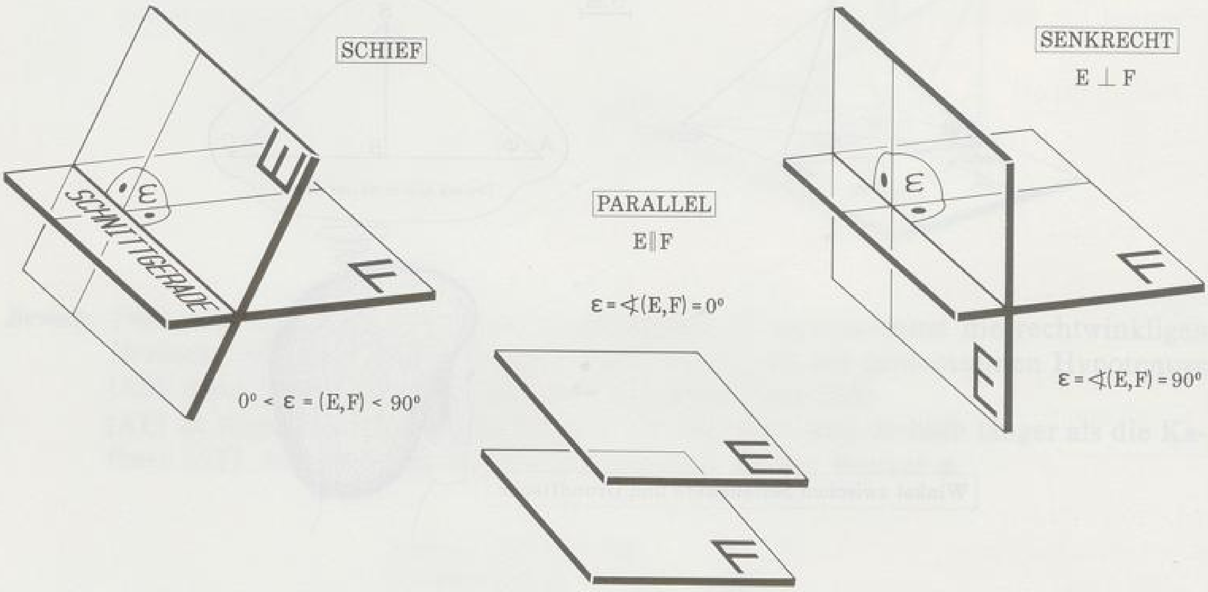
Will man die Cheops-Pyramide auf geradlinigem Weg besteigen, dann ist der Weg auf einer Kante länger und damit weniger steil als alle andern Wege (nach der Konstruktion mißt er 211 m). Der kürzeste und damit steilste Weg (178 m) führt von der Mitte M einer Grundkante zur Spitze S längs der Höhe eines Seitendreiecks. Er bildet mit der Grundfläche den Winkel ε. Den Winkel ε sehen wir in wahrer Größe, wenn wir in Richtung einer Grundkante auf die Pyramide schauen. Man bezeichnet diesen Winkel als Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche. Seine beiden Schenkel [MF und [MS stehen senkrecht auf der Schnittgerade BC von Grund- und Seitenfläche.



Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche

Definition:

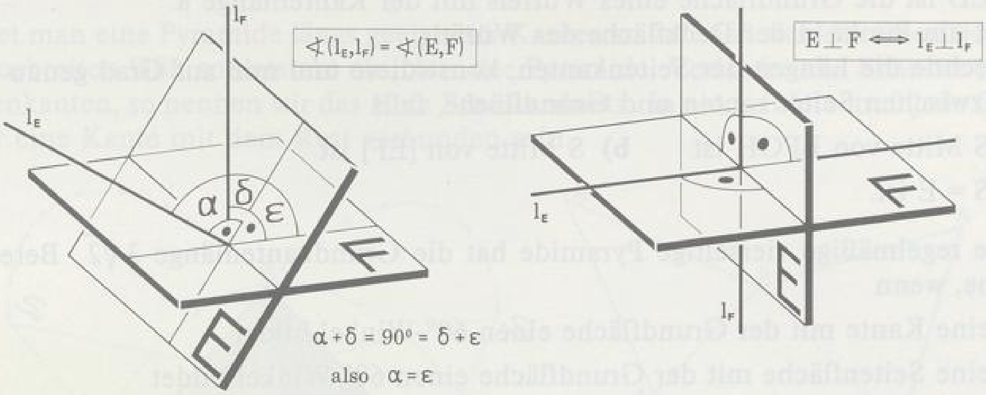
> Der Winkel ε zwischen den Ebenen E und F ist der Winkel zwischen zwei Loten der Schnittgerade; ein Lot liegt in E, das andere in F. Symbolisch $\varepsilon = \sphericalangle\,(E, F)$
> Sind die Ebenen parallel, so ist der Winkel 0°.



Konstruieren wir den Winkel ε zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Cheops-Pyramide, so ergibt sich $\varepsilon = 50°$.
Aus der Definition für den Winkel zwischen zwei Ebenen folgt der

Satz:
Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist genauso groß wie der Winkel zwischen zwei Loten der Ebenen.

Der Beweis steht im Bild.



Eine wichtige Folgerung daraus ist der

Satz:
Zwei Ebenen stehen aufeinander senkrecht, wenn eine ein Lot der andern enthält.

Aufgaben

1. Eine Pyramide hat ein Rechteck als Grundfläche, eine Seitenkante ist zugleich auch Höhe.
Zeige: Alle Seitenflächen sind rechtwinklige Dreiecke.
Welche Flächen stehen aufeinander senkrecht?

•2. FUCHS ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche; die Spitze S liegt senkrecht überm Schnittpunkt der Diagonalen in FUCH. Es ist $\overline{FU} = 6$, $\overline{UC} = 8$ und $h = 12$.
a) Konstruiere die Winkel zwischen zwei Kanten.
b) Konstruiere die Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche.
c) Konstruiere die Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche.

•3. Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche
a) bei einer gleichkantigen dreiseitigen Pyramide
b) bei einer gleichkantigen vierseitigen Pyramide
c) bei einer gleichkantigen fünfseitigen Pyramide.

•4. Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen zwei Seitenflächen einer gleichkantigen
a) dreiseitigen Pyramide **b)** vierseitigen Pyramide
c) fünfseitigen Pyramide.

•**5.** ABCDS ist eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S.
ABCD ist die Grundfläche eines Würfels mit der Kantenlänge a.
S ist ein Punkt in der Deckfläche des Würfels.
Berechne die Längen der Seitenkanten, konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen Seitenkanten und Grundfläche, falls

a) S Mitte von EFGH ist **b)** S Mitte von [EF] ist

c) S = E ist.

•**6.** Eine regelmäßige vierseitige Pyramide hat die Grundkantenlänge $3\sqrt{2}$. Berechne die Höhe, wenn

a) eine Kante mit der Grundfläche einen 60°-Winkel bildet

b) eine Seitenfläche mit der Grundfläche einen 60°-Winkel bildet

c) zwei benachbarte Seitenkanten einen 60°-Winkel bilden

d) zwei gegenüberliegende Seitenkanten einen 60°-Winkel bilden

e) eine Seitenkante und eine Grundkante einen 60°-Winkel bilden

f) eine Seitenkante und eine Diagonale der Grundfläche einen 60°-Winkel bilden.

•**7.** In der regelmäßigen Pyramide MOPS mit der Höhe 8 hat eine Grundkante die Länge 6.

a) Berechne die Oberfläche S.

b) Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche.

c) Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen zwei Seitenflächen.

•**8.** ABCDEFGH ist ein Würfel mit der Kantenlänge 10. In ihm schneiden sich zwei Eckflächen, es entsteht die Pyramide ELFI.

a) Berechne die Kantenlängen von ELFI.

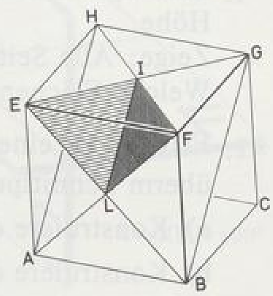
b) Konstruiere den Abstand von LI und der Mitte M von [EF].

Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen

c) den Kanten

d) Kanten und Flächen

e) den Flächen.



•**9.** ABCDEFGH ist ein Würfel mit der Kantenlänge 11. In ihm schneiden sich zwei Diagonalflächen, es entsteht eine Pyramide mit den Ecken B, E, F, G und H.

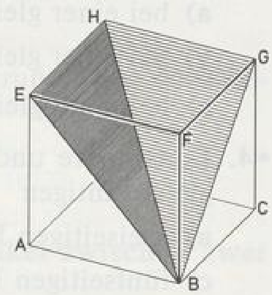
a) Beschreibe die Pyramide.

Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen

b) Seiten- und Grundkanten

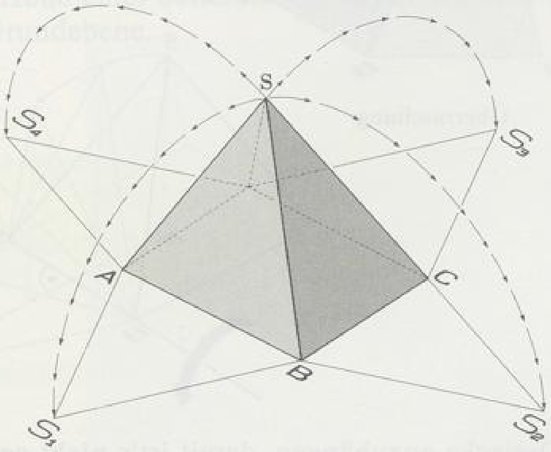
c) Seiten- und Grundfläche

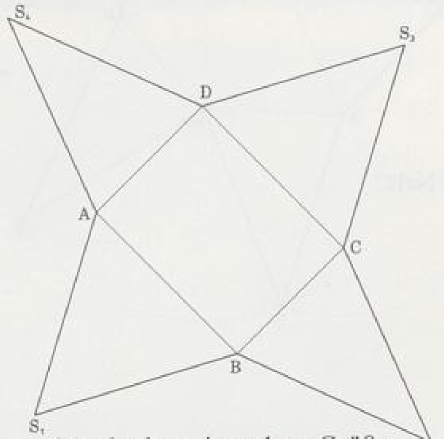
d) den Seitenflächen.



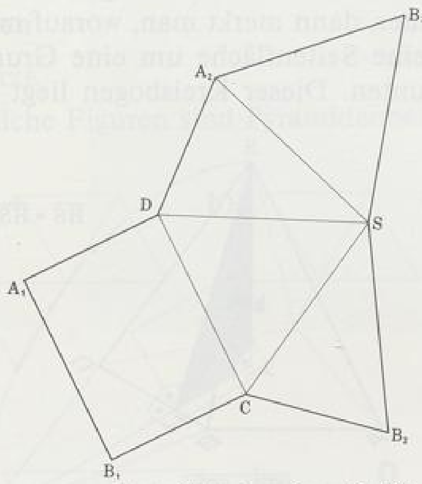
7.3 Das Netz einer Pyramide

Schneidet man eine Pyramide längs geeigneter Kanten so auf, daß sich die Oberfläche in der Ebene ausbreiten läßt, so entsteht ein Netz der Pyramide. Verlaufen die Schnitte nur längs der Seitenkanten, so nennen wir das Netz **Standardnetz.** In einem Netz muß jede Seitenfläche über eine Kante mit dem Rest verbunden sein.

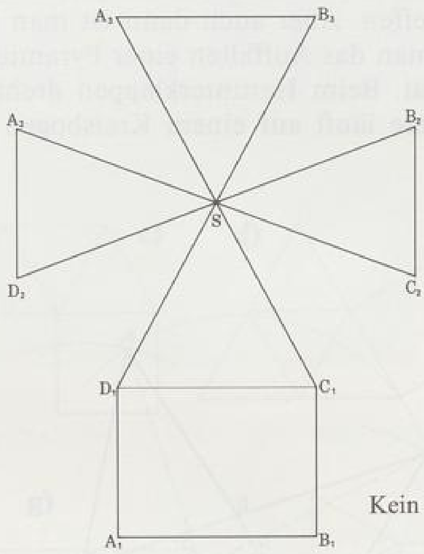




Standardnetz in wahrer Größe

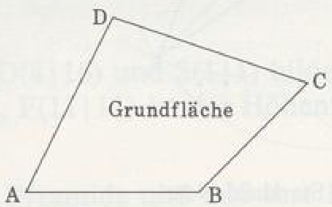


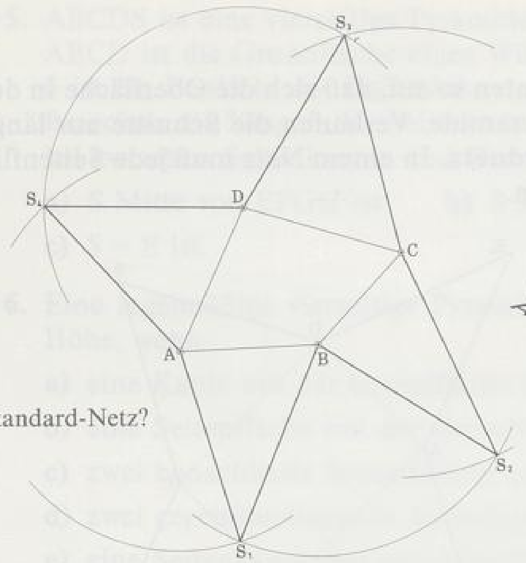
anderes Netz in wahrer Größe



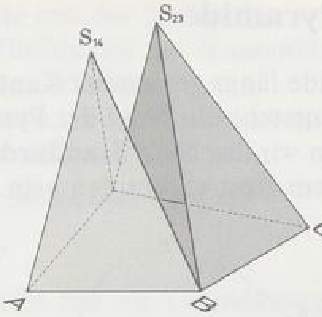
Kein Netz!

Es ist nicht schwer, von einer gegebenen Pyramide ein Netz zu zeichnen. Umgekehrt ist aber nicht alles, was wie ein Pyramidennetz aussieht, auch tatsächlich das Netz einer Pyramide. Wie zeichnet man zu einer gegebenen Grundfläche ein Standardnetz, das sich zu einer Pyramide falten läßt?

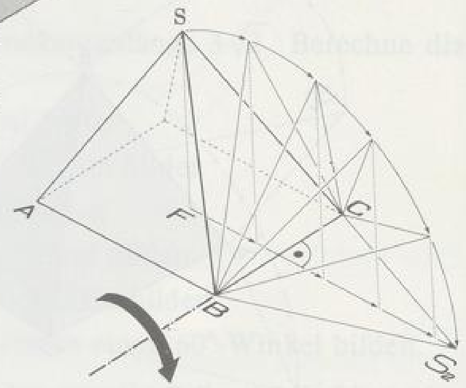




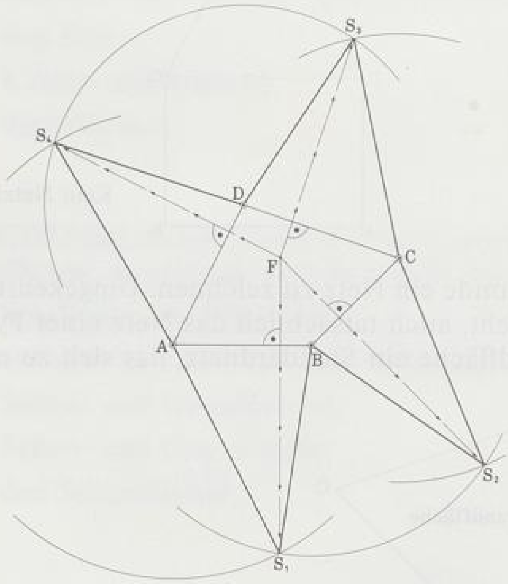
Standard-Netz?



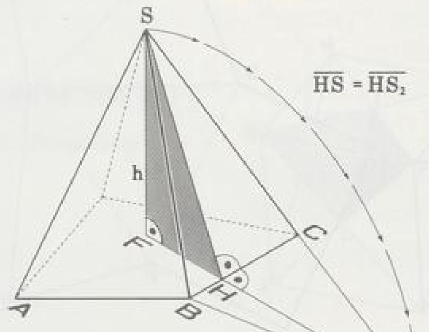
Überraschung



An die Grundkanten bloß irgendwelche Dreiecke anzuhängen, damit ist's nicht getan. Auf alle Fälle müssen die Dreieckseiten gleich lang sein, die beim Hochklappen in einer Kante zusammentreffen. Aber auch dann ist man beim Falten vor Überraschungen nicht sicher. Beobachtet man das Auffalten einer Pyramide genauer, dann merkt man, worauf man noch zu achten hat. Beim Herunterklappen dreht sich eine Seitenfläche um eine Grundkante, und die Spitze läuft auf einem Kreisbogen nach unten. Dieser Kreisbogen liegt in einer

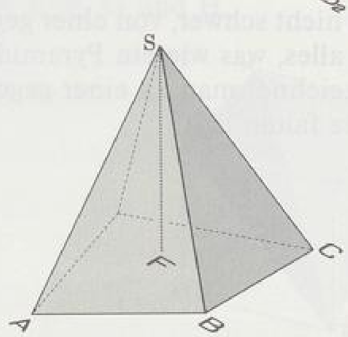


Standard-Netz!



$h = \sqrt{\overline{HS}^2 - \overline{HF}^2} > 0$

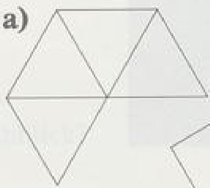
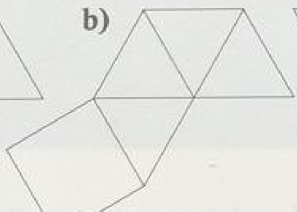
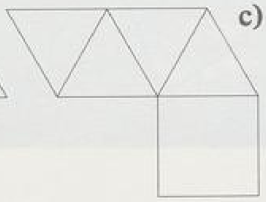
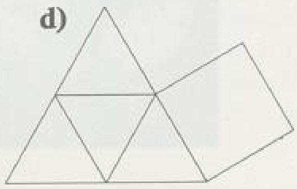
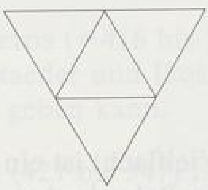
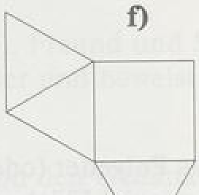
also $\overline{HS} > \overline{HF}$ also $\overline{HS_2} > \overline{HF}$

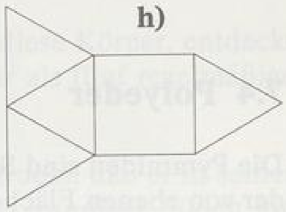


Ebene, die senkrecht ist zur Drehachse und damit senkrecht zur Grundebene. Die senkrechte Projektion der Spitze in der Grundebene wandert dabei auf dem Lot, das man von F auf die Grundkante fällt. Das gilt für jedes Seitendreieck. Deshalb treffen sich in jedem Standardnetz der Pyramide die Lote, die man von S_1, S_2, ... auf die zugehörigen Grundkanten fällt, im Höhenfußpunkt F der Pyramide.
Und auch dann kann's immer noch schiefgehen! Wir müssen nämlich noch berücksichtigen, daß die Höhe einer Seitenfläche (durch die Spitze) länger ist als ihre senkrechte Projektion in der Grundebene.

Aufgaben

1. NETZE
Welche Figuren sind Pyramidennetze?

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)


2. A(3|11), B(10|4), C(16|16), D(8|16) und S(1|1) bilden das unvollständige 24
Netz einer Pyramide ABCDS, F(11|11) ist der Höhenfußpunkt. 0 0 19
0
a) Vervollständige das Netz.
b) Konstruiere die Höhe der Pyramide und miß ihre Länge.

3. Die Pyramide ABCDS hat als Grundfläche eine Raute mit der Seitenlänge 6.
Die Diagonale [AC] hat die Länge $6\sqrt{3}$. Der Diagonalenschnittpunkt M ist Höhenfußpunkt.
Die Höhe [MS] der Pyramide hat die Länge 3.

a) Wie groß sind die Innenwinkel der Raute ABCD? Begründung!

b) Berechne die Längen der Seitenkanten und die Winkel zwischen Seitenkanten und Grundfläche.

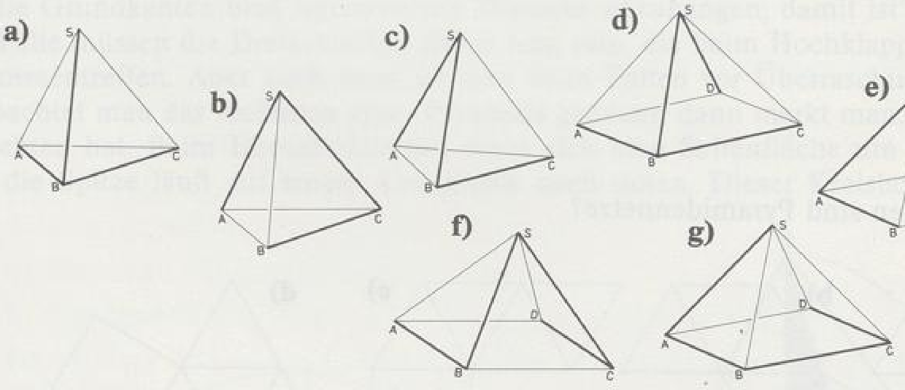
c) Berechne den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

d) Konstruiere das Standardnetz.

4. Die Pyramide ABCDS hat als Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge 4.
Von den Seitenkanten ist bekannt: $\overline{CS} = 8$, $\overline{DS} = 5$ und $\overline{AS} = 7$.
Konstruiere das Standardnetz der Pyramide und miß die Länge $\overline{BS}$. (Querformat, ganze Seite, Quadrat in die Mitte!)

•5. AUFSCHNITT

Gleichkantige Pyramiden (Kantenlänge 4) werden entlang den dick gezeichneten Kanten aufgeschnitten und auseinandergefaltet. Zeichne die Netze.



7.4 Polyeder

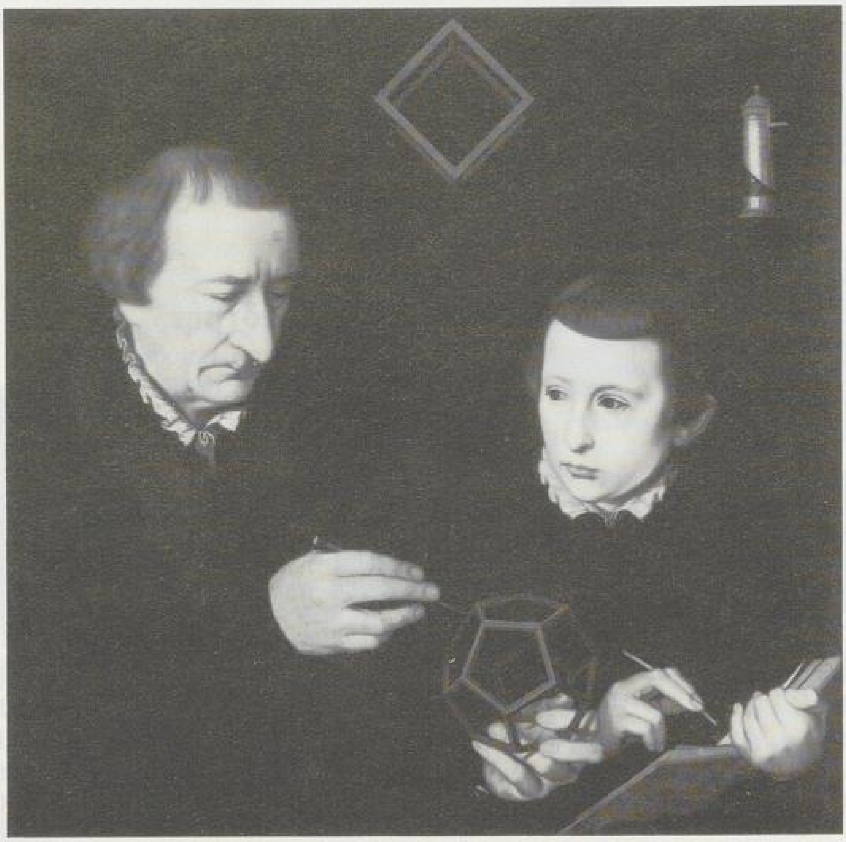
Die Pyramiden sind Sonderfälle von Polyedern. Das Polyeder (oder Vielflach) ist ein Körper, der von ebenen Flächen begrenzt ist. Je nachdem, wieviel Flächen das Polyeder hat, heißt es Tetraeder (Vierflach), Pentaeder (Fünfflach), Hexaeder (Sechsflach) usw.
Dem Schweizer Mathematiker LEONHARD EULER (1707 bis 1783) verdanken wir die Wiederentdeckung eines Satzes, den vermutlich schon ARCHIMEDES (285 bis 212) gekannt hat:

Polyedersatz von Euler:

Hat ein konvexes Polyeder F Flächen, E Ecken und K Kanten, so gilt: $F + E - K = 2$.

Bei konkaven Polyedern können sich für F + E − K auch Zahlen ergeben, die größer sind als zwei. Ein Beweis des Polyeder-Satzes steht am Ende des Kapitels.

Von ästhetisch und mathematisch hohem Reiz sind die regelmäßigen Polyeder. Unter einem **regelmäßigen** Polyeder versteht man einen konvexen Körper: seine Flächen sind regelmäßige Vielecke, in jeder Ecke laufen gleichviel Kanten zusammen. Es gibt zwar unendlich viele regelmäßige Vielecke, aber erstaunlicherweise nur fünf regelmäßige Polyeder.



Durchblick?

Nach der Überlieferung kennen schon Pythagoras (≈580 bis ≈496) und seine Schüler das Tetraeder, den Würfel und das Dodekaeder.

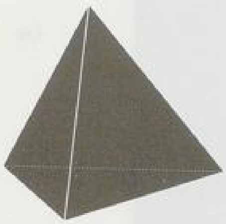
Theạitetos (≈416 bis 369), Freund und Schüler Platons, konstruiert diese Körper, entdeckt das Oktaeder und Ikosaeder und beweist als erster, daß es nicht mehr als fünf regelmäßige Körper geben kann.

Platon (427 bis 347) ist von den Gedanken des Theaitetos so beeindruckt, daß er in seiner Deutung der Natur auf die fünf regelmäßigen Polyeder zurückgreift. Grundlage bilden die Lehre von Empẹdokles (≈490 bis 430), wonach die Welt aus vier Elementen besteht, und die Lehre von Demọkritos (≈460 bis ≈370), wonach ein Stoff aus nicht teilbaren Bausteinen, den Atomen, zusammengesetzt ist. Nach Platon haben die Atome eines Elements die Gestalt eines regelmäßigen Polyeders:

Element	Gestalt der Atome	Deutung
Erde	Würfel	Quadrate für quaderhaft fest
Wasser	Ikosaeder	Dreiecke für flüchtig, leicht beweglich
Feuer	Tetraeder	
Luft	Oktaeder	

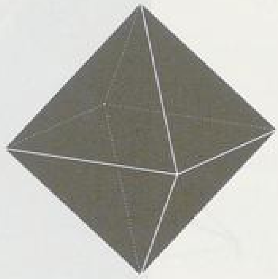
Übrig bleibt das Dodekaeder. Ihm ordnet PLATON das Weltall zu: Jeder der zwölf Seitenflächen entspricht eines der zwölf Sternbilder. Seitdem heißen die fünf regelmäßigen Körper auch **Platonische Körper.**

Die fünf Platonischen Körper

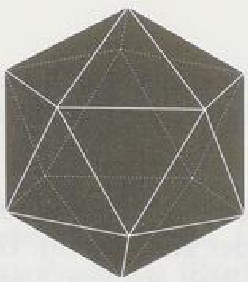


regelmäßiges
Tetraeder
4 Flächen
4 Ecken
6 Kanten

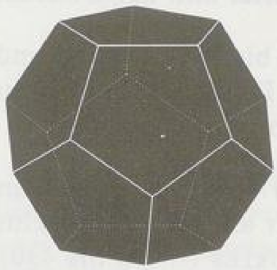
Würfel
6 Flächen
8 Ecken
12 Kanten



regelmäßiges
Oktaeder
8 Flächen
6 Ecken
12 Kanten



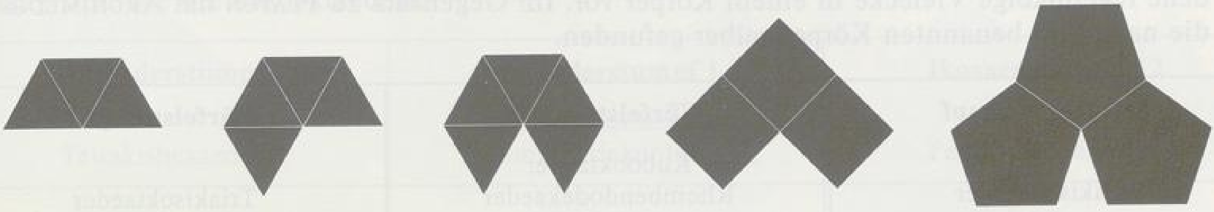
regelmäßiges
Ikosaeder
20 Flächen
12 Ecken
30 Kanten



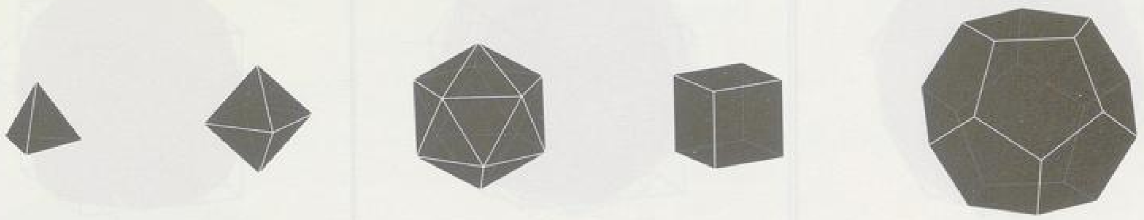
regelmäßiges
Dodekaeder
12 Flächen
20 Ecken
30 Kanten

Der Beweis dafür, daß es nicht mehr regelmäßige Körper als die fünf Platonischen Körper gibt, bildet den krönenden Abschluß des berühmtesten Geometriebuchs »Die Elemente« von Euklid (um 300 v. Chr.).

Grundidee: Die Summe der Winkel, die zwischen den Kanten einer konvexen Ecke entstehen, ist immer kleiner als 360°.

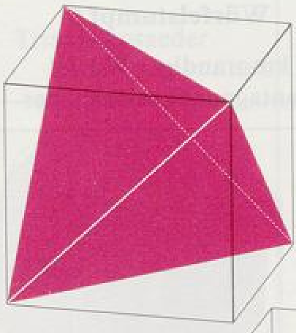


$3 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ $4 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ $5 \cdot 60^\circ < 360^\circ$ $3 \cdot 90^\circ < 360^\circ$ $3 \cdot 108^\circ < 360^\circ$

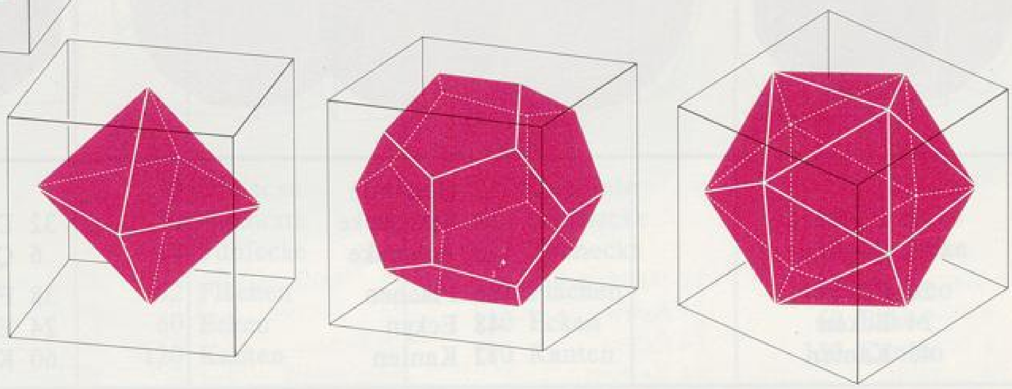


Tetraeder Oktaeder Ikosaeder Würfel Dodekaeder

Weil an jeder Ecke mindestens drei regelmäßige Vielecke aneinanderstoßen müssen, kommen nur in Frage: gleichseitige Dreiecke (Kantenwinkel 60°), Quadrate (Kantenwinkel 90°) und regelmäßige Fünfecke (Kantenwinkel 108°). Deshalb gibt es höchstens fünf Möglichkeiten für eine »Platonische« Ecke.

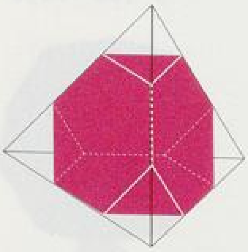
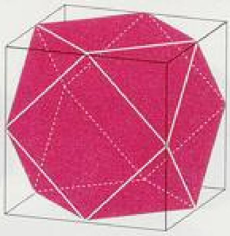
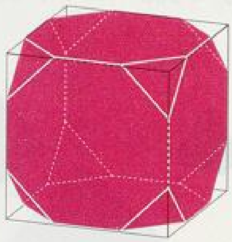


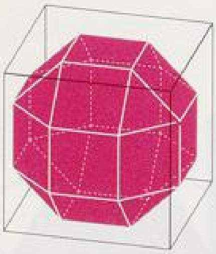
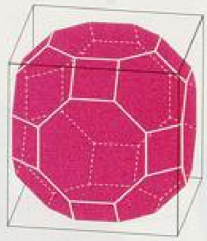
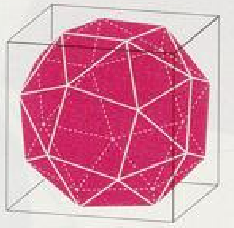
Vier Platonische Körper im Würfel



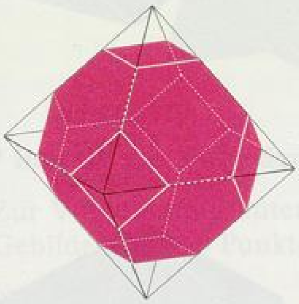
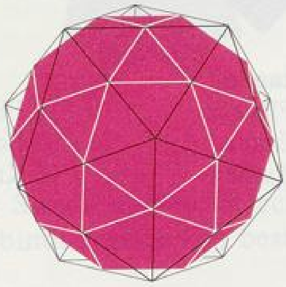
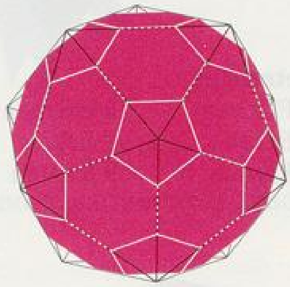
* Die dreizehn Archimedischen Körper

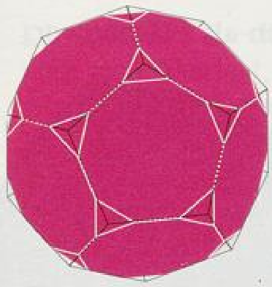
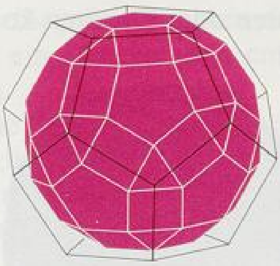
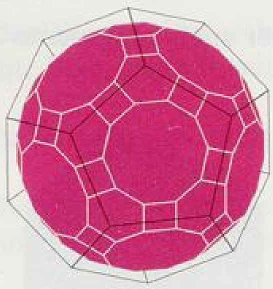
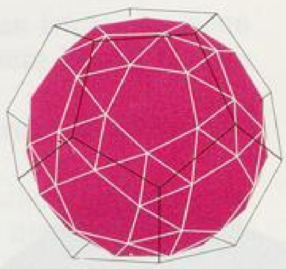
Schneidet man von Platonischen Körpern Ecken oder Kanten so ab, daß Stümpfe mit regelmäßigen Vielecken als Grenzflächen entstehen, so ergeben sich die berühmten 13 **Archimedischen Körper.** Wie bei den Platonischen Körpern treffen sich in jeder Ecke gleichviel Kanten so, daß die Ecken deckungsgleich sind, aber jetzt kommen zwei oder drei verschiedene regelmäßige Vielecke in einem Körper vor. Im Gegensatz zu PLATON hat ARCHIMEDES die nach ihm benannten Körper selber gefunden.

Tetraederstumpf Triakistetraeder	**Würfelstumpf 1** Kubooktaeder Rhombendodekaeder	**Würfelstumpf 2** Triakisoktaeder
		
4 Dreiecke 4 Sechsecke 8 Flächen 12 Ecken 18 Kanten	8 Dreiecke 6 Quadrate 14 Flächen 12 Ecken 24 Kanten	8 Dreiecke 6 Achtecke 14 Flächen 24 Ecken 36 Kanten

Würfelstumpf 3 kleines Rhombikubooktaeder Trapezoidikositetraeder	**Würfelstumpf 4** großes Rhombikubooktaeder Hexakisoktaeder	**Würfelstumpf 5** kronrandiger Würfel Pentagonalikositetraeder
		
8 Dreiecke 18 Quadrate 26 Flächen 24 Ecken 48 Kanten	12 Quadrate 8 Sechsecke 6 Achtecke 26 Flächen 48 Ecken 72 Kanten	32 Dreiecke 6 Quadrate 38 Flächen 24 Ecken 60 Kanten

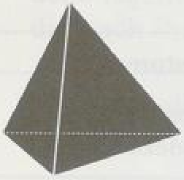
Die Namen in der ersten Zeile sind keine allgemein üblichen Bezeichnungen. Wir haben sie gewählt um zu erklären, welcher Platonische Körper hier im Bild durch Abstumpfen in den Archimedischen Körper übergeht. Außerdem kann man die deutschen Namen leichter behalten (und sprechen!) als die bizarren wissenschaftlichen Fremdwortungetüme in den Zeilen darunter. Fürs Abstumpfen gibts auch andre Wege: Der Würfelstumpf 1 zum Beispiel entsteht auch, wenn man einem Oktaeder Pyramiden abschneidet, deren Kanten halb so lang sind wie die des Oktaeders.

Oktaederstumpf Tetrakishexaeder	**Ikosaederstumpf 1** Ikosidodekaeder Rhombentriakontaeder	**Ikosaederstumpf 2** (Fußball) Pentakisdodekaeder
		
6 Quadrate 8 Sechsecke 14 Flächen, 24 Ecken, 36 Kanten	20 Dreiecke 12 Fünfecke 32 Flächen, 30 Ecken, 60 Kanten	12 Fünfecke 20 Sechsecke 32 Flächen, 60 Ecken, 90 Kanten

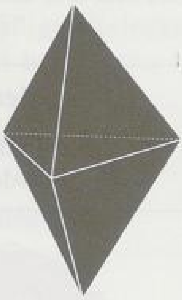
Dodekaederstumpf 1 Triakisikosaeder	**Dodekaederstumpf 2** kleines Rhombiikosidodekaeder Pentakisdodekaeder Trapezoidhexakontaeder	**Dodekaederstumpf 3** großes Rhombiikosidodekaeder Hexakisikosaeder	**Dodekaederstumpf 4** kronrandiges Dodekaeder Pentagonalhexakontaeder
			
20 Dreiecke 12 Zehnecke 32 Flächen 60 Ecken 90 Kanten	20 Dreiecke 30 Quadrate 12 Fünfecke 62 Flächen 60 Ecken 120 Kanten	30 Quadrate 20 Sechsecke 12 Zehnecke 62 Flächen 120 Ecken 180 Kanten	80 Dreiecke 12 Fünfecke 92 Flächen 60 Ecken 150 Kanten

* Die acht Dreieckkörper

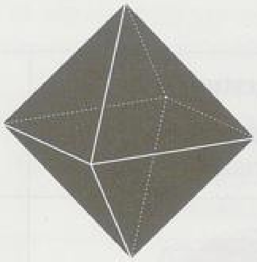
Neben den Platonischen Körpern gibt es noch viele andere konvexe Polyeder mit auffälligen Regelmäßigkeiten. Zum Beispiel die acht Dreieckkörper: jeder ist von kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt.



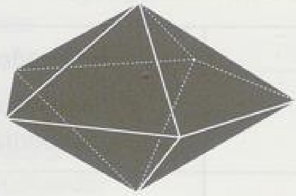
Tetraeder
4 Flächen
4 Ecken
6 Kanten



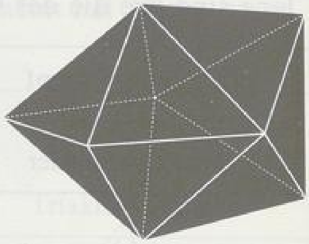
6 Flächen
5 Ecken
9 Kanten



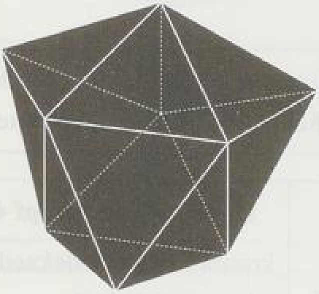
Oktaeder
8 Flächen
6 Ecken
12 Kanten



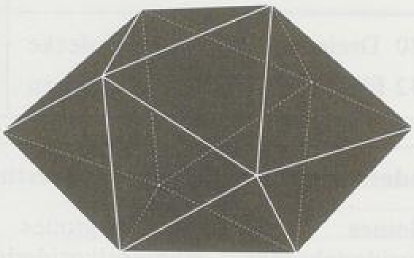
10 Flächen
7 Ecken
15 Kanten



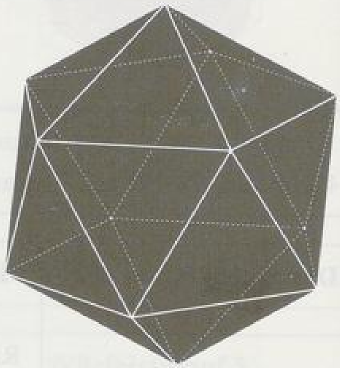
12 Flächen
8 Ecken
18 Kanten



14 Flächen
9 Ecken
21 Kanten



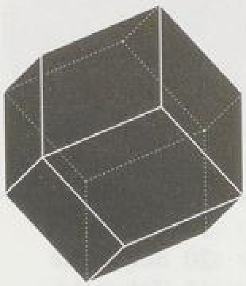
16 Flächen
10 Ecken
24 Kanten



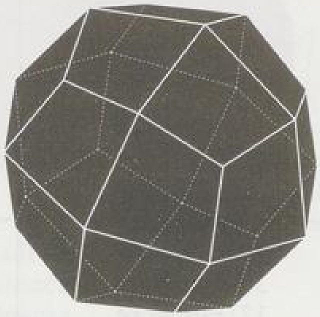
Ikosaeder 20 Flächen
12 Ecken
30 Kanten

Aber auch kongruente Rauten oder Drachen kommen als Flächen vor.

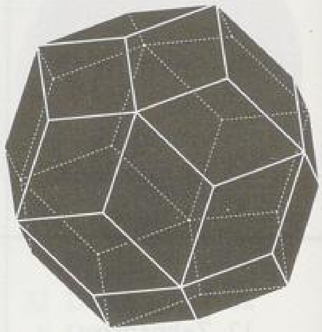
6-Rauten-Flach
6 Flächen
8 Ecken
12 Kanten



12-Rauten-Flach
24 Rauten
14 Ecken
24 Kanten

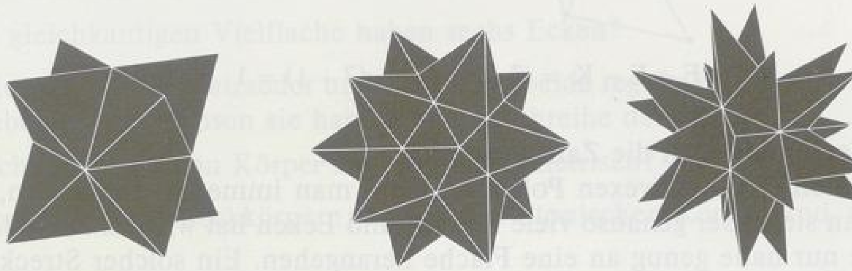


24-Drachen-Flach
24 Flächen
26 Ecken
48 Kanten



30-Rauten-Flach
60 Flächen
32 Ecken
90 Kanten

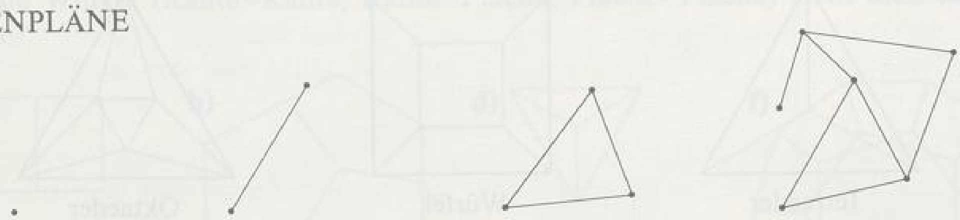
Und läßt man schließlich auch noch konkave Polyeder zu, so tut sich eine neue Vielfalt eindrucksvoller Formen auf: die **Sternkörper.** Das einfachste Exemplar ist ein achtzackiger räumlicher Stern, die Stella Octangula. Man kann ihn deuten als zwei regelmäßige Tetraeder, die sich durchdringen, oder als regelmäßiges Oktaeder, auf dessen Seitenflächen regelmäßige Tetraeder sitzen. Ein Stern mit 12 (20) Zacken entsteht, wenn man die Kanten eines regelmäßigen Dodekaeders (Ikosaeders) bis zum Schnitt verlängert. Auch Archimedische Körper taugen als Kerne für Sterne usw.



*** Beweis des Polyedersatzes**

Zur Vorbereitung untersuchen wir Streckenpläne. Streckenpläne sind zusammenhängende Gebilde, die aus Punkten und Verbindungsstrecken bestehen.

STRECKENPLÄNE

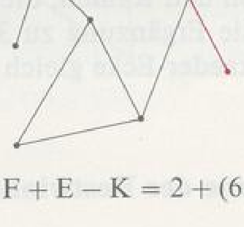


$F = 0$	$F = 0$	$F = 1$	$F = 2$
$E = 1$	$E = 2$	$E = 3$	$E = 6$
$K = 0$	$K = 1$	$K = 3$	$K = 7$
$F + E - K = 1$	$F + E - K = 1$	$F + E - K = 1$	$F + E - K = 1$

Die Zahl $F + E - K$ hat für jeden Streckenplan den Wert 1. Das sieht man leicht ein, wenn man sich überlegt, wie ein Streckenplan entsteht: Man beginnt mit einem Punkt, für ihn stimmt die Behauptung.
Dann zeichnet man eine Strecke dazu, ohne eine schon vorhandene Strecke zu schneiden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

① Man zeichnet einen neuen Punkt und verbindet ihn mit einem schon vorhandenen Punkt: es entstehen eine neue Kante und eine neue Ecke, während die Flächenzahl F gleichbleibt.

1. Möglichkeit: neuer Punkt

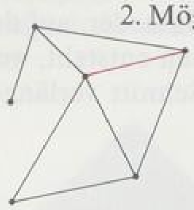


$F = 2$
$E = 6 + 1$
$K = 7 + 1$

$$F + E - K = 2 + (6 + 1) - (7 + 1) = 1$$

② Man verbindet zwei vorhandene Punkte. Es entstehen eine neue Kante und eine neue Fläche, während die Eckenzahl E gleichbleibt.

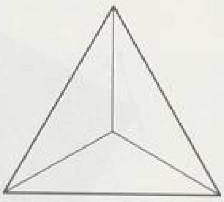
2. Möglichkeit: neue Strecke



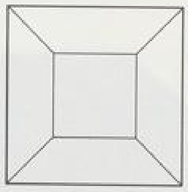
$F = 2 + 1$
$E = 6$
$K = 7 + 1$

$$F + E - K = (2 + 1) + 6 - (7 + 1) = 1$$

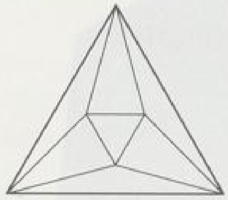
In beiden Fällen ändert sich die Zahl $F + E - K$ nicht.
Das Kantenmodell eines konvexen Polyeders kann man immer so anschauen, daß man es als Streckenplan sieht, der genauso viele Kanten und Ecken hat wie das Polyeder. Man muß mit dem Auge nur nahe genug an eine Fläche herangehen. Ein solcher Streckenplan heißt auch Schlegel-Diagramm. In jedem Schlegel-Diagramm ist (wie oben gezeigt) $F + E - K = 1$. Das Polyeder hat eine Fläche mehr als das Schlegel-Diagramm, nämlich die, durch die das Auge in den Körper blickt. Ihr Umriß ist der Umriß des Schlegel-Diagramms. Deshalb gilt für konvexe Polyeder $F + E - K = 1 + 1 = 2$.



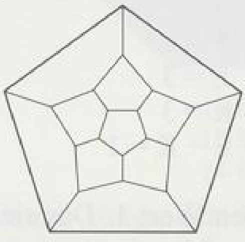
Tetraeder



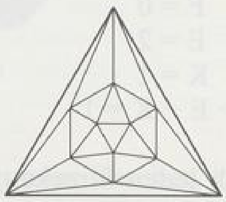
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

*** Polyedersatz von DESCARTES**

Neben dem Satz von Euler gibt es noch einen genauso schönen und überraschenden Satz über konvexe Vielflache. Gefunden hat ihn der französische Mathematiker und Philosoph RENÉ DESCARTES (1596 bis 1650). Zur Formulierung brauchen wir den Begriff »Restwinkel einer Ecke«. Die Summe der Winkel zwischen den Kanten, die in einer konvexen Ecke zusammenlaufen, ist immer kleiner als 360°; die Ergänzung zu 360° nennen wir Restwinkel. Zum Beispiel ist der Restwinkel einer Dodekaeder-Ecke gleich 36°, siehe auch Seite 137.

Polyedersatz von DESCARTES:

Bei jedem konvexen Polyeder ist die Summe der Restwinkel gleich 720°.

Aufgaben

1. Was ist jeweils die kleinst- bzw. größtmögliche Eckenzahl im Umriß eines Platonischen Körpers?

2. Welche Gemeinsamkeit haben die Platonischen Körper

a) Tetraeder, Würfel und Dodekaeder

b) Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder?

3. Welche gleichkantigen Vielflache haben sechs Ecken?

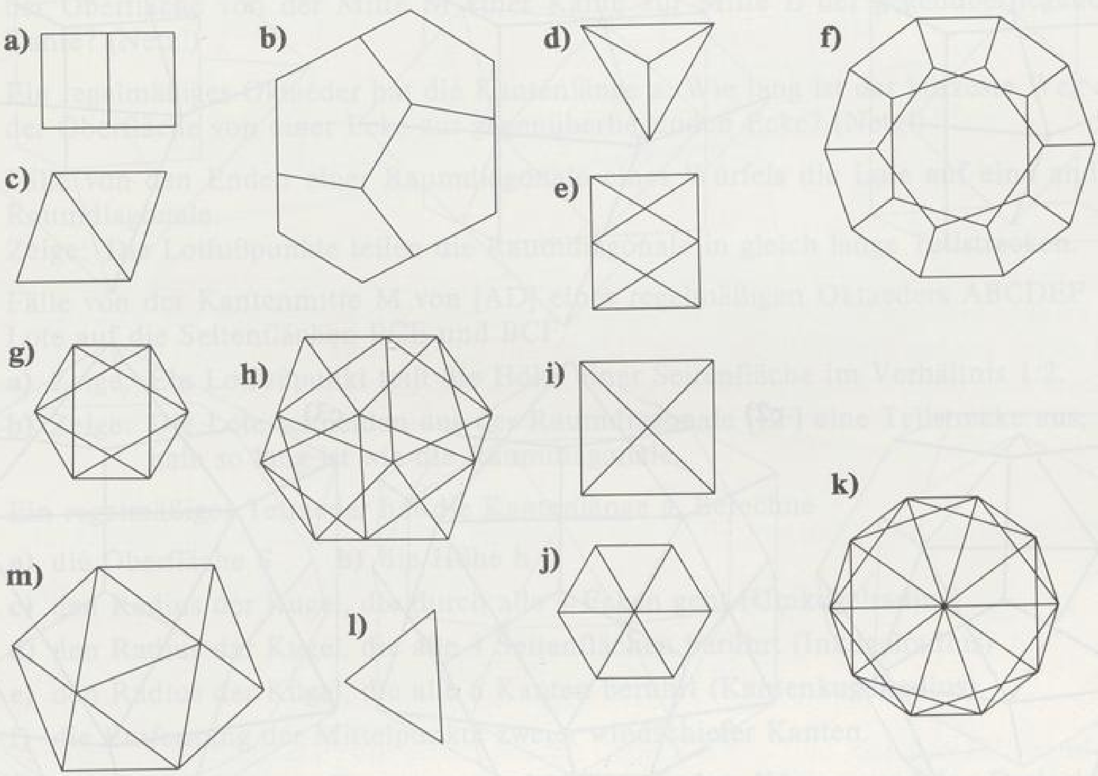
4. a) Stelle von Würfel, Tetraeder und Oktaeder (beide regelmäßig) fest, wieviel Symmetrieebenen und -achsen sie haben, und beschreibe deren Lage.

b) Welche Platonischen Körper sind punktsymmetrisch?

• **5.** Verfahre mit den Dreieckkörpern, die keine Platonischen Körper sind, so wie in Aufgabe **4.**

⁝ **6.** Blickrichtung

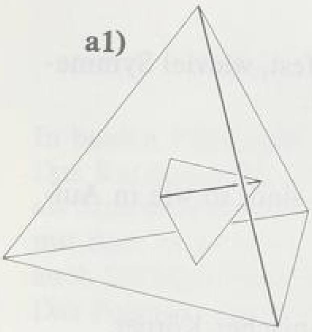
Die Bilder zeigen besondere Ansichten von Drahtmodellen Platonischer Körper.
Nenne jeweils den Körper und beschreibe die Projektionsrichtung.
Wo sieht man eine Kante in wahrer Größe?
Welche Winkel (Kante–Kante, Kante–Fläche, Fläche–Fläche) sieht man in wahrer Größe?



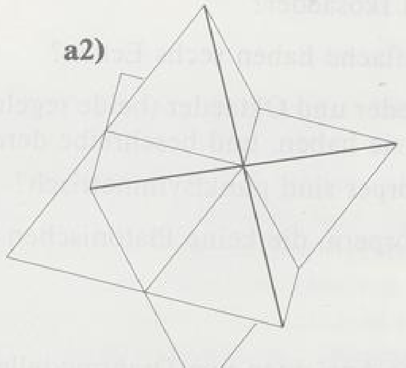
7. Dual

Die Bilder zeigen jeweils einen Platonischen Körper, der einem Platonischen Körper einbeschrieben ist.
Warum läßt sich in jedem Paar die Rolle beider Körper vertauschen? (Duale Körper!)
Wo zeigt sich die Dualität, wenn man die Flächen-, Ecken- und Kantenzahlen zweier Partner vergleicht?

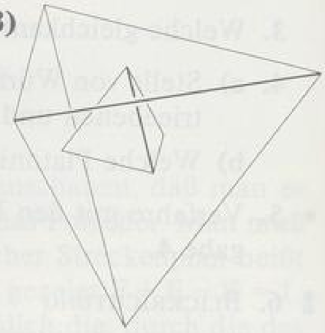
a1)

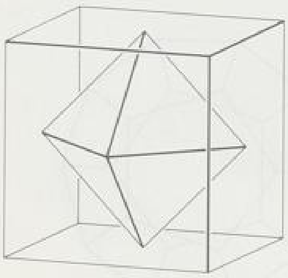


a2)

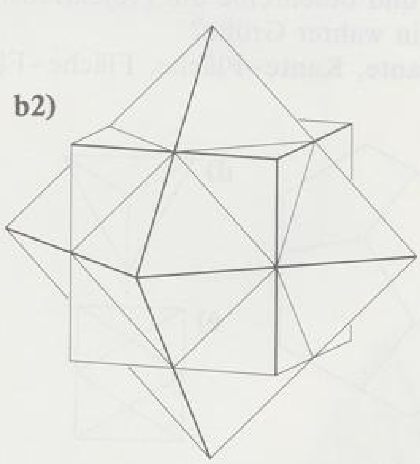


a3)

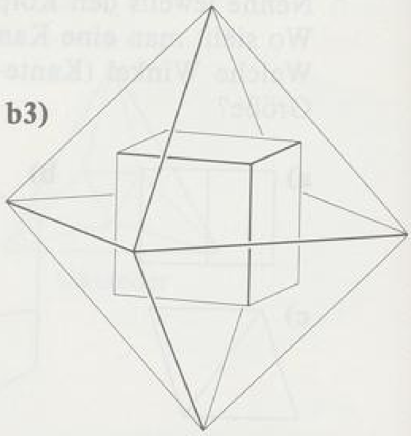




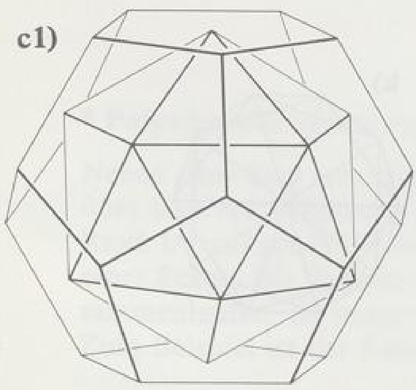
b2)



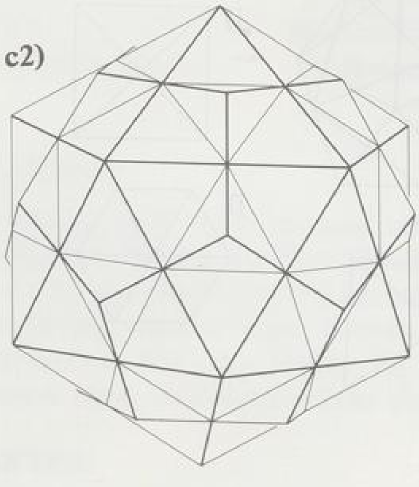
b3)



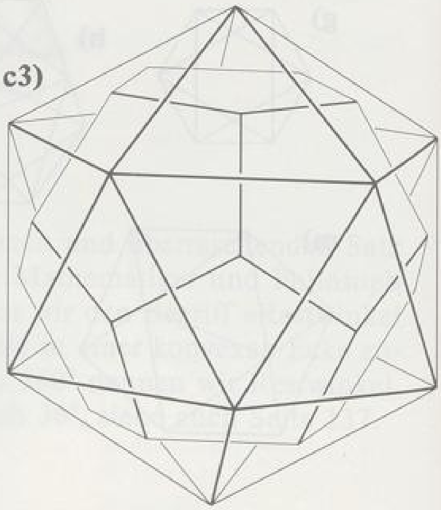
c1)

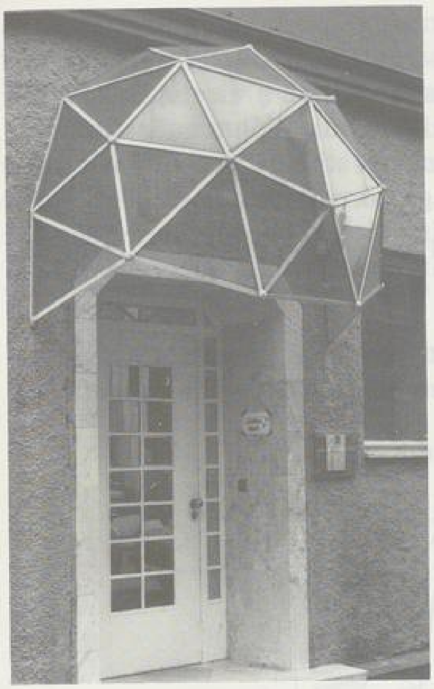


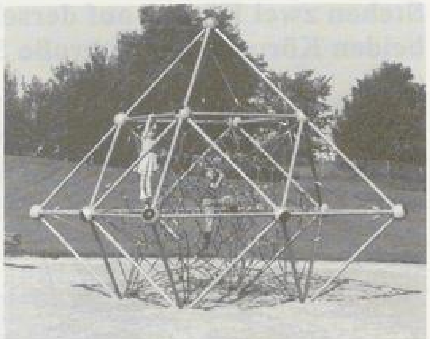
c2)



c3)







- **8.** Ein regelmäßiges Tetraeder hat die Kantenlänge a. Wie lang ist der kürzeste Weg auf der Oberfläche von der Mitte M einer Kante zur Mitte L der gegenüberliegenden Kante? (Netz!)

- **9.** Ein regelmäßiges Oktaeder hat die Kantenlänge a. Wie lang ist der kürzeste Weg auf der Oberfläche von einer Ecke zur gegenüberliegenden Ecke? (Netz!)

10. Fälle von den Enden einer Raumdiagonale eines Würfels die Lote auf eine andere Raumdiagonale.
Zeige: Die Lotfußpunkte teilen die Raumdiagonale in gleich lange Teilstrecken.

:11. Fälle von der Kantenmitte M von [AD] eines regelmäßigen Oktaeders ABCDEF die Lote auf die Seitenflächen BCE und BCF.

a) Zeige: Ein Lotfußpunkt teilt die Höhe einer Seitenfläche im Verhältnis 1:2.

b) Zeige: Die Lote schneiden aus der Raumdiagonale [EF] eine Teilstrecke aus, die halb so lang ist wie die Raumdiagonale.

:12. Ein regelmäßiges Tetraeder hat die Kantenlänge a. Berechne

a) die Oberfläche S **b)** die Höhe h

c) den Radius der Kugel, die durch alle 4 Ecken geht (Umkugelradius)

d) den Radius der Kugel, die alle 4 Seitenflächen berührt (Inkugelradius)

e) den Radius der Kugel, die alle 6 Kanten berührt (Kantenkugelradius)

f) die Entfernung der Mittelpunkte zweier windschiefer Kanten.

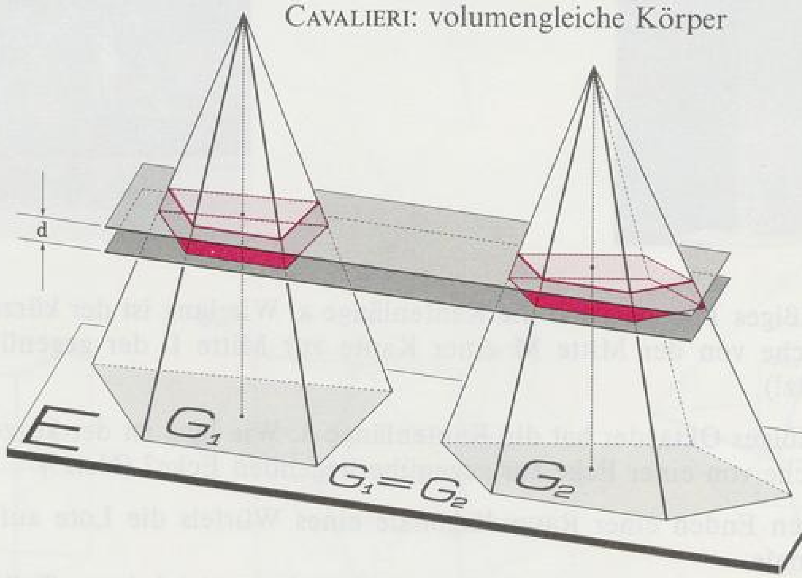
13. Überprüfe den Satz von Descartes an den Platonischen Körpern und den Dreieckkörpern.

7.5 Das Volumen der Pyramide

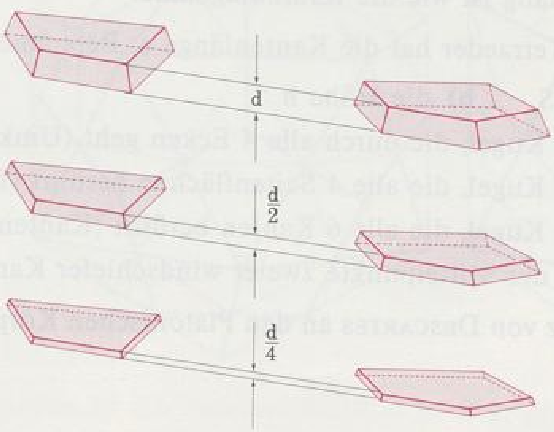
Die Volumenformel fürs Prisma V = Gh. Wir haben sie gefunden, indem wir das Prisma mit einem geeigneten Quader verglichen haben. Bei der Pyramide ist die Volumenbestimmung schwieriger. Wir benutzen ein Verfahren, das der italienische Mathematiker BONAVENTURA CAVALIERI (1598? bis 1647) entwickelt hat. Seine Überlegung: Körper müßten gleiches Volumen haben, wenn sie in jeder Höhe gleich große Querschnittsflächen haben. Diese Idee hat er 1635 in einem Geometriebuch veröffentlicht, sie ist heute unter dem Namen **Cavalierisches Prinzip** bekannt:

Stehen zwei Körper auf derselben Ebene E und erzeugt jede zu E parallele Ebene bei beiden Körpern gleich große Schnittflächen, dann haben beide Körper dasselbe Volumen.

CAVALIERI: volumengleiche Körper



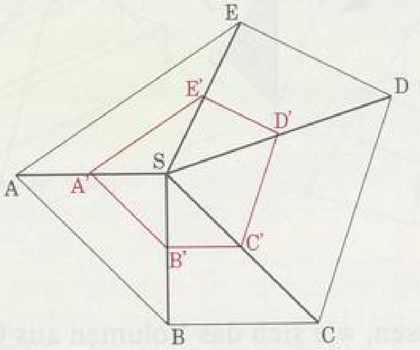
Zum exakten Beweis muß man die höhere Mathematik bemühen. Deshalb können wir dieses Prinzip hier nur anschaulich verständlich machen. Wir stellen uns vor, daß zwei Körper mit gleich großen Grundflächen und Höhen auf einer Ebene E stehen. Durch Ebenen, die parallel sind zu E, schneiden wir sie in Scheiben der Dicke d. Die Scheiben sind näherungsweise Prismen mit paarweise gleich großen Grundflächen und Höhen. Die Näherung ist um

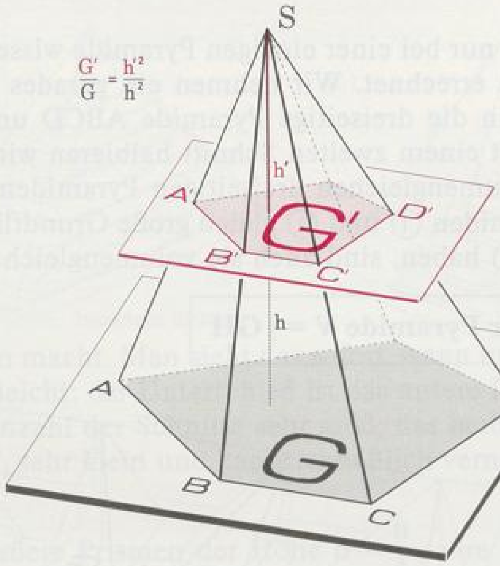


so besser, je dünner die Scheiben sind. Sehr dünne Scheiben in gleicher Höhe haben ungefähr dasselbe Volumen. Wenn zwei Körper aus paarweise volumengleichen Scheiben bestehen, dann haben sie dasselbe Volumen.
Mit dem Satz von CAVALIERI bestimmen wir jetzt das Volumen von Pyramiden. Wir untersuchen die Schnittflächen, die entstehen, wenn man eine Pyramide parallel zur Grundfläche schneidet. Für sie gilt:

Die Inhalte paralleler Schnittflächen einer Pyramide verhalten sich wie die Quadrate der Abstände der Flächen von der Spitze.

$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$



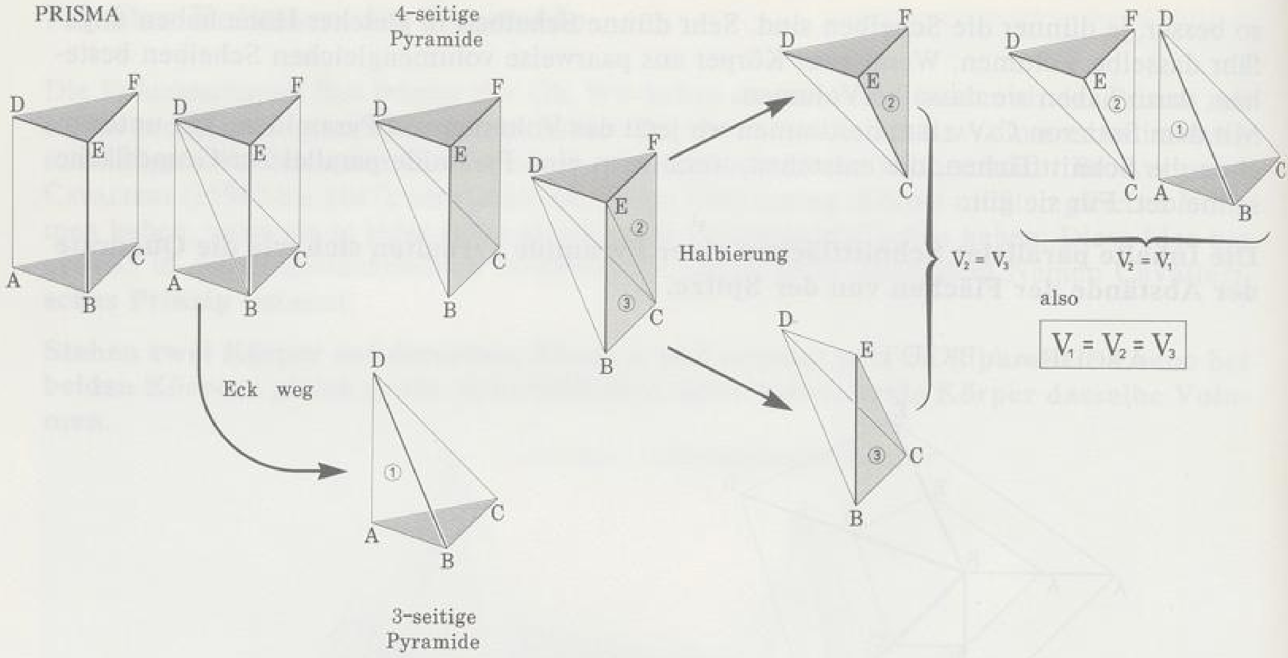


Beweis: G' entsteht aus G bei zentrischer Streckung mit dem Zentrum S und dem Streckfaktor $m = \frac{h'}{h}$, also gilt

$$G' = m^2 G \quad \text{oder} \quad \frac{G'}{G} = m^2 = \frac{h'^2}{h^2}.$$

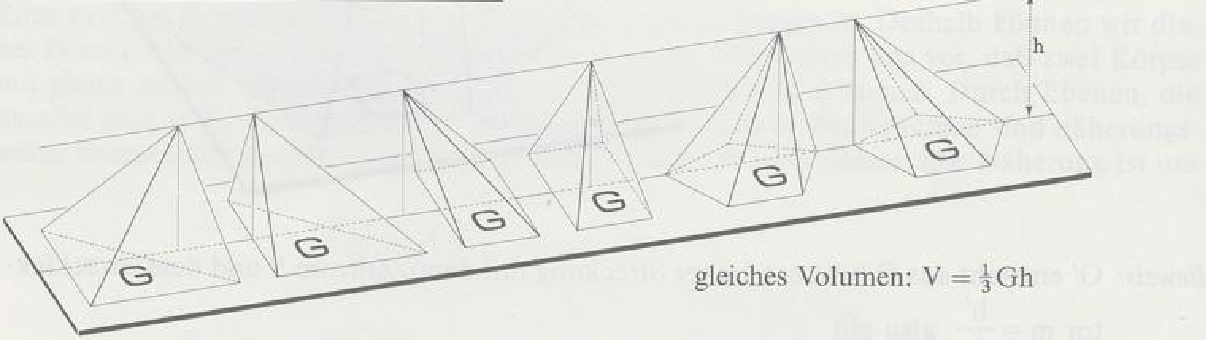
Deshalb haben zwei Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleichen Höhen in jeder Höhe gleich große Schnittflächen. Mit CAVALIERI können wir dann sagen:

Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleichen Höhen haben dasselbe Volumen.



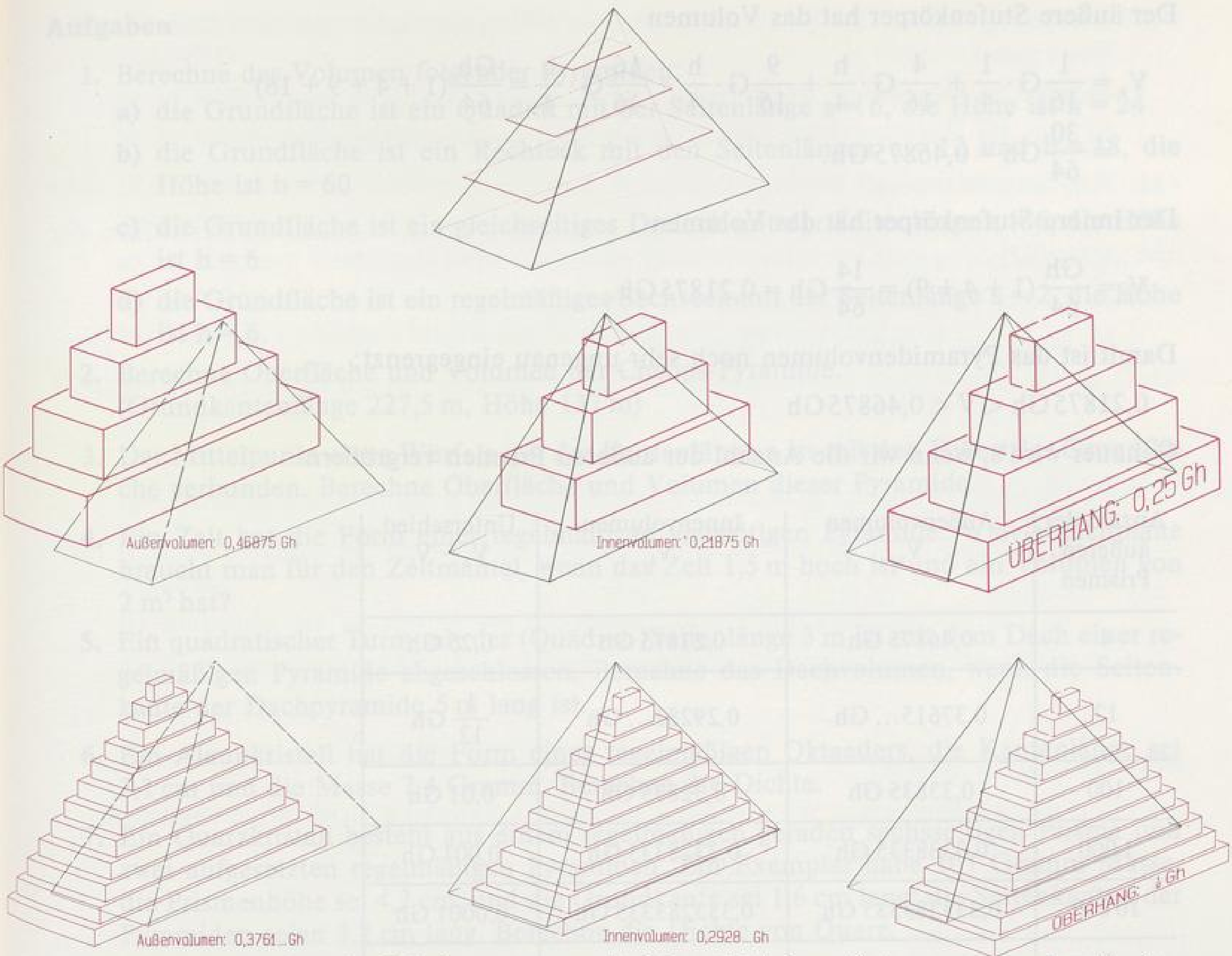
Man muß also nur bei einer einzigen Pyramide wissen, wie sich das Volumen aus Grundfläche und Höhe errechnet. Wir nehmen ein gerades dreiseitiges Prisma ABCDEF und zerschneiden es in die dreiseitige Pyramide ABCD und in die vierseitige Pyramide BCDEF (Spitze D). Mit einem zweiten Schnitt halbieren wir die vierseitige Pyramide; es entstehen die beiden volumengleichen dreiseitigen Pyramiden BCDE und CDEF, das heißt $V_2 = V_3$. Weil die Pyramiden ① und ② gleich große Grundflächen (Kongruenz!) und gleiche Höhen (Seitenkanten!) haben, sind auch sie volumengleich: $V_1 = V_2$. Also gilt für jede Pyramide:

Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3} GH$



gleiches Volumen: $V = \frac{1}{3} Gh$

Die Formel läßt sich auch noch anders herleiten. Dazu brauchen wir passende Stufenkörper. Wir schneiden die Pyramide parallel zur Grundfläche in gleichen Abständen durch. Auf die Grundfläche und auf jede Schnittfläche stellen wir ein Prisma der Höhe d. Alle Prismen bilden zusammen einen Stufenkörper. Sein Volumen V_a ist größer als das Volumen V der Pyramide. Dienen die Schnittflächen als Deckflächen von Prismen der Höhe d, so entsteht ein anderer Stufenkörper. Sein Volumen V_i ist kleiner als das Pyramidenvolumen V. Unabhängig von der Anzahl der Schnitte gilt $V_i < V < V_a$. Das Pyramidenvolumen wird um so ge-



nauer eingegrenzt, je mehr Schnitte man macht. Man sieht das sofort, wenn man jeweils den äußeren und inneren Stufenkörper vergleicht: der Unterschied ist das untere Prisma des größeren Stufenkörpers. Macht man die Anzahl der Schnitte sehr groß, das heißt d sehr klein, dann wird auch der Unterschied $V_a - V_i$ sehr klein und kann schließlich vernachlässigt werden: dann ist $V_i \approx V \approx V_a$.

Bei drei Schnitten ergeben sich vier äußere Prismen der Höhe $d = \frac{h}{4}$, ihre vier Grundflächen sind

$$G_1 = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 G = \left(\frac{1}{4}\right)^2 G = \frac{1}{16} B$$

$$G_2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 G = \frac{4}{16} G$$

$$G_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 G = \frac{9}{16} G$$

$$G_4 = G = \frac{16}{16} G$$

Der äußere Stufenkörper hat das Volumen

$$V_a = \frac{1}{16}G \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{16}G \cdot \frac{h}{4} + \frac{9}{16}G \cdot \frac{h}{4} + \frac{16}{16}G \cdot \frac{h}{4} = \frac{Gh}{64}(1+4+9+16)$$
$$= \frac{30}{64}Gh = 0{,}46875\,Gh.$$

Der innere Stufenkörper hat das Volumen

$$V_i = \frac{Gh}{64}(1+4+9) = \frac{14}{64}Gh = 0{,}21875\,Gh.$$

Damit ist das Pyramidenvolumen noch sehr ungenau eingegrenzt:

$$0{,}21875\,Gh < V < 0{,}46875\,Gh$$

Genauer wird's, wenn wir die Anzahl der äußeren Prismen vergrößern:

Anzahl der äußeren Prismen	Außenvolumen V_a	Innenvolumen V_i	Unterschied $V_a - V_i$
4	0,46875 Gh	0,21875 Gh	0,25 Gh
12	0,37615… Gh	0,29282… Gh	$\frac{1}{12}$ Gh
100	0,33835 Gh	0,32835 Gh	0,01 Gh
1 000	0,3338335 Gh	0,3328335 Gh	0,001 Gh
10 000	0,333383335 Gh	0,333283335 Gh	0,0001 Gh
n	$\frac{1}{3}Gh\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$	$\frac{1}{3}Gh\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$	$\frac{1}{n}$ Gh

Macht man n immer größer, dann unterscheidet sich der Faktor hinter $\frac{1}{3}$Gh sowohl bei V_a als auch bei V_i beliebig wenig von 1. Wieder ergibt sich

Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3}$ Gh.

Aufgaben

1. Berechne das Volumen folgender Pyramiden:
   a) die Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 6$, die Höhe ist $h = 24$
   b) die Grundfläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 12$ und $b = 18$, die Höhe ist $h = 60$
   c) die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 6$, die Höhe ist $h = 6$
   d) die Grundfläche ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $a = 2$, die Höhe ist $h = 6$.

2. Berechne Oberfläche und Volumen der Cheops-Pyramide. (Grundkantenlänge 227,5 m, Höhe 137 m)

3. Der Mittelpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge a ist mit den Ecken der Grundfläche verbunden. Berechne Oberfläche und Volumen dieser Pyramide.

4. Ein Zelt hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide. Wieviel Zeltplane braucht man für den Zeltmantel, wenn das Zelt 1,5 m hoch ist und ein Volumen von 2 m^3 hat?

5. Ein quadratischer Turm mit der (Quadrat-)Seitenlänge 3 m ist mit dem Dach einer regelmäßigen Pyramide abgeschlossen. Berechne das Dachvolumen, wenn die Seitenkante der Dachpyramide 5 m lang ist.

6. Ein Alaunkristall hat die Form eines regelmäßigen Oktaeders, die Kantenlänge sei 2,1 cm und die Masse 7,4 Gramm. Berechne die Dichte.

7. Ein Quarzkristall besteht aus einem regelmäßigen geraden sechsseitigen Prisma und zwei aufgesetzten regelmäßigen Pyramiden. Ein Exemplar habe 107 Gramm Masse, die Prismenhöhe sei 4,2 cm, und die Grundkante sei 1,6 cm lang; die Seitenkanten der Pyramiden seien 3,2 cm lang. Berechne die Dichte von Quarz.

8. Berechne das Volumen eines
   a) regelmäßigen Tetraeders der Kantenlänge a
   b) regelmäßigen Oktaeders der Kantenlänge a.
   In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina?

9. Verbindet man die Endpunkte zweier windschiefer Flächendiagonalen in gegenüberliegenden Würfelflächen, so entsteht ein regelmäßiges Tetraeder.
   a) Zeichne den Würfel mit dem einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeder. Wieviel solcher Tetraeder gibt es in einem Würfel?
   b) Berechne das Volumen des einbeschriebenen regelmäßigen Tetraeders in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt er ein?

10. Die beiden Tetraeder von Aufgabe **9.** bilden zusammen einen Sternkörper, die »Stella Octangula«.
   a) Zeichne einen Würfel und den einbeschriebenen Sternkörper.
   b) Berechne das Volumen der Stella Octangula in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt die Stella ein?

•**11.** Die Cheops-Pyramide war ursprünglich etwa 147 m hoch und hatte eine Grundkantenlänge von etwa 230 m.

a) Wieviel Prozent der Steine waren bis zur halben Höhe verbaut?

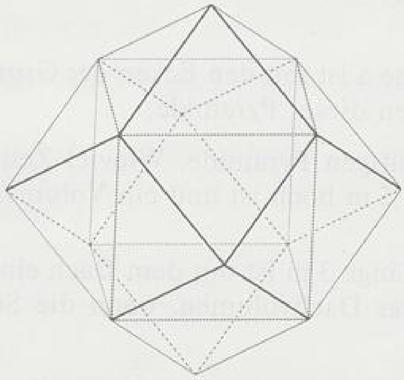
b) Gib die Höhe in Meter und in Prozent der Pyramidenhöhe an.

•**12.** RAUTENZWÖLFFLACH

Auf den Flächen eines Würfels der Kantenlänge a sitzen regelmäßige Pyramiden der Höhe a/2.

a) Zeige: 12 Rauten begrenzen den Körper.

b) Berechne Volumen und Oberfläche.



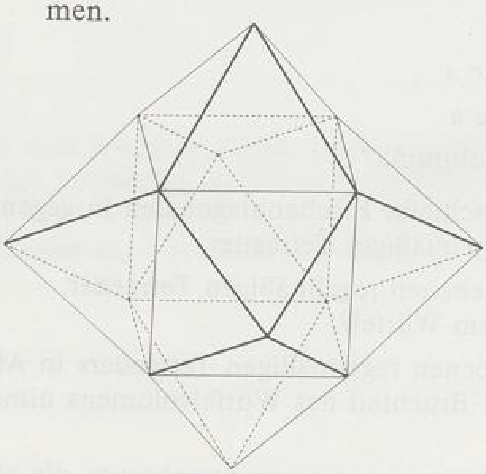
•**13.** GEDACHTER WÜRFEL

Auf den Flächen eines Würfels der Kantenlänge a sitzen gleichkantige Pyramiden.

a) Zeichne den Körper.

b) Berechne Volumen und Oberfläche.

c) Von welchem Körper sind die Pyramidenspitzen die Ecken? Berechne sein Volumen.



•**14.** Die Flächenmitten eines Würfels sind die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders.

a) Zeichne einen Würfel und das einbeschriebene Oktaeder.

b) Berechne das Volumen des Oktaeders in Abhängigkeit von der Würfelkante a. Welchen Bruchteil des Würfelvolumens nimmt das Oktaeder ein?

•15. Die Kantenmitten eines regelmäßigen Tetraeders sind die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders.

a) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Tetraedervolumen?

b) In welchem Verhältnis stehen die beiden Oberflächeninhalte?

•16. Die Flächenmitten eines regelmäßigen Tetraeders sind die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders.

a) In welchem Verhältnis steht das kleine Tetraedervolumen zum großen Tetraedervolumen?

b) Welches Verhältnis bilden die beiden Oberflächeninhalte?

•17. a) Von welchem Körper sind die Ecken die Kantenmitten eines regelmäßigen Oktaeders?

b) Berechne das Verhältnis von Oktaeder- und Körpervolumen.

c) Berechne das Verhältnis der Inhalte von Oktaeder- und Körperoberfläche.

•18. a) Von welchem Körper sind die Ecken die Flächenmitten eines regelmäßigen Oktaeders?

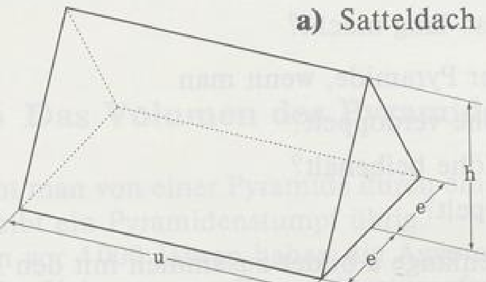
b) Berechne das Verhältnis von Oktaedervolumen und Körpervolumen.

c) Berechne das Verhältnis der Inhalte von Oktaeder- und Körperoberfläche.

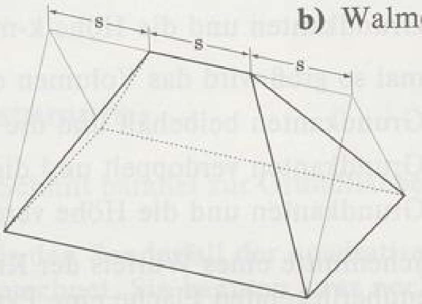
19. DACHVOLUMEN

Berechne die Rauminhalte von

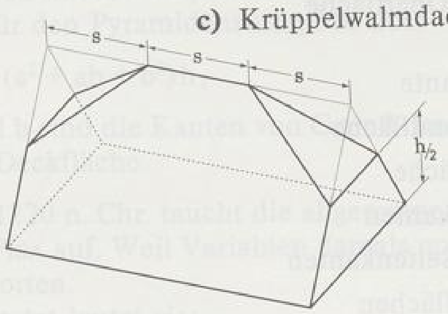
a) Satteldach



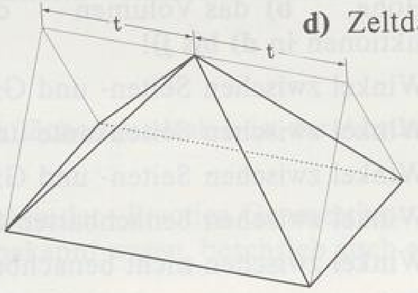
b) Walmdach



c) Krüppelwalmdach



d) Zeltdach



Länge u. Breite 2e und Höhe h sind immer gleich:

$h = 6$ m

$e = 4$ m

$u = 12$ ~~mm~~ m

•20. WÜRFELFACETTIERUNG

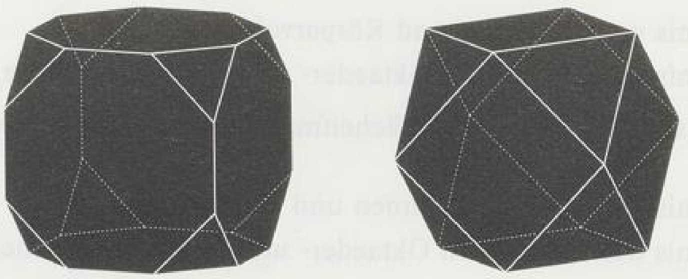
Schneidet man die Ecken eines Würfels der Kantenlänge a so ab, daß Stümpfe mit regelmäßigen Vielecken als Grundflächen entstehen, so ergeben sich zwei Archimedische Körper:
Würfelstumpf 2 hat 6 Achtecke und 8 Dreiecke,
Würfelstumpf 1 hat 6 Quadrate und 8 Dreiecke.

a) Berechne die Kantenlängen der Würfelstümpfe.

b) Berechne die Oberflächen.

c) Berechne die Abstände paralleler Dreieckflächen.

d) Berechne die Rauminhalte.



21. Wievielmal so groß wird die Oberfläche einer Pyramide, wenn man

a) alle Grundkanten und die Höhe verdoppelt?

b) alle Grundkanten und die Höhe k-mal so lang macht?

22. Wievielmal so groß wird das Volumen einer Pyramide, wenn man

a) alle Grundkanten beibehält und die Höhe verdoppelt?

b) alle Grundkanten verdoppelt und die Höhe beibehält?

c) alle Grundkanten und die Höhe verdoppelt?

•23. Eine Flächenmitte eines Würfels der Kantenlänge a bildet zusammen mit den Ecken der gegenüberliegenden Fläche eine Pyramide. Wie groß ist

a) die Höhe **b)** das Volumen **c)** die Oberfläche
(Konstruktionen in **d)** bis **j)**!

d) der Winkel zwischen Seiten- und Grundkante

e) der Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche

f) der Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche

g) der Winkel zwischen benachbarten Seitenkanten

h) der Winkel zwischen nicht benachbarten Seitenkanten

i) der Winkel zwischen benachbarten Seitenflächen

j) der Winkel zwischen nicht benachbarten Seitenflächen?

⁝24. Oktaederwürfel

Ein Würfel der Kantenlänge a und ein Oktaeder durchdringen sich so, daß sie Kantenmitten gemeinsam haben. (Abb. 156/7**e**)

a) Berechne Oberfläche und Volumen des Körpers.

b) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Würfelvolumen?

c) In welchem Verhältnis steht der Oberflächeninhalt des Oktaeders zu dem des Würfels?

d) Der Oktaederwürfel hat 14 Spitzen. Von welchem Körper sind die 14 Spitzen die Ecken?

⁝25. Ein Würfel, ein regelmäßiges Tetraeder und ein regelmäßiges Oktaeder haben gleich große Oberflächen. In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte?

•26. Eine regelmäßige quadratische Pyramide hat die Grundkante a und die Höhe h. Auf ihrer Grundfläche steht ein Würfel der Kantenlänge x so, daß seine vier oberen Ecken auf den Höhen der Seitenflächen liegen.
Berechne x in Abhängigkeit von a und h.

27. Was für Vielfache erkennst du im Bild von Luca Pacioli auf Seite

* 7.6 Das Volumen des Pyramidenstumpfs

Trennt man von einer Pyramide durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche die Spitze ab, so bleibt ein Pyramidenstumpf übrig.
Schon vor 4000 Jahren haben die Ägypter für den Sonderfall der quadratischen Grundfläche das Volumen von Pyramidenstümpfen berechnet. Sie kannten zwar noch nicht unsere Formelschreibweise, dafür aber als Text formulierte Verfahren. Übersetzt sieht das Verfahren für den Pyramidenstumpf so aus:

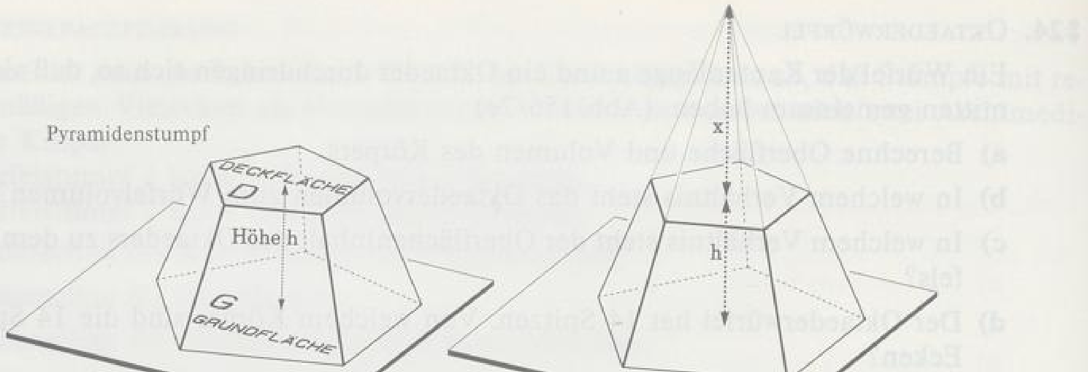
$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$,

a und b sind die Kanten von Grund- und Deckflächenquadrat, h ist der Abstand von Grund- und Deckfläche

Erst 1220 n. Chr. taucht die allgemeine Formel in der »Practica Geometriae« von Leonardo von Pisa auf. Weil Variablen damals noch unbekannt waren, beschrieb auch er seine Formel in Worten.
Übersetzt lautet sie:

$V = \frac{1}{3}(G + \sqrt{GD} + D)h$,

G und D sind die Inhalte von Grund- und Deckfläche, h ist der Abstand von Grund- und Deckfläche



Mit der Formel fürs Pyramidenvolumen leiten wir die letzte Formel her:
Der Stumpf entsteht durch Abschneiden einer Pyramide:

$$V = V_{\text{große Pyramide}} - V_{\text{kleine Pyramide}}$$
$$= \tfrac{1}{3}G(h+x) - \tfrac{1}{3}Dx$$
$$= \tfrac{1}{3}(Gh + Gx - Dx) = \tfrac{1}{3}[Gh + (G-D)x].$$

Weil x im Stumpf nicht vorkommt, eliminieren wir es; aus **7.5** wissen wir

$$\frac{D}{G} = \frac{x^2}{(x+h)^2} \quad \| \quad \text{Wurzel ziehen}$$

$$\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{G}} = \frac{x}{x+h} \quad \| \quad \text{kreuzweise multiplizieren}$$

$$x\sqrt{D} + h\sqrt{D} = x\sqrt{G}$$
$$h\sqrt{D} = x\left(\sqrt{G} - \sqrt{D}\right)$$
$$x = \frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G} - \sqrt{D}} \quad \| \quad \text{Wurzeln im Nenner beseitigen}$$

$$\frac{h\sqrt{D}}{\sqrt{G}-\sqrt{D}} = \frac{h\sqrt{D}\left(\sqrt{G}+\sqrt{D}\right)}{\left(\sqrt{G}-\sqrt{D}\right)\left(\sqrt{G}+\sqrt{D}\right)} = \frac{\sqrt{DG}+D}{G-D}\cdot h.$$

Den letzten Bruch setzen wir fürs x oben ein

$$V = \frac{1}{3}\left[Gh + (G-D)\frac{\sqrt{DG}+D}{G-D}h\right],$$

nach Kürzen mit (G − D) ergibt sich fürs

Volumen des Pyramidenstumpfs $\quad V = \tfrac{1}{3}\left(G + \sqrt{GD} + D\right)h$

Sind speziell Grund- und Deckfläche Quadrate mit den Seitenlängen a und b, so geht die Formel über in

$V = \tfrac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h,$ also in die Formel der Ägypter.

Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Stücke eines Pyramidenstumpfs:

	G	D	h	V
a)	22,5	2,5	24	
b)	16		6	74
c)	12	3		49
d)	D + 24		10	130

2. Ein Papierkorb hat die Form eines Pyramidenstumpfs mit quadratischer Grundfläche. Die Grundfläche hat eine Kantenlänge von 30 cm, die Deckfläche von 25 cm. Welches Volumen hat der 50 cm hohe Papierkorb? Welche Abmessungen haben die Seitenflächen?

3. Obelisk

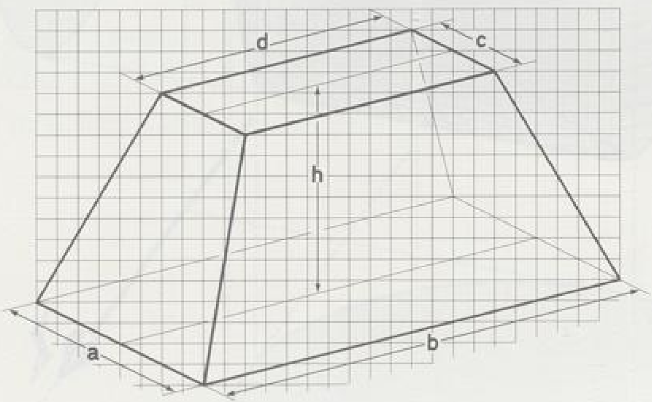
In der Mathematik nennt man ein Vielflach einen Obelisken, wenn Grund- und Deckfläche parallele Rechtecke und außerdem die Seitenflächen Trapeze sind. Ein solcher mathematischer Obelisk hat das Volumen

$V = \frac{1}{6}(2ab + 2cd + ad + bc) \cdot h.$

a) Zeige: Die Formel gilt auch dann, wenn der Obelisk zum Prisma, zur Pyramide oder zum Pyramidenstumpf entartet.

b) Walm- und Satteldach sind ebenfalls Sonderformen des Obelisken. Man bezeichnet sie auch als Keile. Bestimme die Volumenformel für den Keil aus der Obeliskenformel.

c) Leite die Obeliskenformel her.



4. Auf der Place de la Concorde in Paris steht ein ägyptischer Obelisk aus Luxor aus Granit.
Seine Form: Auf einem quadratischen Pyramidenstumpf steht eine Pyramide, deren Grundfläche die Deckfläche des Stumpfs ist.
Berechne Volumen und Masse aus den Daten:

Grundkante	2,42 m
Deckkante	1,45 m
Stumpfhöhe	21,6 m
Gesamthöhe	23 m
Dichte	2,68 g/cm³.

5. Als einfache Näherungsformel fürs Volumen des Pyramidenstumpfs verwendet man gelegentlich

$V' = \frac{1}{2}(G + D) \cdot h.$

a) Vergleiche V′ und V für einen Pyramidenstumpf mit $G = 18$, $D = 8$ und $h = 10$.

b) In welchem Verhältnis müssen G und D stehen, damit die Näherungsformel den richtigen Wert ergibt?