Anschauliche Geometrie

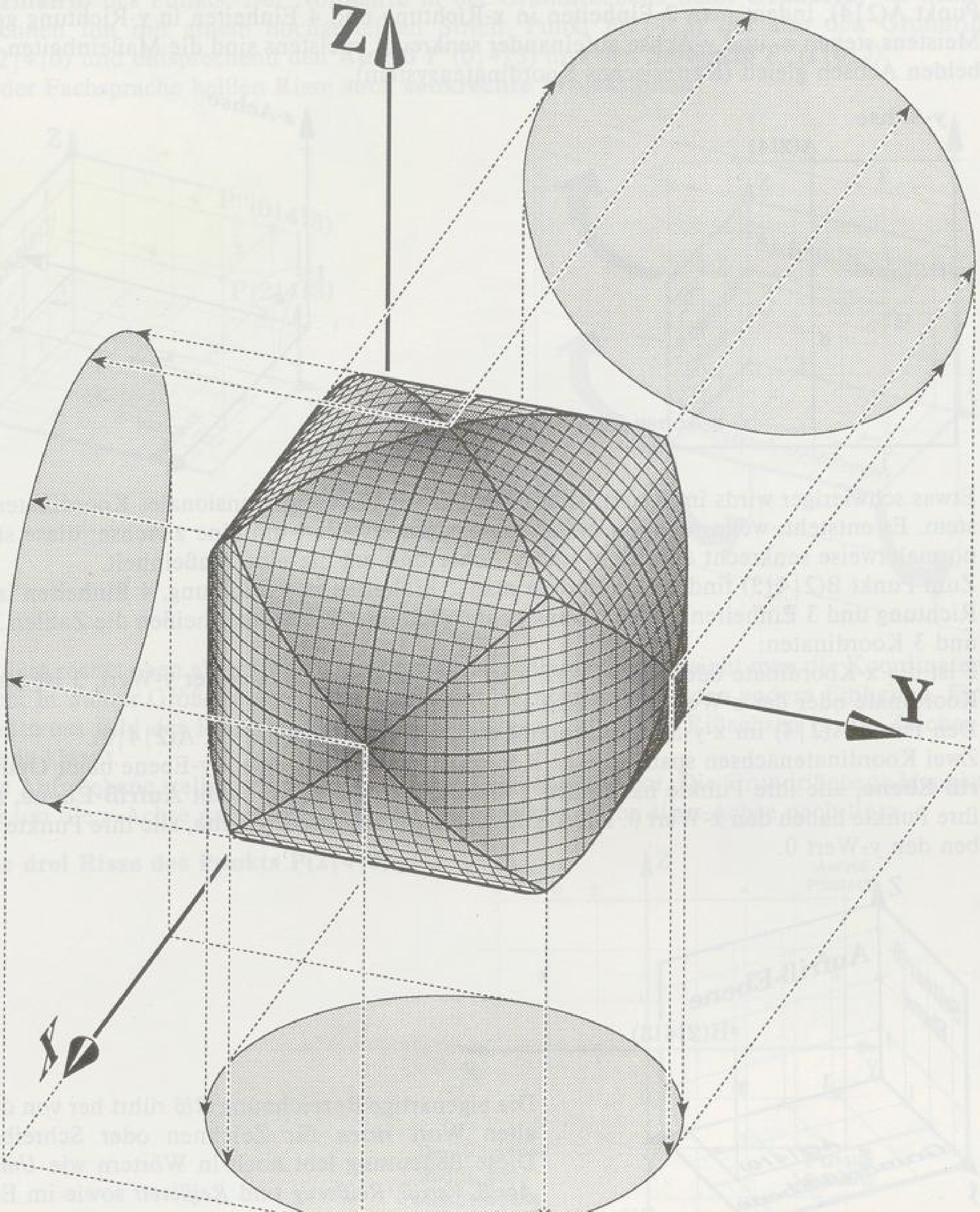
Barth, Friedrich

München, 1995

8. Kapitel: Darstellende Geometrie

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

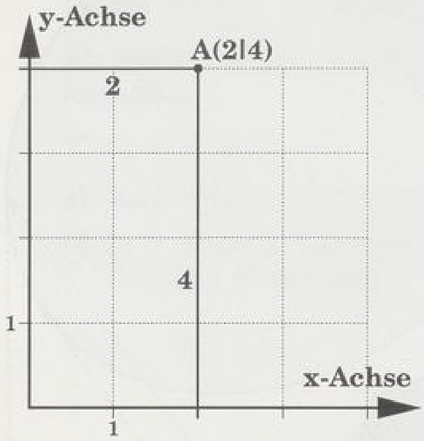
8. Kapitel
Darstellende Geometrie

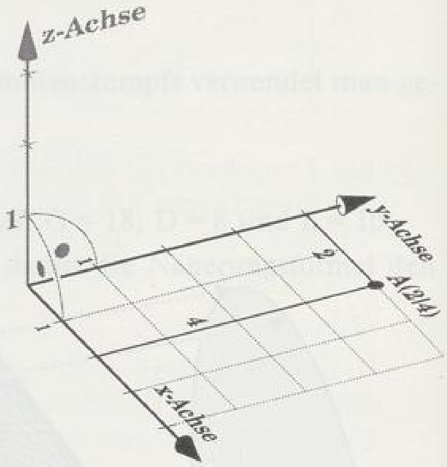


8.1 Grund- und Aufrißdarstellungen

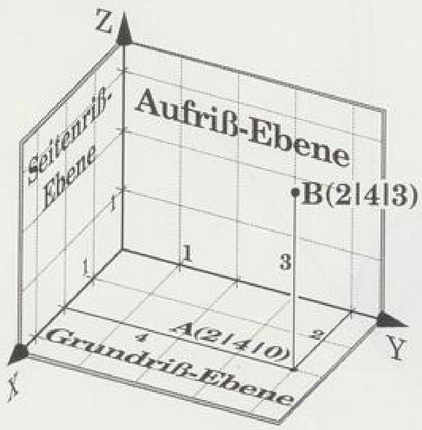
8.1.1 Darstellung von Punkten; Normalrisse

Will man die Lage eines Punkts in der Ebene festlegen, so führt man gewöhnlich ein Koordinatensystem ein und gibt die Koordinaten des Punkts an. Man kommt zum Beispiel zum Punkt A(2 | 4), indem man 2 Einheiten in x-Richtung und 4 Einheiten in y-Richtung geht. Meistens stehen x- und y-Achse aufeinander senkrecht, meistens sind die Maßeinheiten auf beiden Achsen gleich (Kartesisches Koordinatensystem).



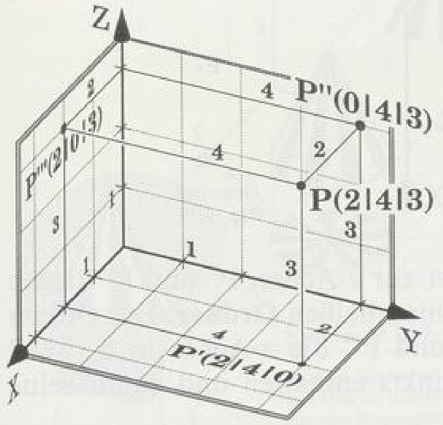


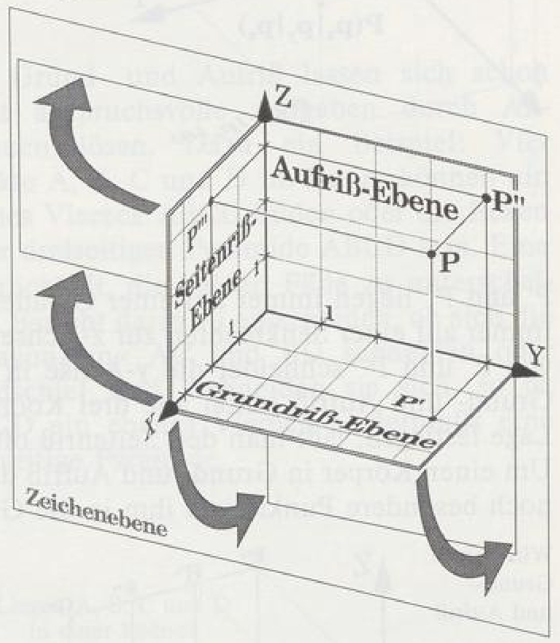
Etwas schwieriger wirds im Raum. Hier braucht man ein dreidimensionales Koordinatensystem. Es entsteht, wenn man das ebene x-y-System erweitert um eine z-Achse; diese steht normalerweise senkrecht auf der x- und y-Achse und hat dieselbe Maßeinheit.
Zum Punkt B(2 | 4 | 3) findet man, indem man 2 Einheiten in x-Richtung, 4 Einheiten in y-Richtung und 3 Einheiten in z-Richtung geht. Auch im x-y-z-System heißen die Zahlen 2, 4 und 3 Koordinaten:
2 ist die x-Koordinate oder der x-Wert, 4 ist die y-Koordinate oder der y-Wert, 3 ist die z-Koordinate oder der z-Wert, von Punkt B.
Den Punkt A(2 | 4) im x-y-System schreibt man im x-y-z-System jetzt A(2 | 4 | 0).
Zwei Koordinatenachsen spannen eine Koordinatenebene auf. Die x-y-Ebene heißt **Grundriß-Ebene,** alle ihre Punkte haben den z-Wert 0. Die y-z-Ebene heißt **Aufriß-Ebene,** alle ihre Punkte haben den x-Wert 0. Die x-z-Ebene heißt **Seitenriß-Ebene,** alle ihre Punkte haben den y-Wert 0.



Die eigenartige Bezeichnung *Riß* rührt her von dem alten Wort *ritzen* für Zeichnen oder Schreiben. Diese Bedeutung lebt noch in Wörtern wie *Umriß, Abriß, Verriß, Reißzeug* und *Reißbrett* sowie im Englischen *to write.*

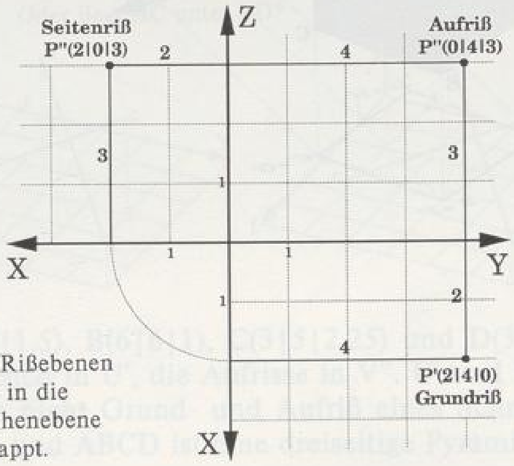
Die 3 (positiven) Koordinaten lassen sich auch deuten als Abstände von den Riß-Ebenen. So liegt Punkt B(2|4|3) 2 Einheiten vor der Aufriß-Ebene, 4 Einheiten vor der Seitenriß-Ebene, 3 Einheiten über der Grundriß-Ebene.
Beleuchtet man den Punkt P mit Licht, das parallel zu einer Rißachse einfällt, also senkrecht auf eine Riß-Ebene trifft, so entsteht in der Rißebene ein Schatten von P; er heißt **Normalriß** des Punkts. Der Normalriß in der Grundrißebene heißt **Grundriß,** wir kennzeichnen ihn mit einem hochgestellten Strich. Punkt P(2|4|3) hat also den Grundriß P'(2|4|0) und entsprechend den **Aufriß** P''(0|4|3) und den **Seitenriß** P'''(2|0|3).
In der Fachsprache heißen Risse auch **senkrechte Projektionen.**





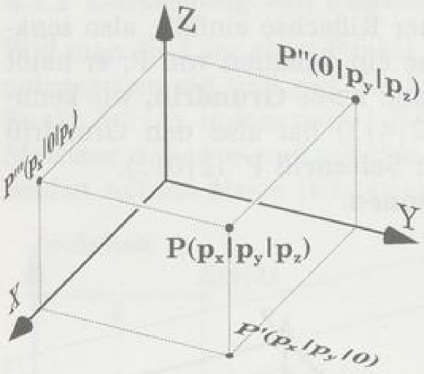
In dem rechts oben abgebildeten räumlichen Koordinatensystem sieht man die Koordinaten nicht in wahrer Größe: die x-Einheit erscheint kleiner als die beiden andern Einheiten. Ein maßtreues Bild der Rißebenen entsteht, wenn man sie um die Rißachsen in die Zeichenebene klappt.
Die Aufrißebene stellen wir uns schon in der Zeichenebene vor. Die Grundrißebene klappen wir um die y-Achse nach unten und die Seitenrißebene um die z-Achse nach links.

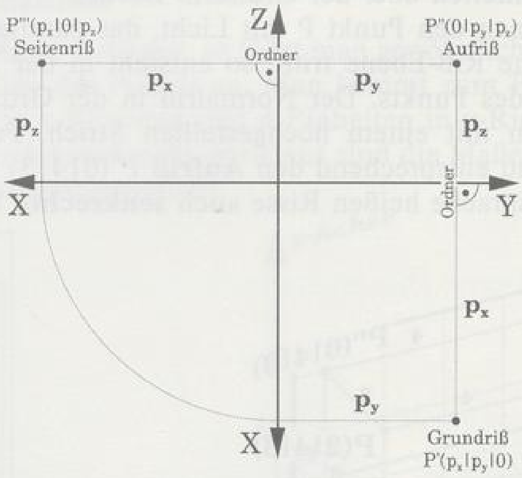
Die drei Risse des Punkts P(2|4|3)



Die Rißebenen sind in die Zeichenebene geklappt.

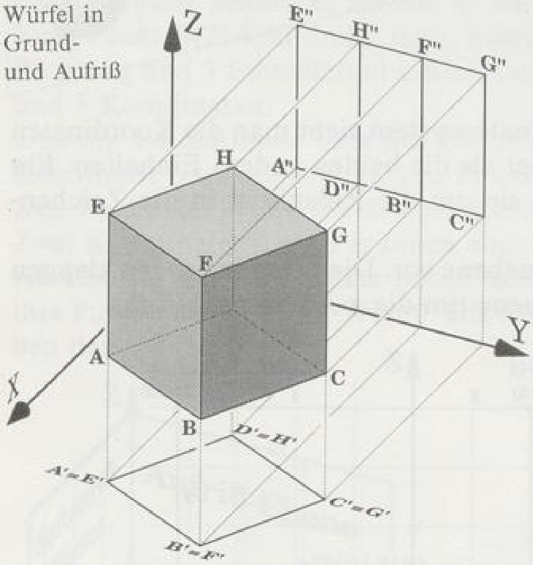
Die nächsten beiden Bilder zeigen allgemein den Zusammenhang zwischen den Koordinaten p_x, p_y und p_z eines Punkts und seinen Rissen P′, P″ und P‴.

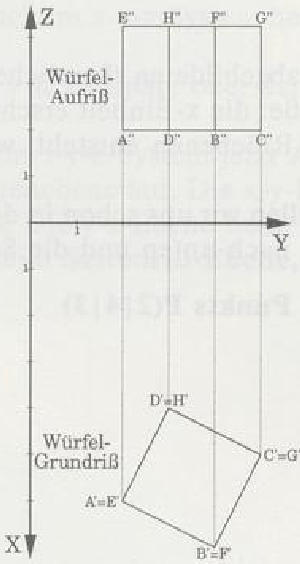


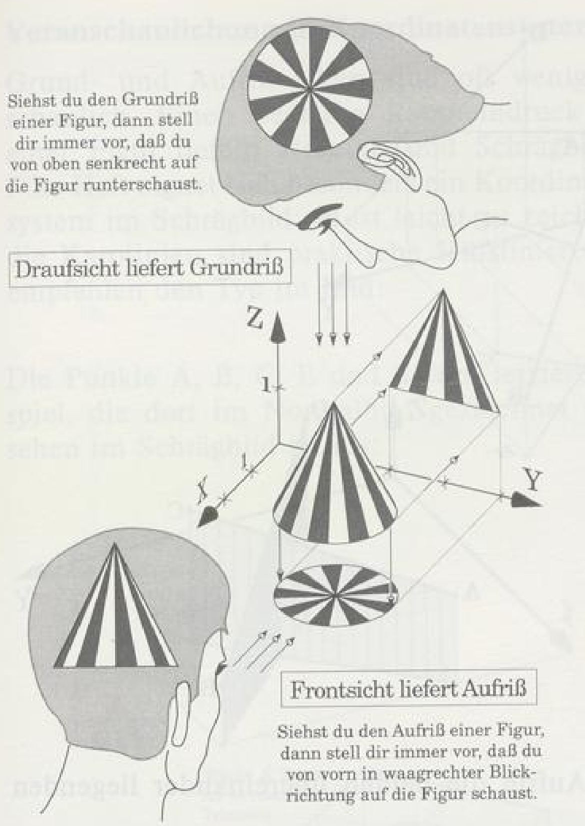


P′ und P″ liegen immer auf einer Gerade, die senkrecht ist zur y-Achse, P″ und P‴ liegen immer auf einer Senkrechten zur z-Achse. Solche Senkrechten heißen **Ordner.** Der Ordner von P′ und P″ schneidet die y-Achse in p_y, der von P″ und P‴ die z-Achse in p_z. Weil Grund- und Aufriß schon alle drei Koordinaten eines Punkts enthalten und damit seine Lage festlegen, läßt man den Seitenriß oft weg.
Um einen Körper in Grund- und Aufriß darzustellen, projiziert man seine Ecken oder sonst noch besondere Punkte von ihm in die Grund- und Aufrißebene.

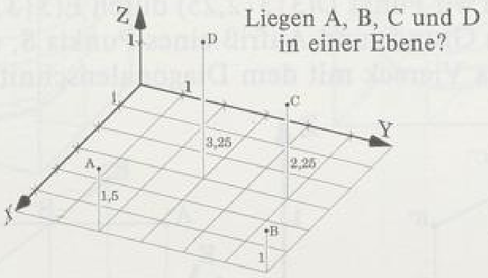
Würfel in Grund- und Aufriß

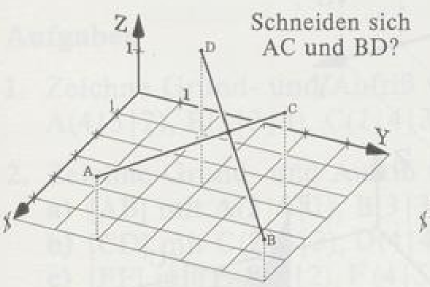


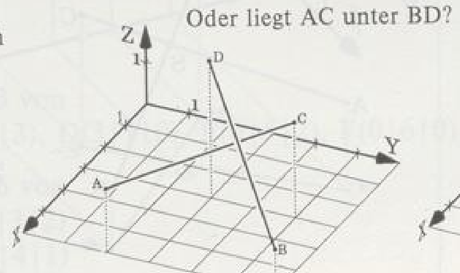


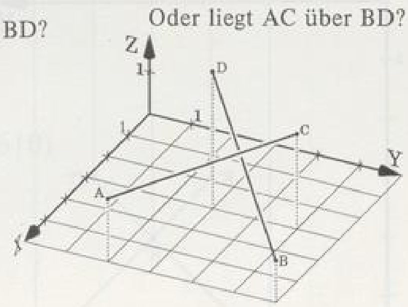


Mit Grund- und Aufriß lassen sich schon recht anspruchsvolle Aufgaben durch Anschauen lösen. Dazu ein Beispiel: Vier Punkte A, B, C und D im Raum können ein ebenes Viereck ABCD bilden oder die Ecken einer dreiseitigen Pyramide ABCD sein. Eine Möglichkeit, die beiden Fälle zu unterscheiden, besteht darin zu entscheiden, ob sich die »Diagonalen« AC und BD schneiden oder windschief sind. Schneiden sie sich, so ist ABCD ein ebenes Viereck, andernfalls eine dreiseitige Pyramide.

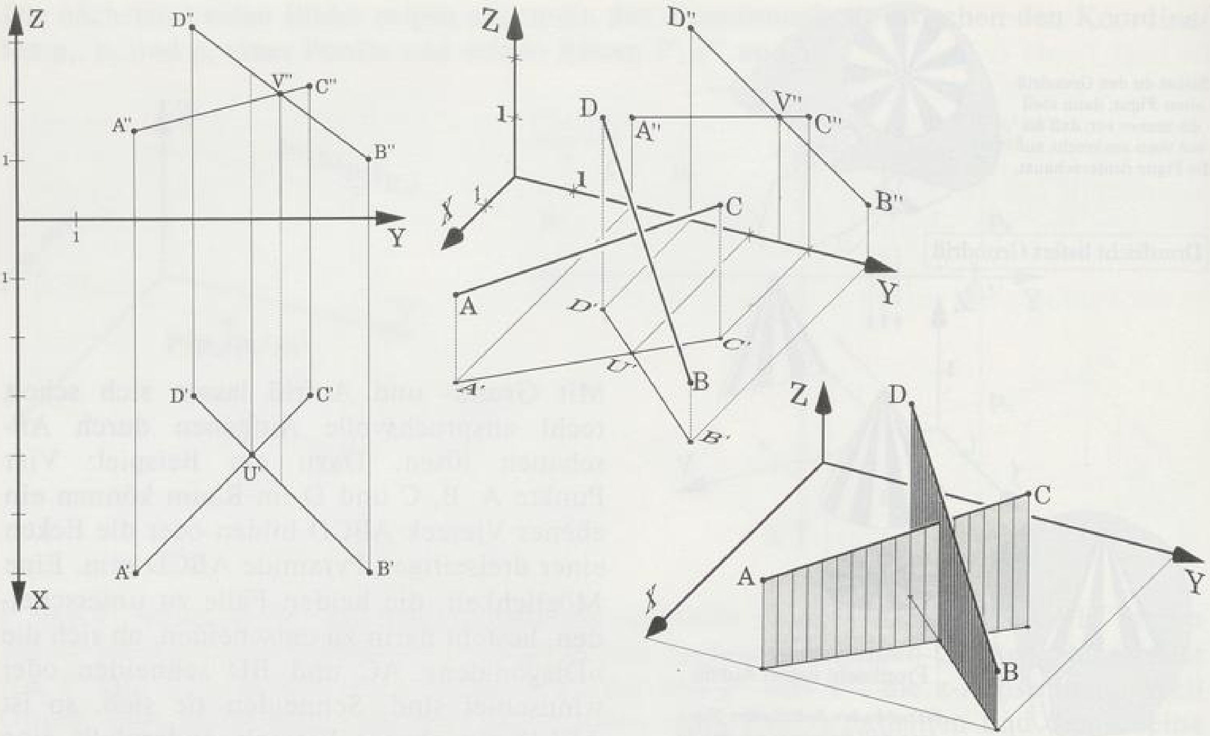




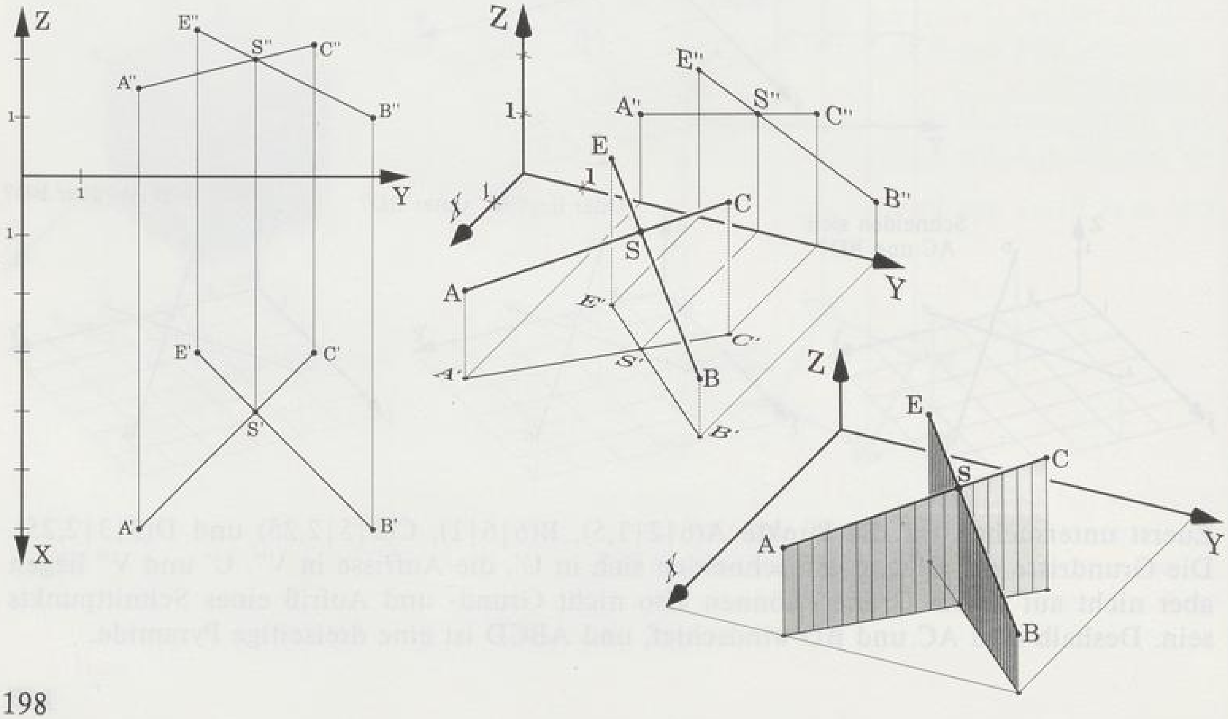




Zuerst untersuchen wir die Punkte A(6|2|1,5), B(6|6|1), C(3|5|2,25) und D(3|3|2,25). Die Grundrisse der Diagonalen schneiden sich in U′, die Aufrisse in V″. U′ und V″ liegen aber nicht auf einem Ordner, können also nicht Grund- und Aufriß eines Schnittpunkts sein. Deshalb sind AC und BD windschief, und ABCD ist eine dreiseitige Pyramide.

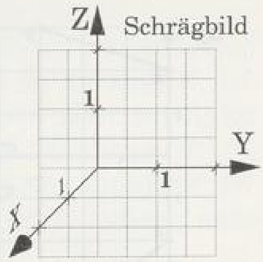


Ein Blick auf den Ordner durch U′ zeigt im Aufriß die beiden übereinander liegenden Punkte auf AC und BD: BD liegt **über** AC.
Ein Blick auf den Ordner durch V″ zeigt im Grundriß die beiden zugehörigen Punkte auf AC und BD: BD liegt **vor** AC.
Im zweiten Fall ersetzen wir Punkt D(3 | 3 | 2,25) durch E(3 | 3 | 2,5). Jetzt liegen S′ und S″ auf einem Ordner, sind also Grund- und Aufriß eines Punkts S, dem Schnittpunkt von AC und BD ABCE ist ein ebenes Viereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S(4 | 4 | 2).

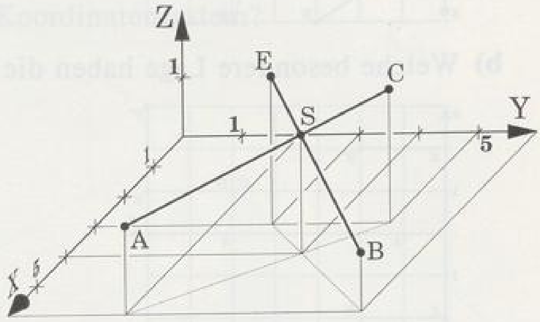


Veranschaulichung in Koordinatensystemen

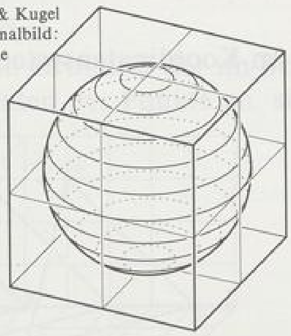
Grund- und Aufriß allein sind oft wenig anschaulich. Einen besseren Raumeindruck von einer Figur liefern Normal- und Schrägbilder. Fürs Heft eignet sich besonders ein Koordinatensystem im Schrägbild; es ist leicht zu zeichnen, die Karolinien sind praktische Hilfslinien. Wir empfehlen den Typ im Bild:



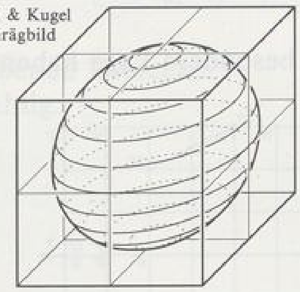
Die Punkte A, B, C, E und S vom letzten Beispiel, die dort im Normalbild gezeichnet sind, sehen im Schrägbild so aus:



Würfel & Kugel
im Normalbild:
Trimetrie



Würfel & Kugel
im Schrägbild



Aufgaben

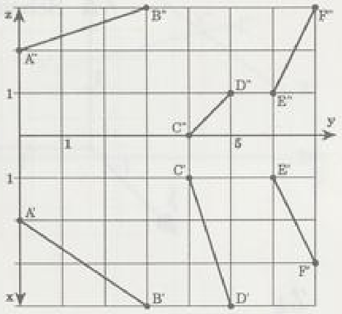
1. Zeichne Grund- und Aufriß von
A(4|3|2), B(3|2|4), C(2|4|3), D(3|1|0), E(0|5|2), F(0|6|0)

2. Zeichne Grund- und Aufriß von
a) [AB] mit A(2|0|1), B(3|3|2)
b) [CD] mit C(2|4|3), D(4|4|1)
c) [EF] mit E(0|7|2), F(4|5|3)

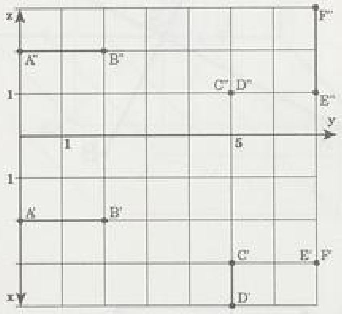
3. Zeichne Grund- und Aufriß des Dreiecks
a) ABC mit A(1|1|11), B(4|2|3), C(2|4|2)
b) DEF mit D(3|7|3), E(0|5|3), F(4|6|0)
c) GHI mit G(1|7|0), H(4|9|3), I(1|9|0)

4. Ermittle die Koordinaten der Punkte und zeichne die Strecken im Schrägbild.

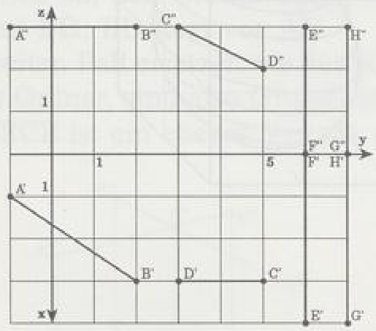
a)



b) Welche besondere Lage haben die Strecken im Koordinatensystem?

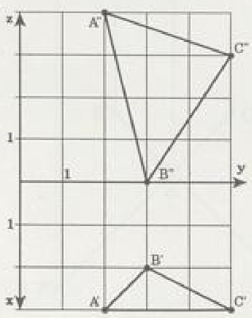


c) Welche besondere Lage haben die Strecken im Koordinatensystem?

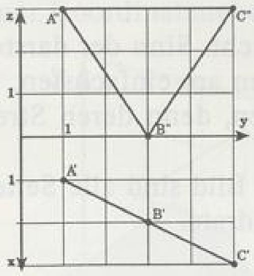


5. Ermittle die Koordinaten der Punkte und zeichne die Dreiecke im Schrägbild.

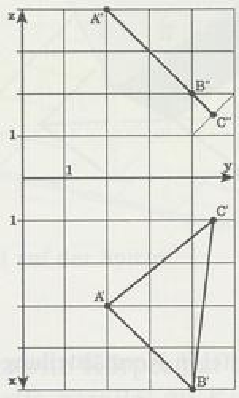
a)



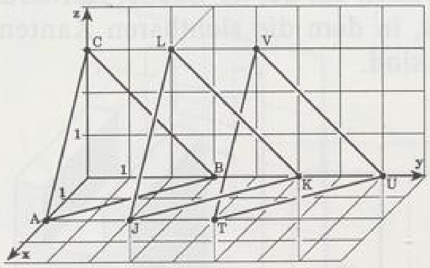
b) Welche besondere Lage hat das Dreieck im Koordinatensystem?



c) Welche besondere Lage hat das Dreieck im Koordinatensystem?

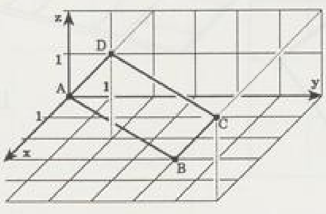


6. Zeichne Auf- und Grundriß der im Schrägbild gegebenen Dreiecke. Gib die Koordinaten der Punkte an, sie sind ganzzahlig.

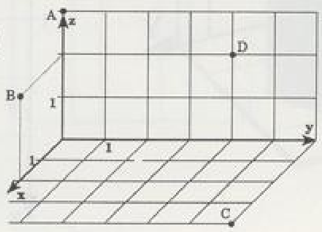


7. Untersuche, ob das Viereck ABCD eben ist, und lies gegebenenfalls den Schnittpunkt S der Diagonalen ab.

a)



b)

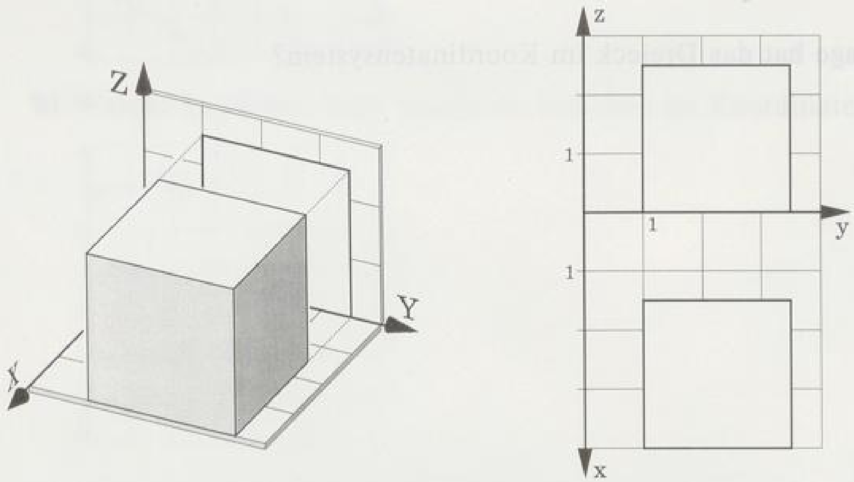


c) A(1 | −1 | 0), B(3 | 0 | 2), C(2,5 | 3,5 | 3), D(0 | 3 | 0)
d) A(3,5 | 1 | 2), B(1,5 | 2,5 | 0), C(0,5 | 5 | 0), D(3,5 | 4,5 | 4)

8. Bestimme die fehlende Koordinate so, daß das Viereck ABCD eben ist:
a) A(2 | 0 | 1), B(0 | 3,5 | 0), C(2 | 4,5 | 4), D(3,5 | 0 | ?)
b) A(0 | 0 | 0), B(1,5 | 2 | 2), C(3 | 1,5 | 3), D(0 | ? | 2)

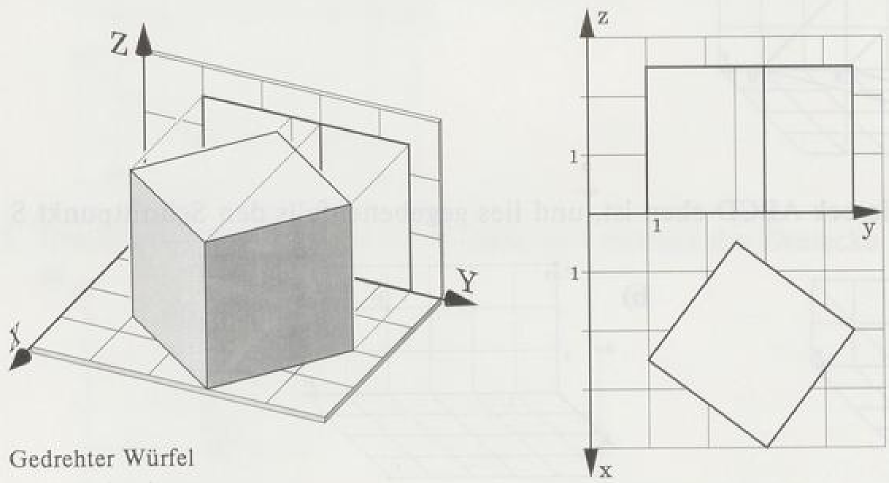
8.1.2 Grund- und Aufriß einfacher Körper

Bisher haben wir nur ebene Figuren in Grund- und Aufriß untersucht. Sinn der darstellenden Geometrie ist es, Körper maßtreu abzubilden. Die Risse werden am einfachsten, wenn möglichst viele Seitenflächen parallel zu Koordinatenebenen liegen, denn deren Strecken und Winkel sieht man maßtreu.
Wir beginnen mit dem einfachsten Körper, dem Würfel. Im ersten Bild sind alle Seitenflächen parallel zu Koordinatenebenen: Grund- und Aufriß sind Quadrate.



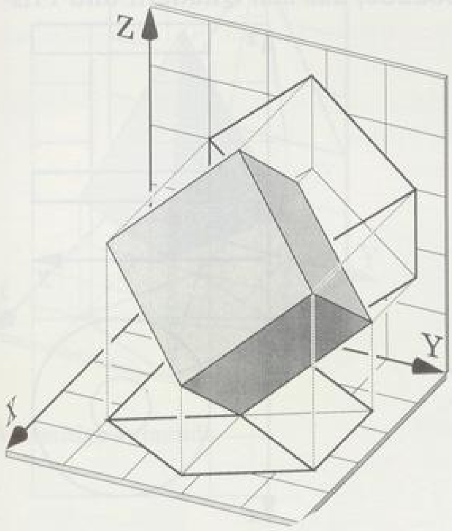
Würfel in Normalstellung

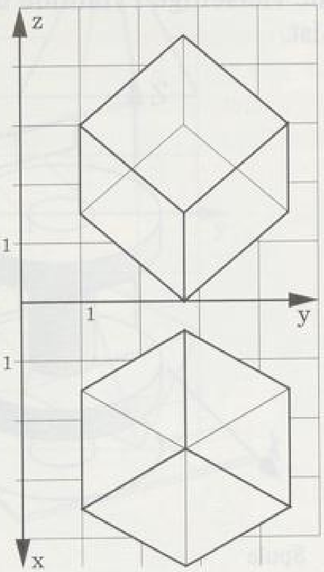
Im zweiten Bild ist derselbe Würfel gedreht, steht aber noch auf der xy-Ebene. Der Grundriß ist das gedrehte Quadrat, der Aufriß ist ein Rechteck, in dem die sichtbaren Kanten dick und die hintere (verdeckte) Kante dünner gezeichnet sind.



Gedrehter Würfel

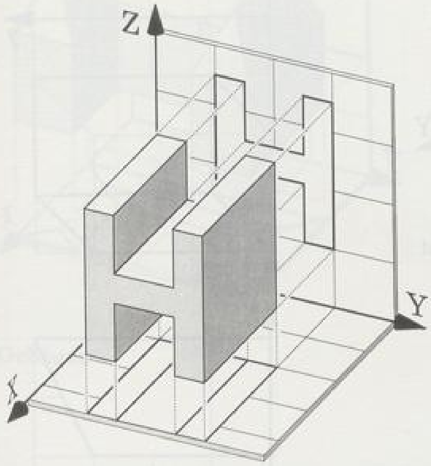
Im dritten Bild steht dieser Würfel auf einer Ecke. Jetzt ist keine Seitenfläche mehr parallel zu einer Koordinatenebene: Grund- und Aufriß sind Sechsecke.

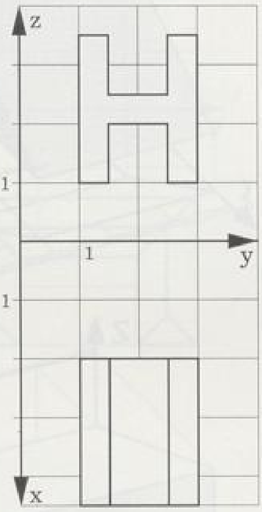




Würfel auf der Spitze

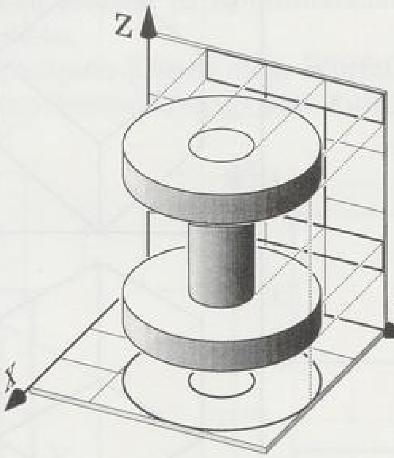
Der zweite Körper hat ein H-Profil. Er ist zwar etwas komplizierter, aber seine Seitenflächen sind alle parallel zu Koordinatenebenen.

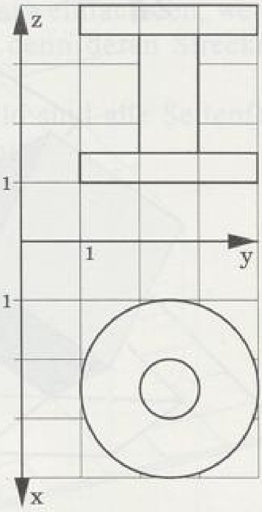




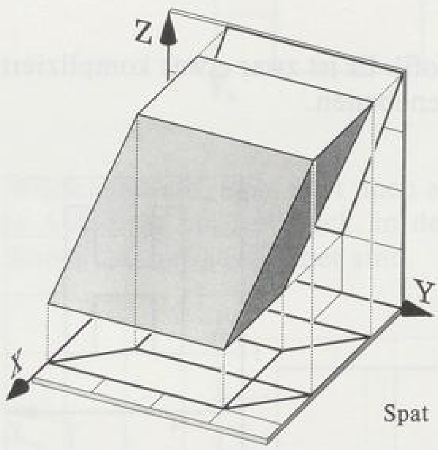
H-Profil

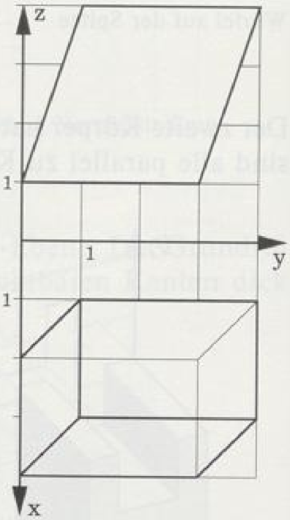
Die nächsten Bilder zeigen Körper mit Seitenflächen, die keine rechten Winkel mehr bilden, aber immer noch eine Seitenfläche parallel zur Grundrißebene haben: eine Spule, ein Spat, ein Sechsflach, eine vierseitige Pyramide und ein Gebäude, das aus Quadern und Prismen zusammengesetzt ist.



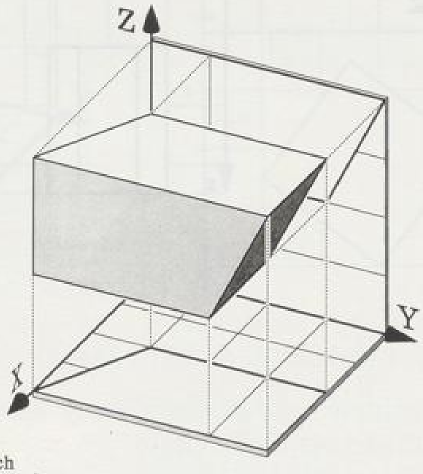


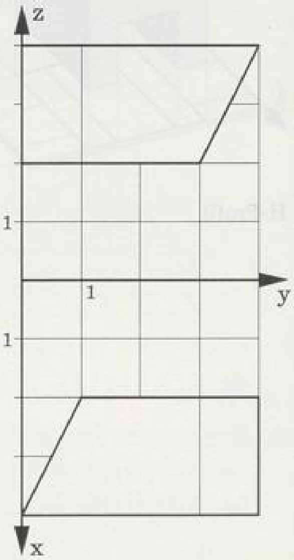
Spule



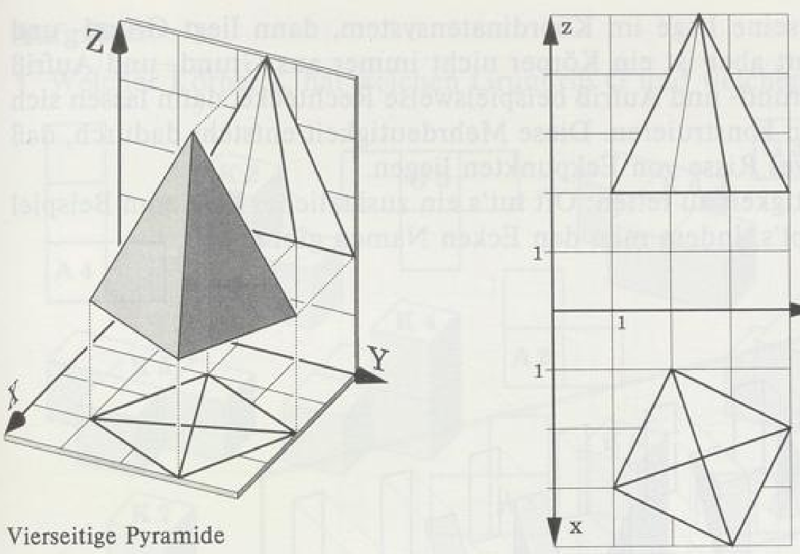


Spat

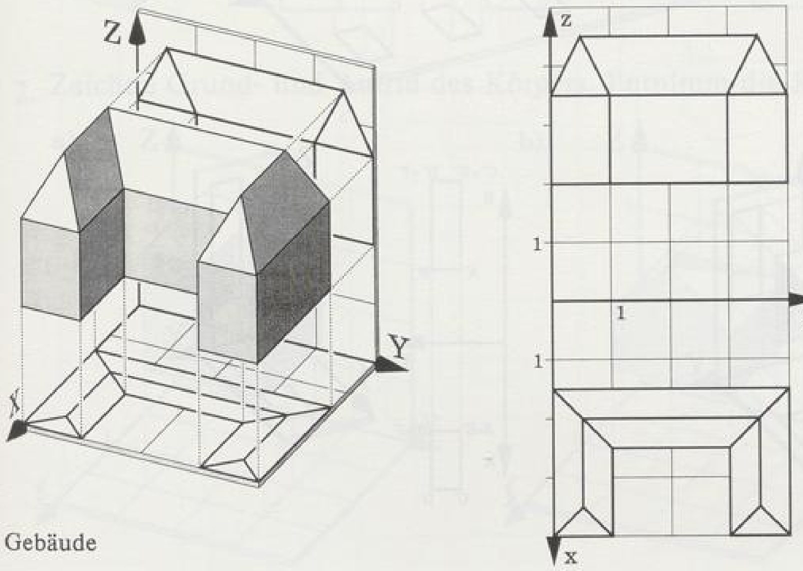




Sechsflach
verschnittener Quader

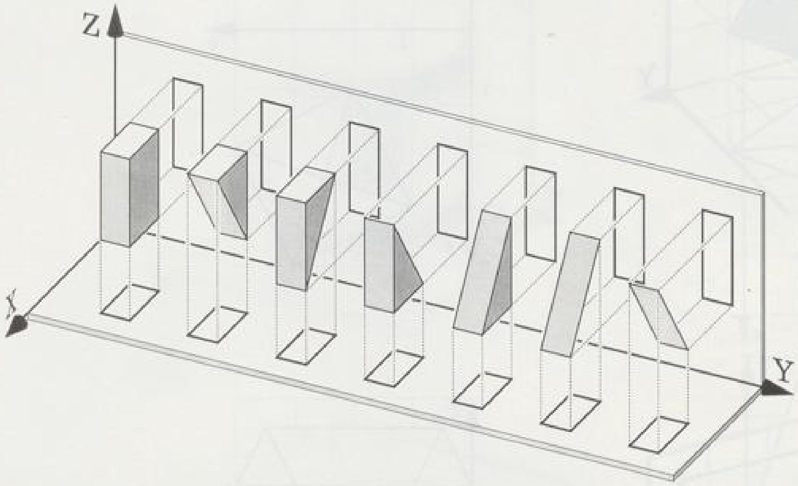


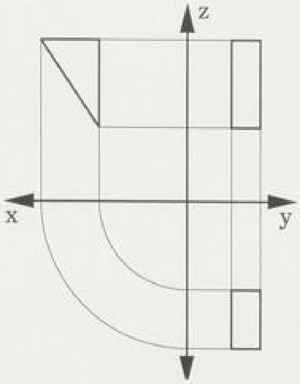
Vierseitige Pyramide

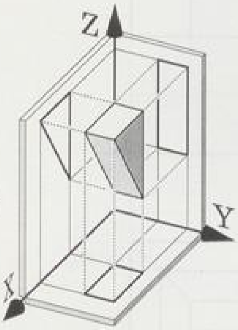


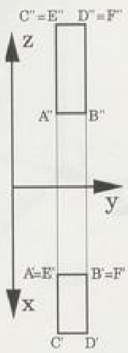
Gebäude

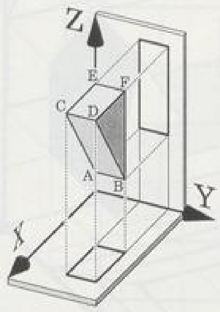
Kennt man einen Körper und seine Lage im Koordinatensystem, dann liegt Grund- und Aufriß eindeutig fest. Umgekehrt aber ist ein Körper nicht immer aus Grund- und Aufriß eindeutig konstruierbar: Sind Grund- und Aufriß beispielsweise Rechtecke, dann lassen sich daraus sieben räumliche Figuren konstruieren. Diese Mehrdeutigkeit entsteht dadurch, daß auf **einem** Ordner **mehr als zwei** Risse von Eckpunkten liegen.
Doch es gibt Mittel, die Eindeutigkeit zu retten: Oft tut's ein zusätzlicher Riß, zum Beispiel der Seitenriß. Immer aber klappt's, indem man den Ecken Namen gibt.





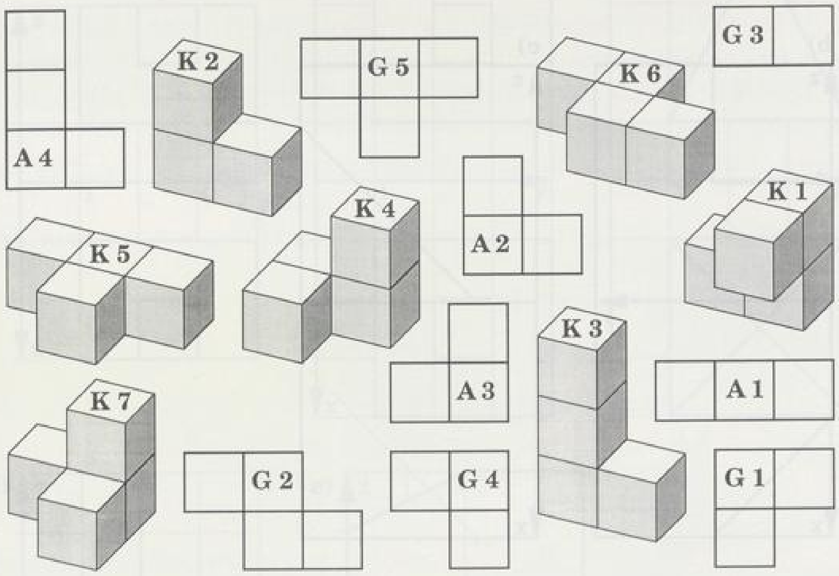






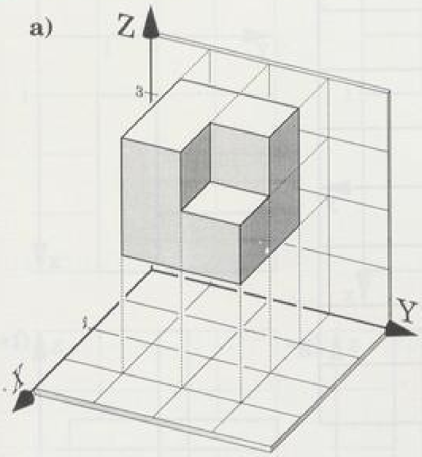
Aufgaben

1. Welcher Körper K hat welchen Grundriß G und welchen Aufriß A?

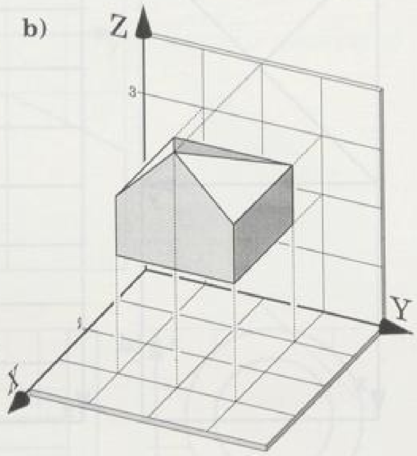


2. Zeichne Grund- und Aufriß des Körpers. Entnimm die Koordinaten dem Bild.

a)



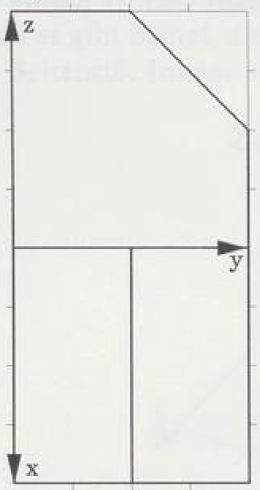
b)



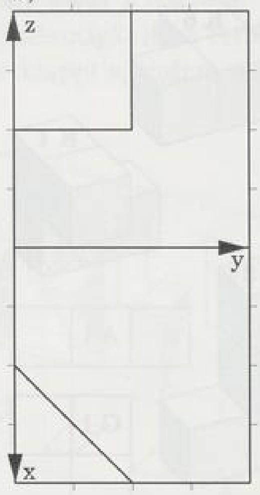
3. Zeichne Grund- und Aufriß des beschriebenen Körpers (Alle Koordinaten sind nicht negativ!):
   a) Eine Kugel mit Radius 3, die alle Koordinatenebenen berührt.
   b) Einen Würfel auf der xy-Ebene mit den benachbarten Ecken $(4|1|0)$ und $(1|5|0)$.
   c) Eine gerade vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche steht auf der xy-Ebene, sie hat die Höhe 5 und die benachbarten Ecken $(2|2|0)$ und $(3|7|0)$.

4. Von einem Würfel der Kantenlänge 4 ist ein Stück ab- und herausgeschnitten; Grund- und Aufriß zeigen den Restkörper. Zeichne ein möglichst einfaches Schrägbild des Restkörpers.

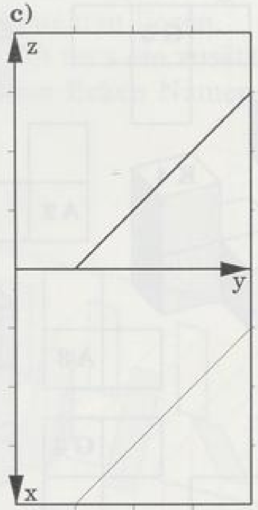
a)



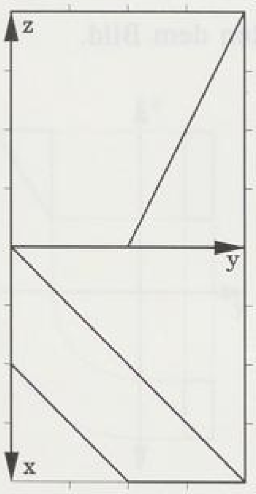
b)



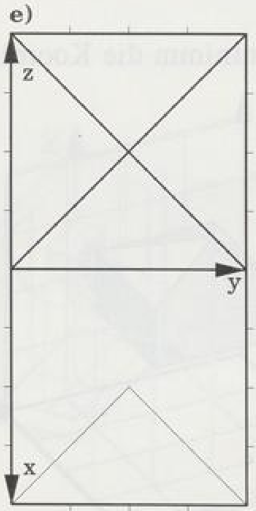
c)



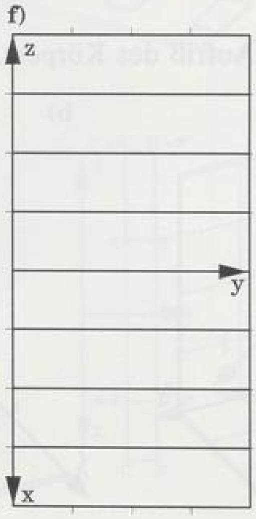
d)



e)

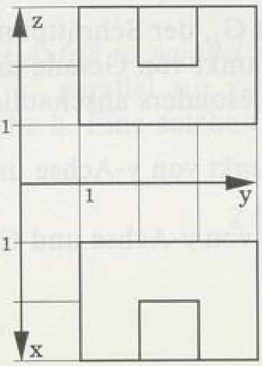


f)

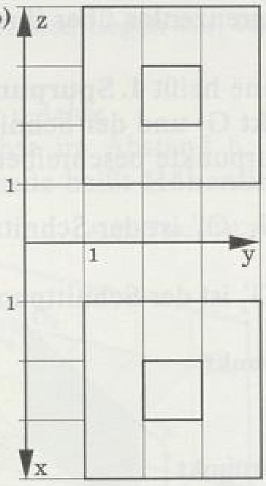


5. Zeichne ein möglichst einfaches Schrägbild von:

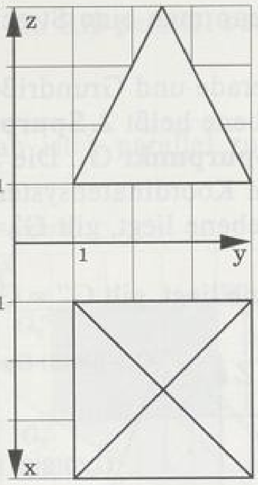
a)



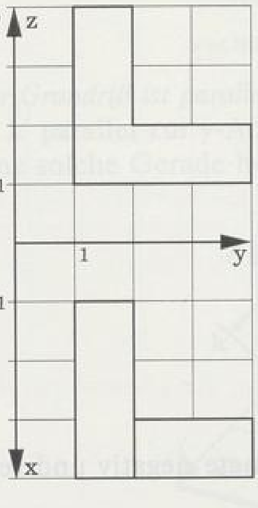
b)



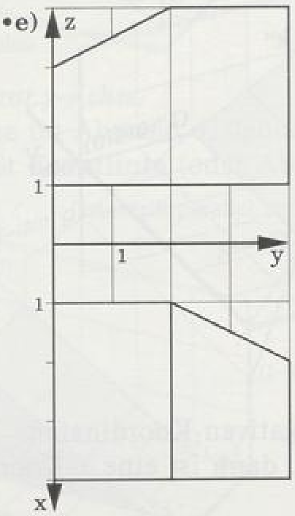
c)



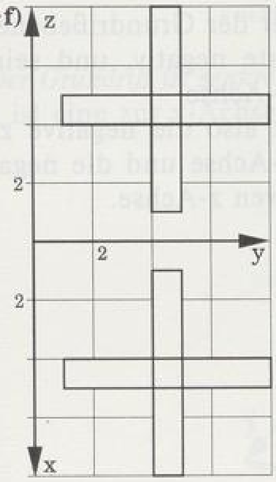
•d)



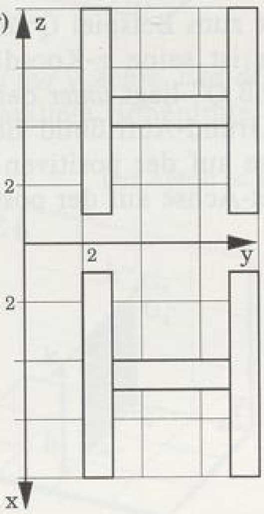
•e)



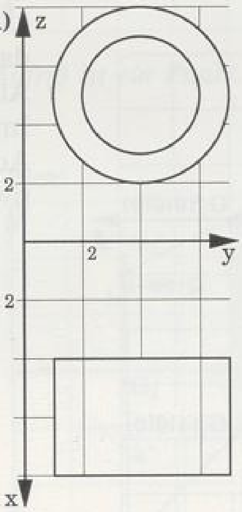
•f)



•g)

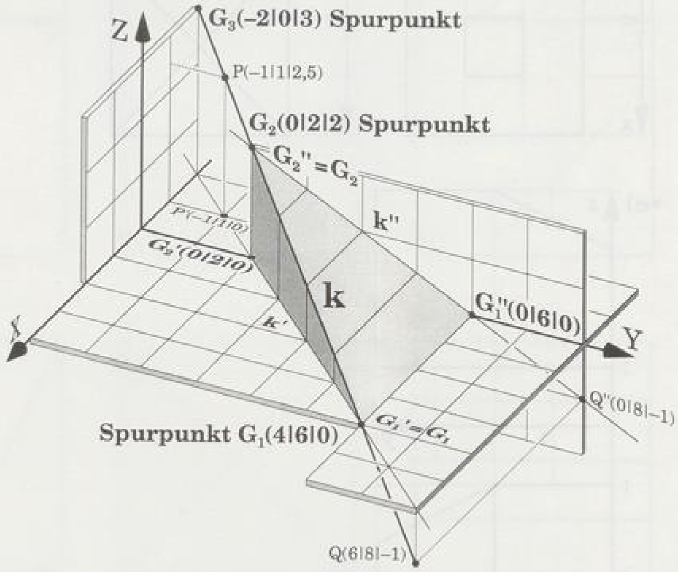


h)

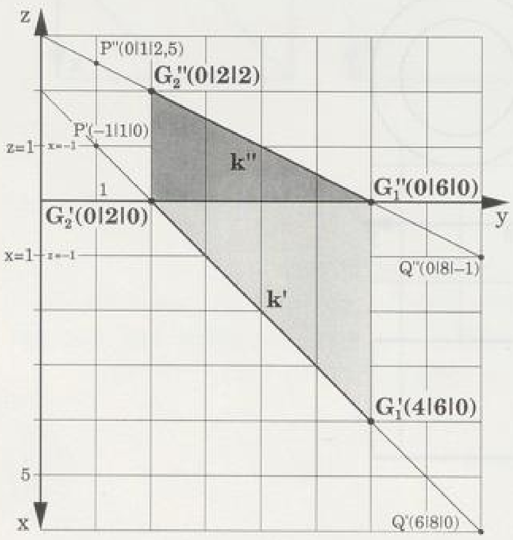


8.1.3 Darstellung von Geraden

Eine Gerade entsteht, wenn man eine Strecke grenzenlos über ihre Endpunkte hinaus verlängert.
Der Schnittpunkt von Gerade und Grundrißebene heißt **1. Spurpunkt** G_1, der Schnittpunkt von Gerade und Aufrißebene heißt **2. Spurpunkt** G_2 und der Schnittpunkt von Gerade und Seitenrißebene heißt **3. Spurpunkt** G_3. Die Spurpunkte beschreiben besonders anschaulich die Lage einer Gerade im Koordinatensystem.
Weil G_1 in der Grundrißebene liegt, gilt $G_1' = G_1$; G_1'' ist der Schnittpunkt von y-Achse und Geradenaufriß k''.
Weil G_2 in der Aufrißebene liegt, gilt $G_2'' = G_2$; G_2' ist der Schnittpunkt von y-Achse und Geradengrundriß k'.



Auf einer Gerade liegen auch Punkte mit negativen Koordinaten.
Liegt zum Beispiel P hinter der Aufrißebene, dann ist eine x-Koordinate negativ und sein Grundriß P' liegt *über* der y-Achse.



Liegt zum Beispiel Q unter der Grundrißebene, dann ist seine z-Koordinate negativ, und sein Aufriß Q'' liegt *unter* der y-Achse.
Im Grund-Aufrißbild liegt also die negative z-Achse auf der positiven x-Achse und die negative x-Achse auf der positiven z-Achse.

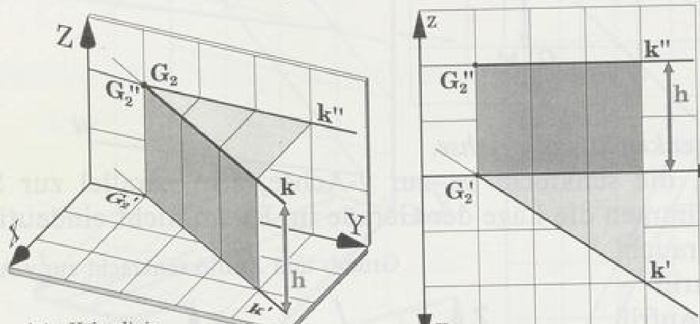
Sonderfälle

Besondere Lagen von Geraden liegen vor, wenn ein Riß parallel oder senkrecht zur y-Achse ist.

Der Aufriß ist parallel zur y-Achse.

Ist k″ parallel zur y-Achse im Abstand h, dann ist k parallel zur Grundrißebene in der Höhe h. Eine solche Gerade heißt **Höhenlinie.**

Aufriß parallel zur y-Achse

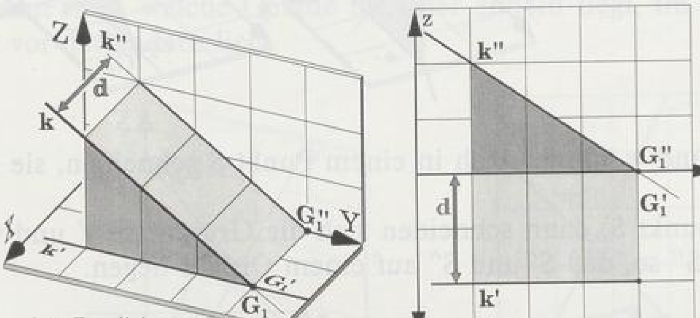


k ist Höhenlinie

Der Grundriß ist parallel zur y-Achse.

Ist k′ parallel zur y-Achse im Abstand d, dann ist k parallel zur Aufrißebene im Abstand d. Eine solche Gerade heißt **Frontlinie** (oder Abstandlinie).

Grundriß parallel zur y-Achse

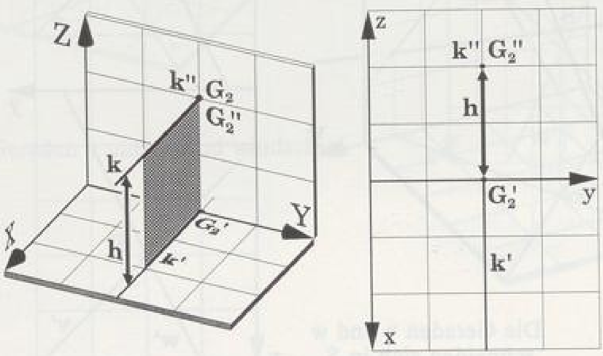


k ist Frontlinie

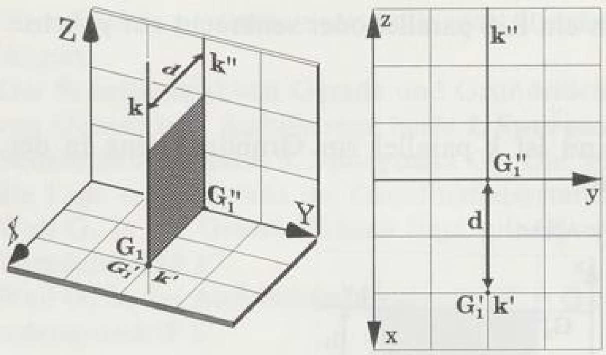
Der Grundriß ist senkrecht zur y-Achse, und der Aufriß ist ein Punkt.

k ist eine zur x-Achse parallele Höhenlinie.

Der Aufriß ist ein Punkt



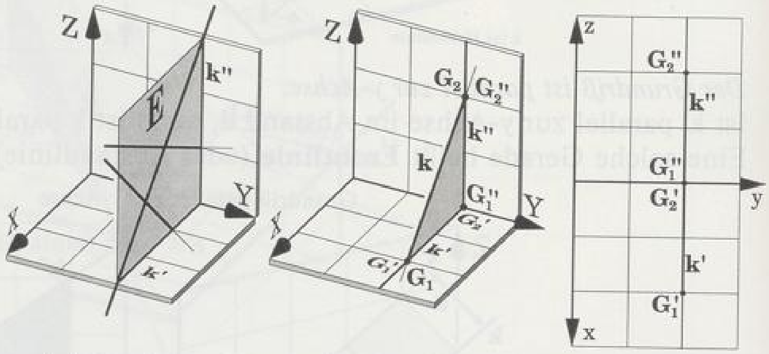
Der Grundriß ist ein Punkt



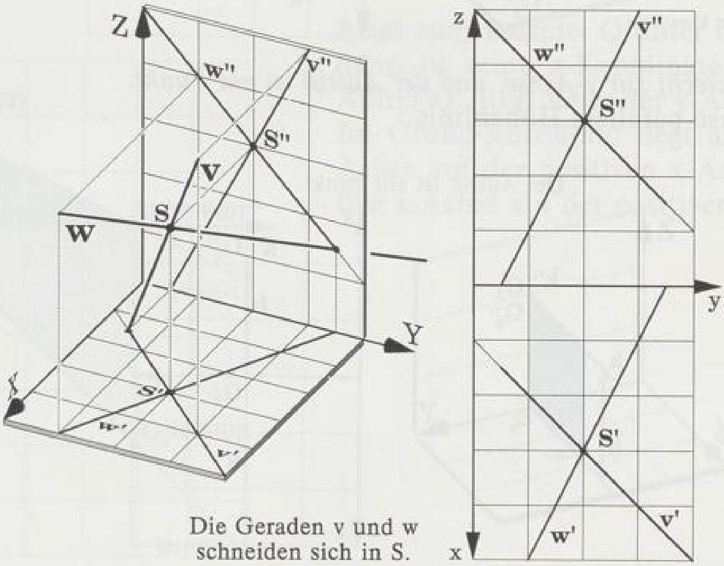
Der Aufriß ist senkrecht zur y-Achse, und der Grundriß ist ein Punkt.
k ist eine senkrechte Frontlinie, also parallel zur z-Achse.

Grund- und Aufriß sind senkrecht zur y-Achse.
k liegt in einer Ebene, die senkrecht ist zur y-Achse, also parallel zur Seitenrißebene. Grund- und Aufriß bestimmen die Lage der Gerade im Raum nicht eindeutig. Um die Eindeutigkeit zu retten, braucht man noch den Seitenriß – oder Grund- und Aufriß zweier Geradenpunkte, für die sich am besten die Spurpunkte eignen (wenn sie nicht auf der y-Achse zusammenfallen.

Grund- und Aufriß senkrecht zur y-Achse

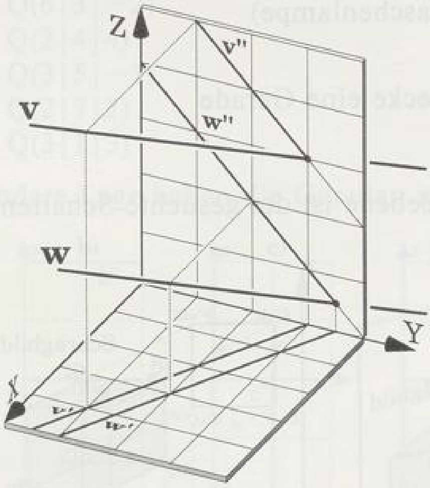


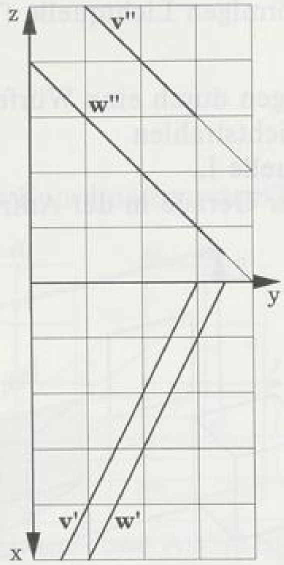
Zwei Raumgeraden v und w können sich in einem Punkt S schneiden, sie können parallel oder windschief sein.
Gibt es einen Schnittpunkt S, dann schneiden sich die Grundrisse v′ und w′ in s′ und die Aufrisse v″ und w″ in S″ so, daß S′ und S″ auf einem Ordner liegen.



Die Geraden v und w schneiden sich in S.

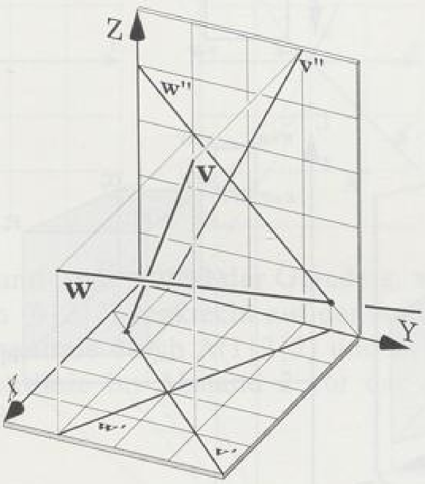
Umgekehrt erkennt man die Existenz eines Schnittpunkts daran, daß sich die Grundrisse und die Aufrisse jeweils schneiden und ihre Schnittpunkte auf einem Ordner liegen.
Sind v und w parallel, dann gilt das auch für die Risse. Umgekehrt folgt aus der paarweisen Parallelität der Risse die Parallelität der Raumgeraden v und w.

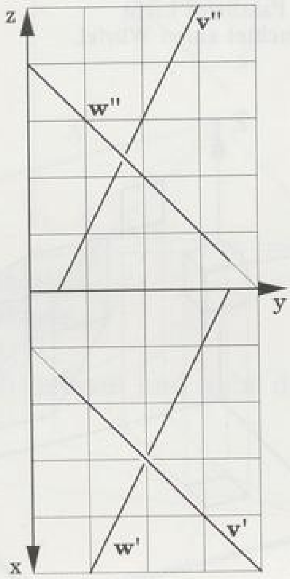




Die Geraden v und w sind parallel.

In allen andern Fällen liegen die Geraden windschief.
Im Aufriß erkennt man, welche Gerade über der andern liegt, im Grundriß erkennt man, welche Gerade vor der andern liegt.





Die Geraden v und w sind windschief.

Schattenwurf

Mit den Spurpunkten finden wir leicht den Schatten eines Körpers in einer der Rißebenen. Wir konstruieren den Schatten, den ein Würfel in der Aufrißebene hat, wenn der Würfel

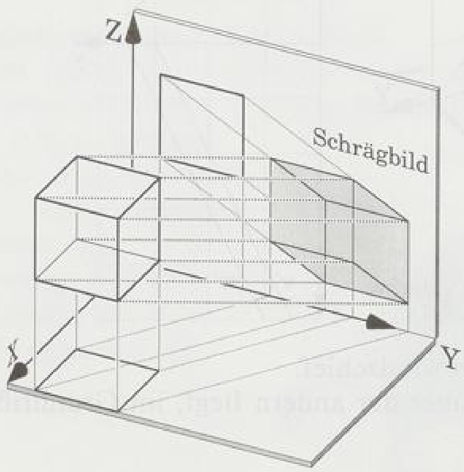
- von parallelem Licht (Sonne)
- von einer punktförmigen Lichtquelle (Taschenlampe)

beleuchtet ist.

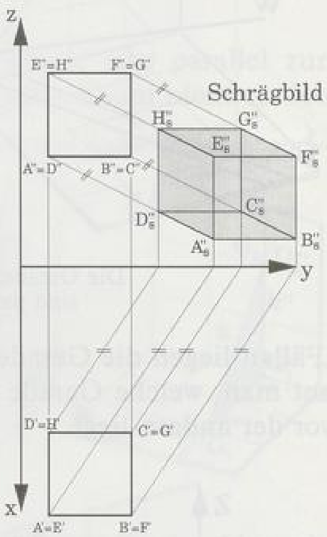
Konstruktion: Wir legen durch eine Würfelecke eine Gerade

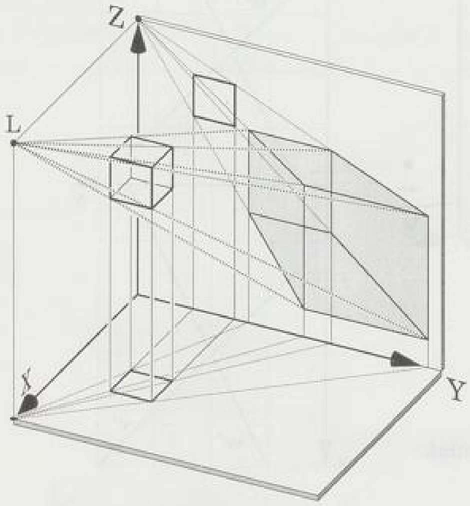
- parallel zu den Lichtstrahlen
- durch die Lichtquelle L.

Der Spurpunkt dieser Gerade in der Aufrißebene ist der gesuchte Schattenpunkt.

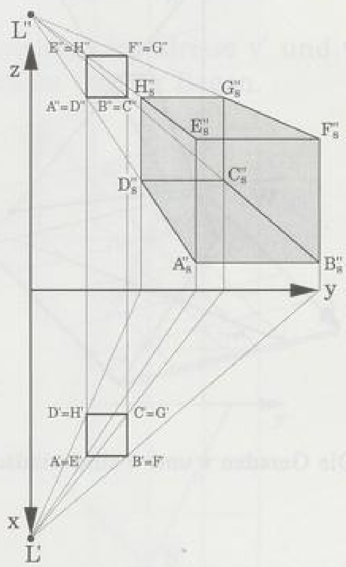


Paralleles Licht
beleuchtet einen Würfel.





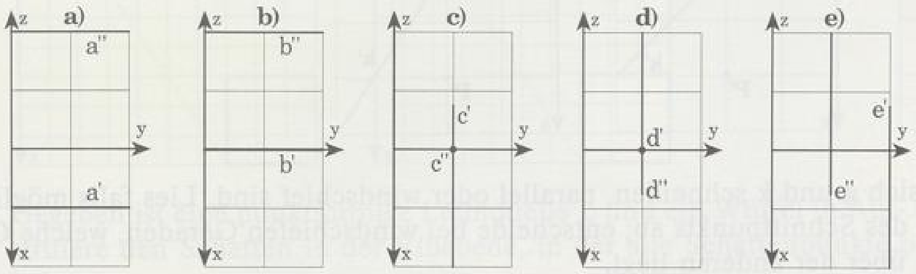
Eine punktförmige Lichtquelle L
beleuchtet einen Würfel.



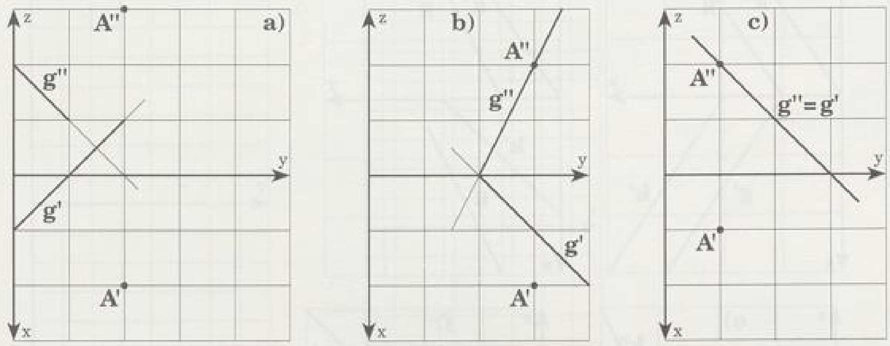
Aufgaben

1. Zeichne Grund- und Aufriß der Gerade PQ und lies aus der Zeichnung die Koordinaten der Spurpunkte G_1 und G_2 ab.
   a) $P(3|2|2)$, $Q(-3|5|-1)$
   b) $P(2|5|2)$, $Q(6|3|-2)$
   c) $P(2|4|1)$, $Q(2|4|4)$
   d) $P(1|3|1)$, $Q(3|5|-1)$
   e) $P(1|5|2)$, $Q(2|7|2)$
   f) $P(1|3|1)$, $Q(3|1|3)$

2. Welche besondere Lage haben die Geraden im Koordinatensystem?



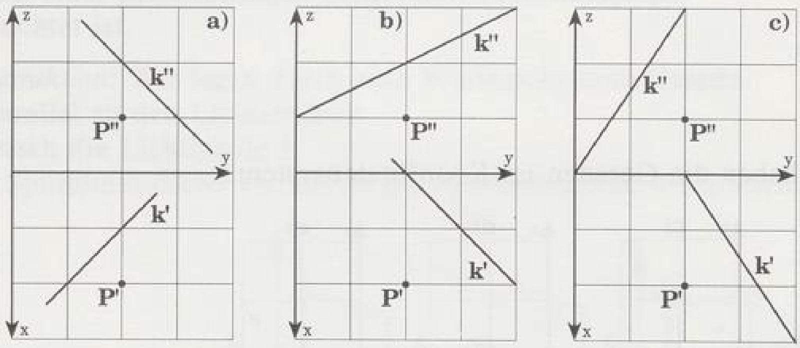
3. p sei die Parallele zu g durch A. Zeichne p in Grund- und Aufriß und lies die Koordinaten der Spurpunkte ab.



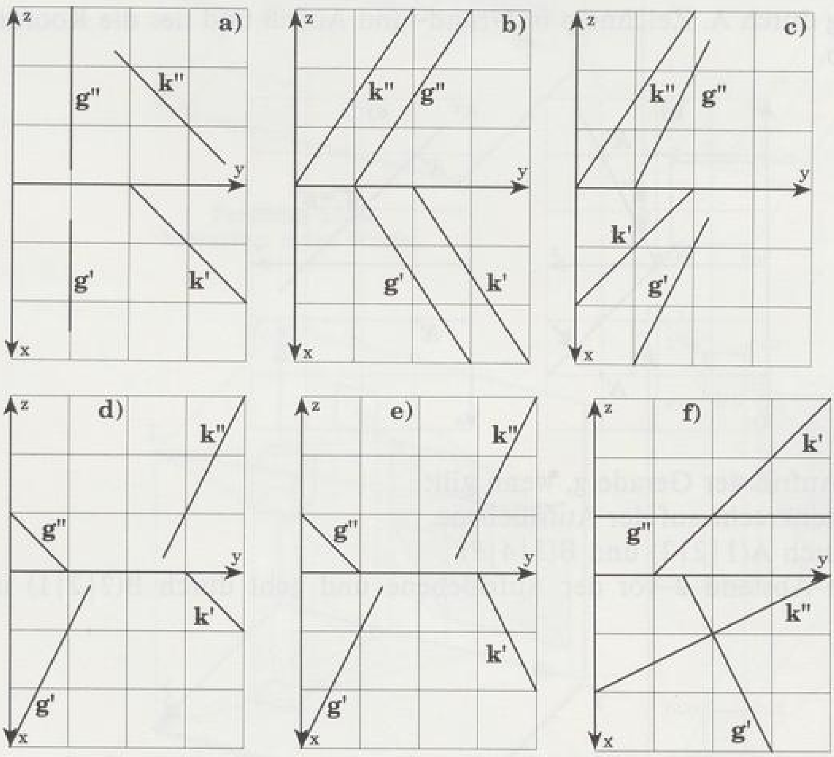
4. Zeichne Grund- und Aufriß der Gerade g, wenn gilt:
   a) g steht in $(0|2|3)$ senkrecht auf der Aufrißebene.
   b) g ist Höhenlinie durch $A(1|2|2)$ und $B(3|4|?)$.
   c) g ist Frontlinie im Abstand 2 vor der Aufrißebene und geht durch $B(?|2|1)$ und $G_1(?|0|0)$.

5. Gegeben sind P und k in Grund- und Aufriß. Zeichne Grund- und Aufriß einer Gerade g durch P, die k schneidet und parallel ist zur

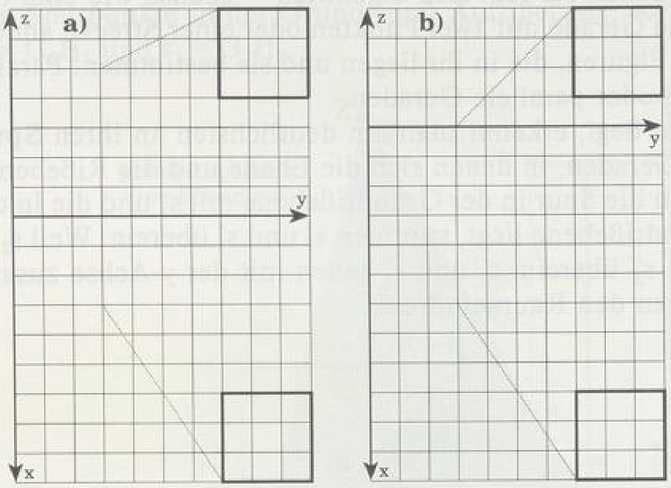
a) Aufrißebene
b) Grundrißebene
c) Seitenrißebene



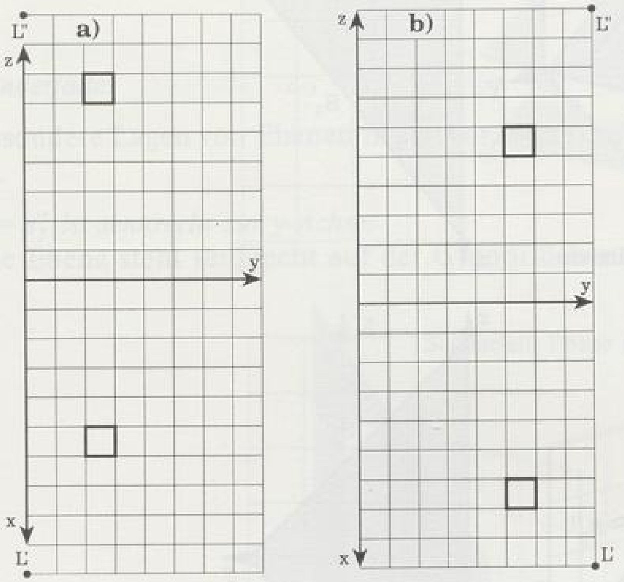
6. Untersuche, ob sich g und k schneiden, parallel oder windschief sind. Lies falls möglich die Koordinaten des Schnittpunkts ab; entscheide bei windschiefen Geraden, welche Gerade vor, welche über der anderen liegt.



7. Gegeben ist ein parallel beleuchteter Würfel in Auf- und Grundriß. Konstruiere seinen Schatten in der Rißebene, in der alle Schattenpunkte positive Koordinaten haben.

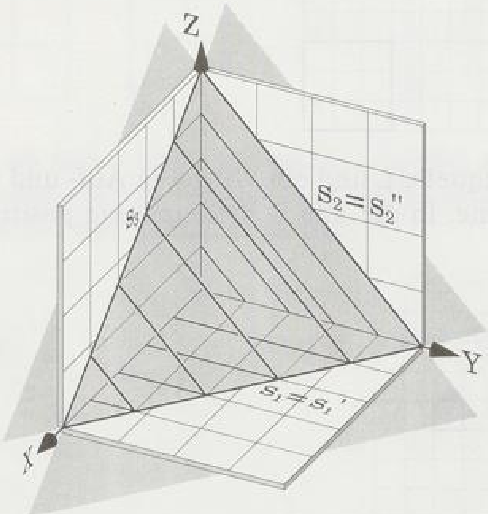


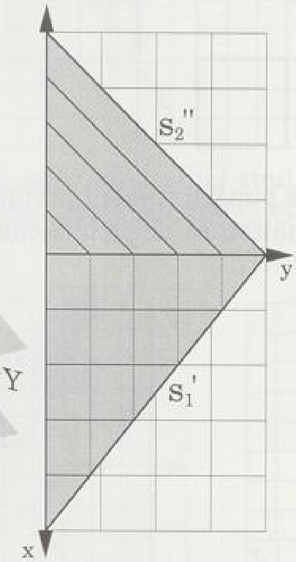
8. Gegeben ist eine punktförmige Lichtquelle L und ein Würfel in Auf- und Grundriß. Konstruiere den Schatten in der Rißebene, in der alle Schattenpunkte positive Koordinaten haben.



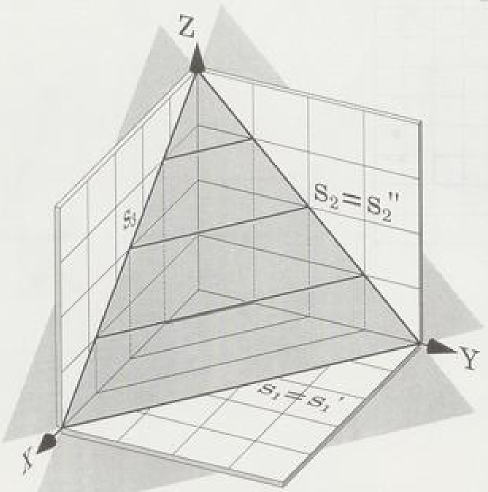
8.1.4 Darstellung von Ebenen

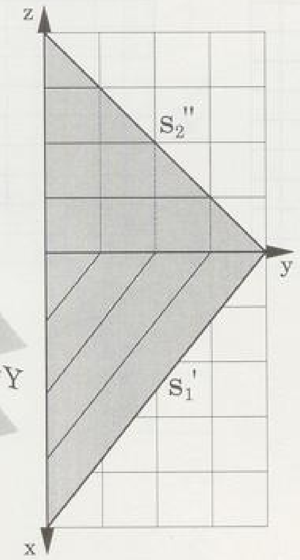
Eine Ebene ist in keiner Richtung begrenzt, sie läßt sich eigentlich – ebenso wie eine Gerade – nicht zeichnen. So wie man eine Gerade mit zwei Punkten oder einer Strecke andeutet, so verwendet man bei einer Ebene Figuren, die in ihr liegen und sie bestimmen: Parallelogramme, Dreiecke, sich schneidende oder parallele Geraden.
Wie eine Ebene im Koordinatensystem liegt, erkennt man am deutlichsten an ihren **Spurgeraden,** kurz Spuren – das sind die Geraden, in denen sich die Ebene und die Rißebenen schneiden. Gewöhnlich bezeichnet man die Spur in der Grundrißebene mit s_1 und die in der Aufrißebene mit s_2. Weil s_1 in der Grundrißebene liegt, stimmen s_1 und s_1' überein. Weil s_2 in der Aufrißebene liegt, stimmen s_2 und s_2'' überein. s_2' und s_1'' fallen mit der y-Achse zusammen. Höhen- und Frontlinien verstärken den Raumeindruck.





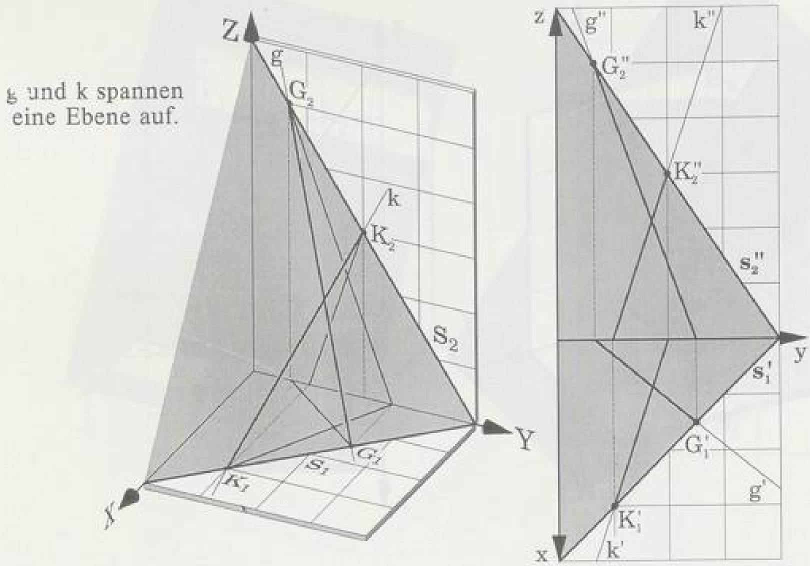
Ebene mit Frontlinien





Ebene mit Höhenlinien

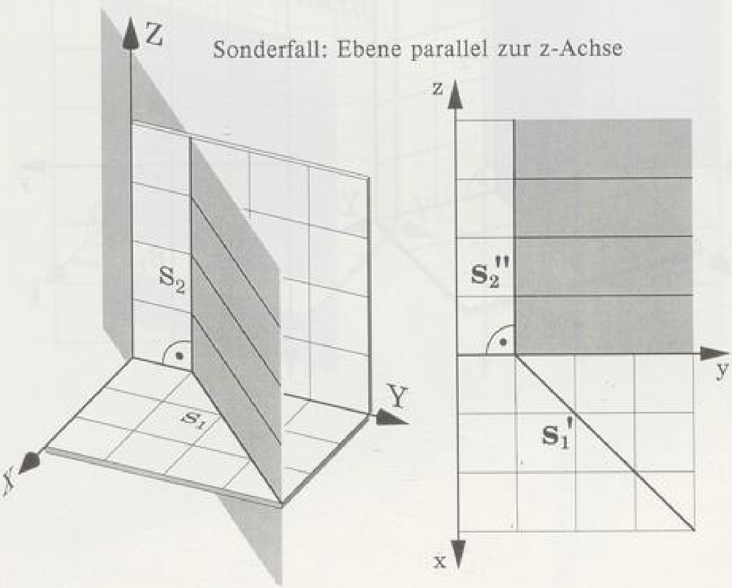
Ist die Ebene nicht durch ihre Spuren, sondern durch andere Bestimmungsstücke gegeben, dann kennt man auf jeden Fall zwei Geraden g und h, die in ihr liegen. Haben diese Geraden Spurpunkte in der Grund- und Aufrißebene, so hat man damit die Spuren der Ebene: $s_1 = G_1H_1$ und $s_2 = G_2H_2$.



Sonderfälle

Besondere Lagen von Ebenen liegen vor, wenn eine Spur senkrecht oder parallel zur y-Achse ist.

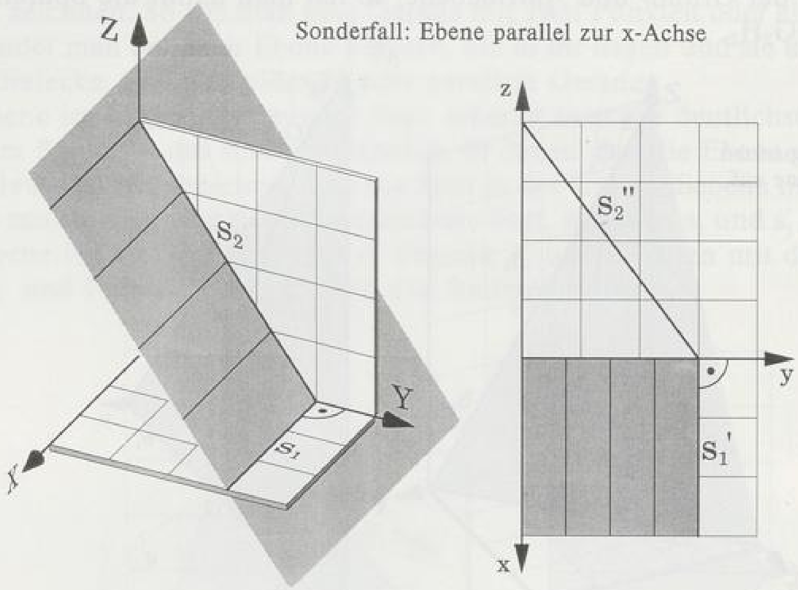
$s_2 = s_2''$ ist senkrecht zur y-Achse.
Die Ebene steht senkrecht auf der Grundrißebene, sie ist parallel zur z-Achse.



Sonderfall: Ebene parallel zur z-Achse

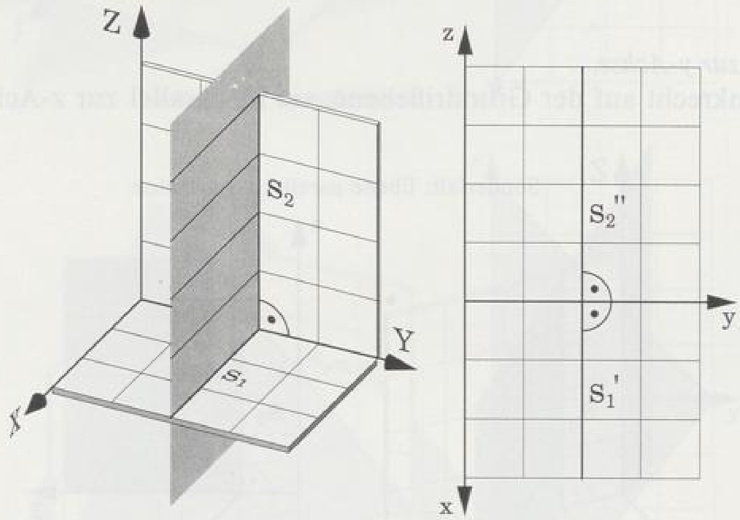
$s_1 = s_1'$ ist senkrecht zur y-Achse.
Die Ebene steht senkrecht auf der Aufrißebene, sie ist parallel zur x-Achse.

Sonderfall: Ebene parallel zur x-Achse



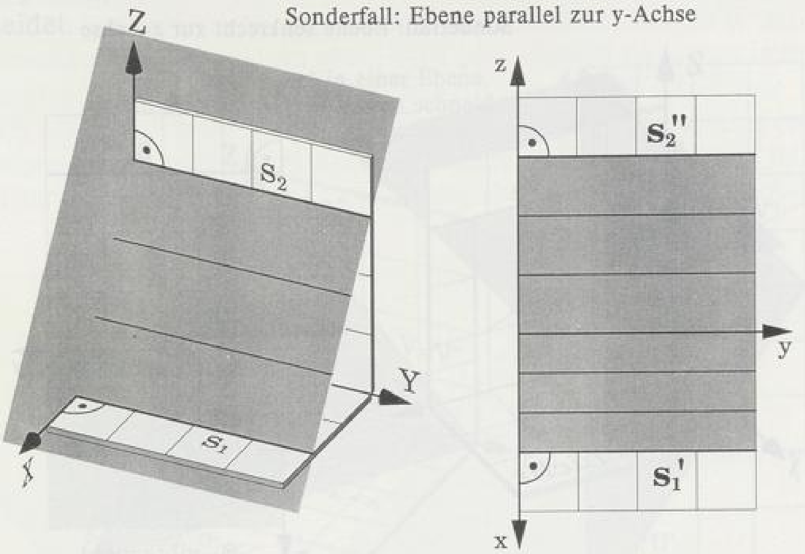
s_1' und s_2'' sind senkrecht zur y-Achse.
Die Ebene steht senkrecht auf der y-Achse, sie ist parallel zur Seitenrißebene.

Sonderfall: Ebene senkrecht zur y-Achse



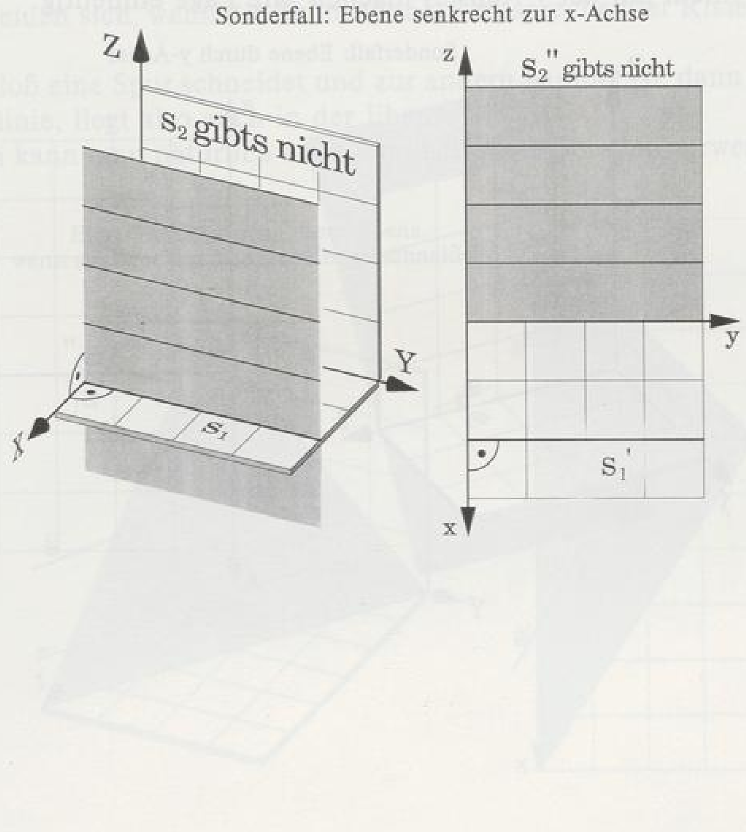
s'_1 und s''_2 sind parallel zur y-Achse.
Die Ebene ist parallel zur y-Achse.

Sonderfall: Ebene parallel zur y-Achse



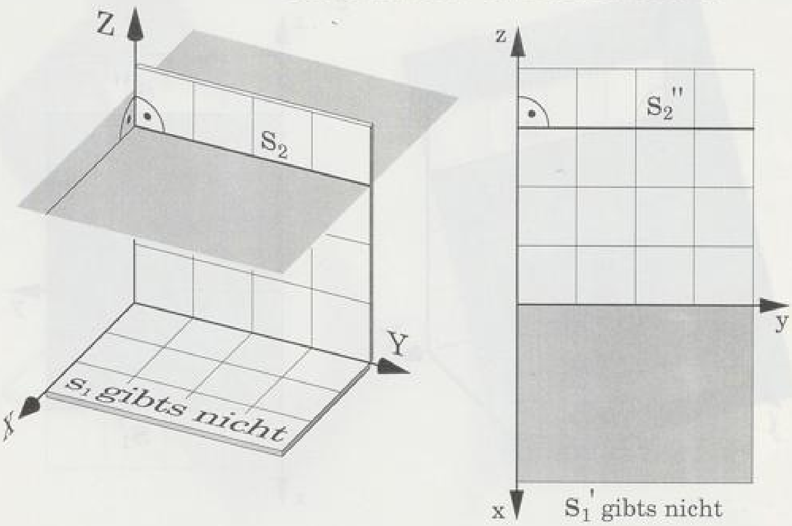
s'_1 ist parallel zur y-Achse, und s''_2 existiert nicht.
Die Ebene ist parallel zur Aufrißebene.

Sonderfall: Ebene senkrecht zur x-Achse



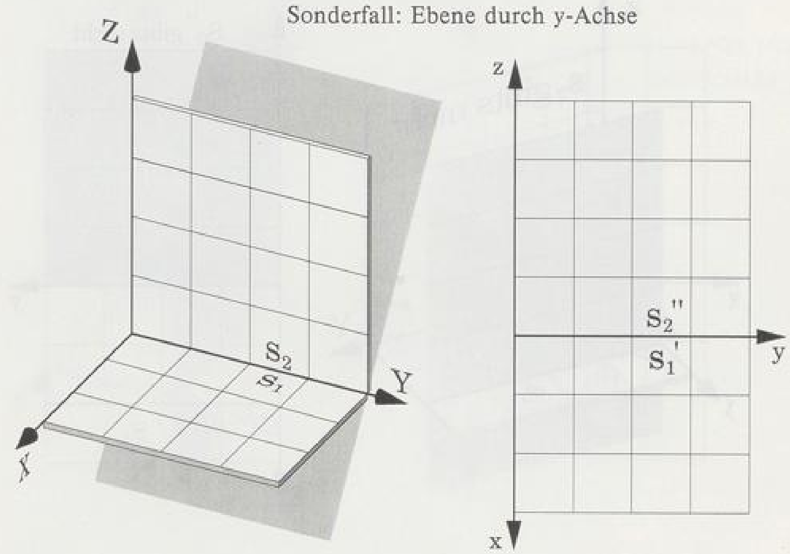
s_2'' *ist parallel zur y-Achse, und* s_1' *existiert nicht.*
Die Ebene ist parallel zur Grundrißebene.

Sonderfall: Ebene senkrecht zur z-Achse



s_1' *und* s_2'' *fallen mit der y-Achse zusammen.*
Die Ebene enthält die y-Achse. Damit liegt die Ebene noch nicht fest. Erst der Seitenriß oder ein Punkt (nicht auf der y-Achse!) machen ihre Lage eindeutig.

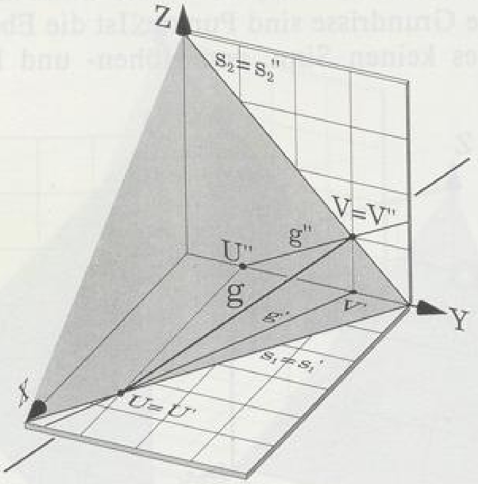
Sonderfall: Ebene durch y-Achse

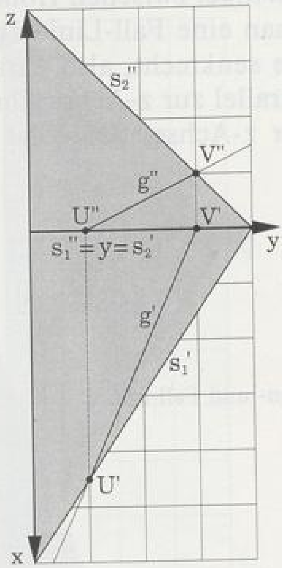


Gerade in der Ebene

Gegeben ist eine Gerade g durch ihre Risse g′ und g″ sowie eine Ebene E durch ihre Spuren s_1 und s_2. Um zu prüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt, untersucht man, ob sie die Spuren der Ebene schneidet.

Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie zwei Ebenenspuren schneidet.



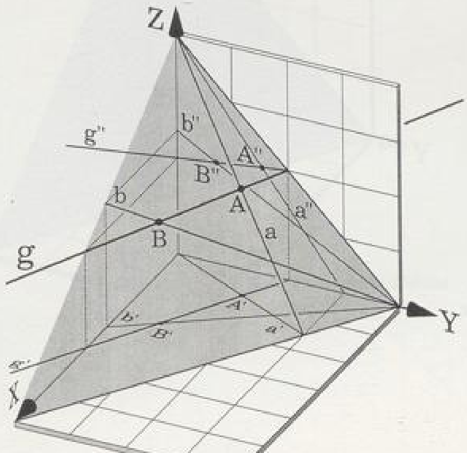


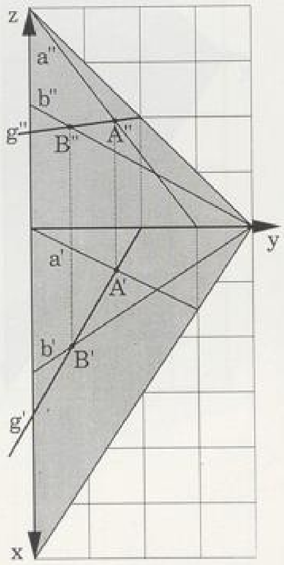
Wenn die Gerade beide Spuren schneidet, dann liegt sie in der Ebene. Zur Erinnerung: Zwei Geraden schneiden sich, wenn die Schnittpunkte entsprechender Risse auf *einem* Ordner liegen.

Wenn die Gerade bloß eine Spur schneidet und zur andern parallel ist, dann ist sie entweder Höhen- oder Frontlinie, liegt also auch in der Ebene.

Anstelle der Spuren kann man natürlich auch zwei beliebige Geraden verwenden, die in der Ebene liegen.

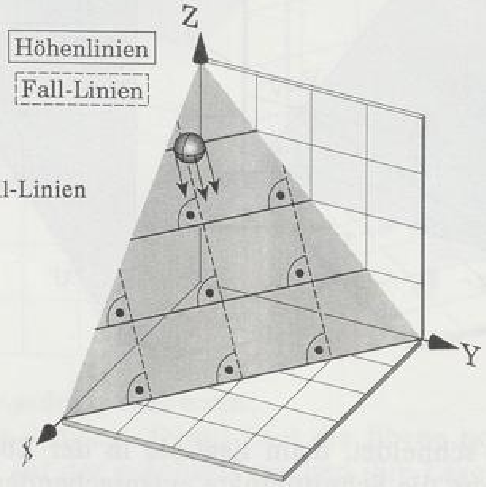
Eine Gerade liegt in einer Ebene, wenn sie zwei Geraden der Ebene schneidet.

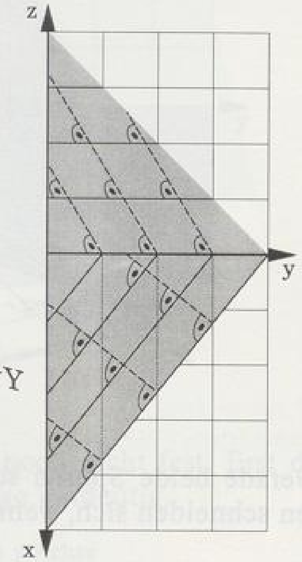




Zu den besonderen Geraden einer Ebene gehören die Fall-Linien. Sie stehen senkrecht auf den Höhenlinien und damit auch auf der Grundrißspur s_1. Der Name rührt daher, daß eine Kugel auf einer Fall-Linie hinunterrollt, wenn die Schwerkraft (wie üblich) senkrecht nach unten gerichtet ist. Weil die Höhenlinien parallel zur Grundrißebene verlaufen, sieht man den rechten Winkel zwischen Höhen- und Fall-Linie im Grundriß in wahrer Größe. Deshalb konstruiert man eine Fall-Linie zuerst im Grundriß als Senkrechte zur Spur s_1'.
Ist die Ebene senkrecht, also parallel zur z-Achse, dann sind auch alle Fall-Linien senkrecht, also parallel zur z-Achse; ihre Grundrisse sind Punkte. Ist die Ebene waagerecht, also senkrecht zur z-Achse, dann hat es keinen Sinn, von Höhen- und Fall-Linien zu sprechen.

Ebene mit Höhen- und Fall-Linien

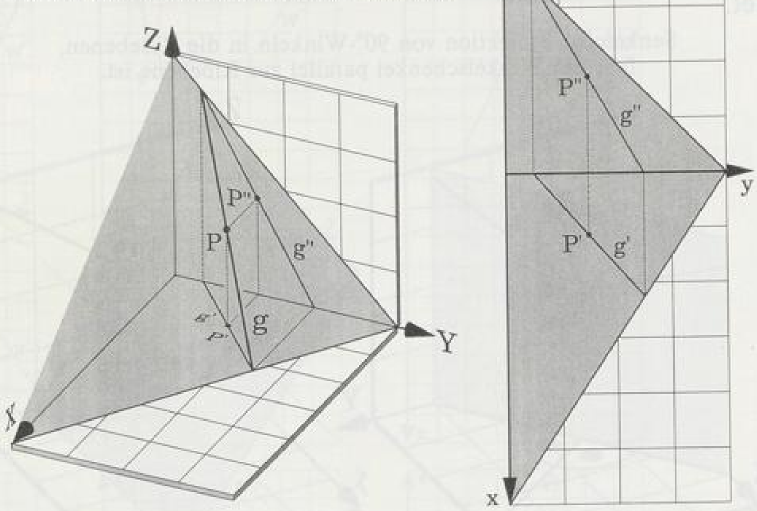




Punkt und Ebene

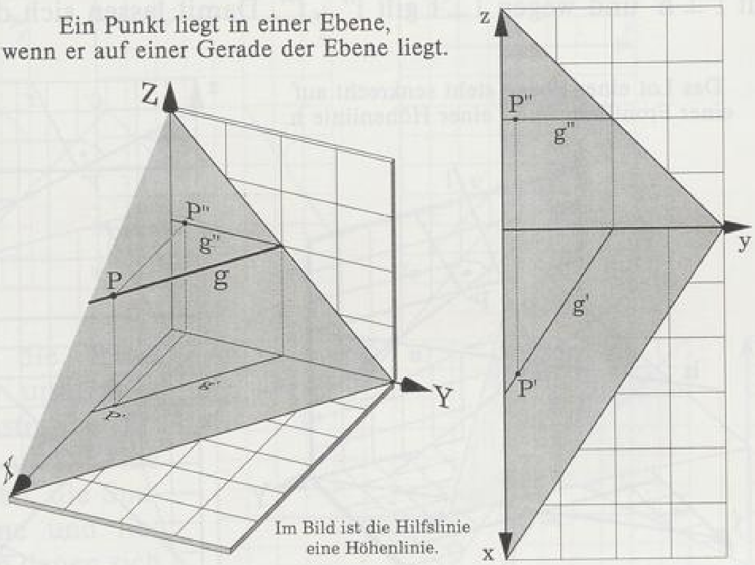
Ist eine Ebene E durch ihre Spuren gegeben, so läßt sich schnell entscheiden, ob ein Punkt P in ihr liegt: Man zeichnet eine Hilfsgerade g, die so in E liegt, daß einer ihrer Risse durch den entsprechenden Punktriß geht:

Ein Punkt liegt in einer Ebene,
wenn er auf einer Gerade der Ebene liegt.



g′ durch P′ im Grundriß oder g″ durch P″ im Aufriß. Liegt dann der andere Punktriß auf dem andern Geradenriß, so liegt der Punkt auf der Hilfsgerade und damit in der Ebene. Als Hilfsgerade verwendet man gern eine Höhen- oder Frontlinie.

Ein Punkt liegt in einer Ebene,
wenn er auf einer Gerade der Ebene liegt.

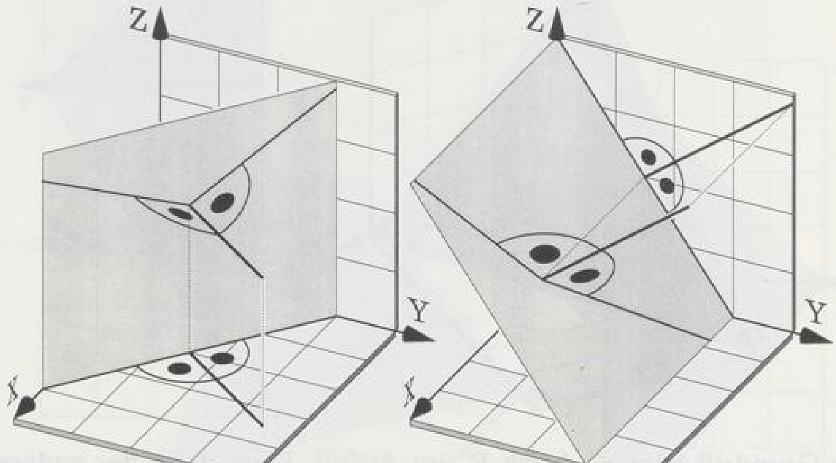


Im Bild ist die Hilfslinie
eine Höhenlinie.

Loterrichten

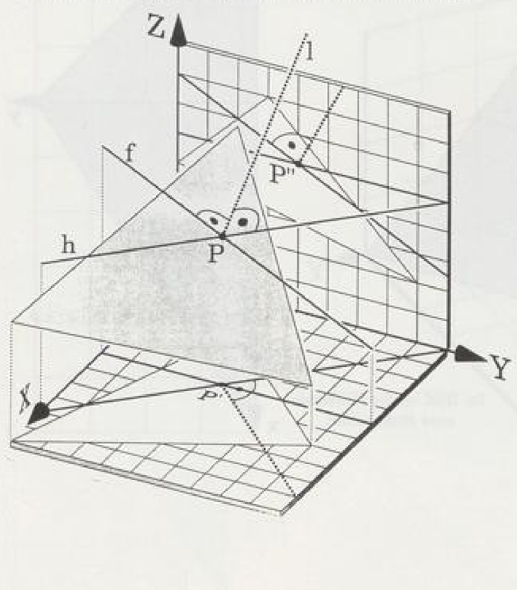
Eine Gerade, die senkrecht auf einer Ebene steht, heißt Lot dieser Ebene. Ein Lot l durch den Ebenenpunkt P steht senkrecht auf jeder Gerade der Ebene, die durch P geht, also auch auf der Höhenlinie h und der Frontlinie f durch P. Es gilt: Ist ein Schenkel eines 90°-Winkels parallel zu einer Rißebene, dann ist auch der Riß in dieser Ebene ein 90°-Winkel; der andere Schenkel darf freilich nicht senkrecht zur Rißebene stehen, er würde ja sonst als Punkt abgebildet.

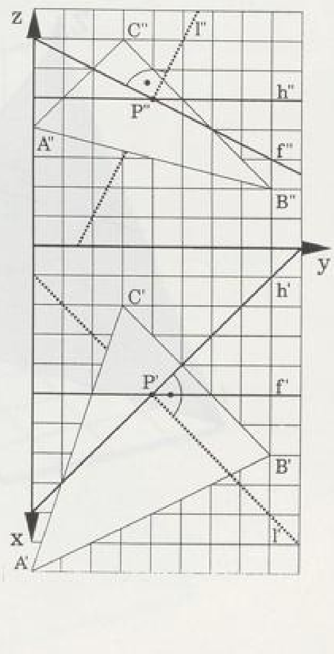
Senkrechte Projektion von 90°-Winkeln in die Rißebenen, falls ein Winkelschenkel parallel zur Rißebene ist.



Wegen $l \perp h$ gilt $l' \perp h'$ und wegen $l \perp f$ gilt $l'' \perp f''$. Damit lassen sich die Risse des Lots l konstruieren.

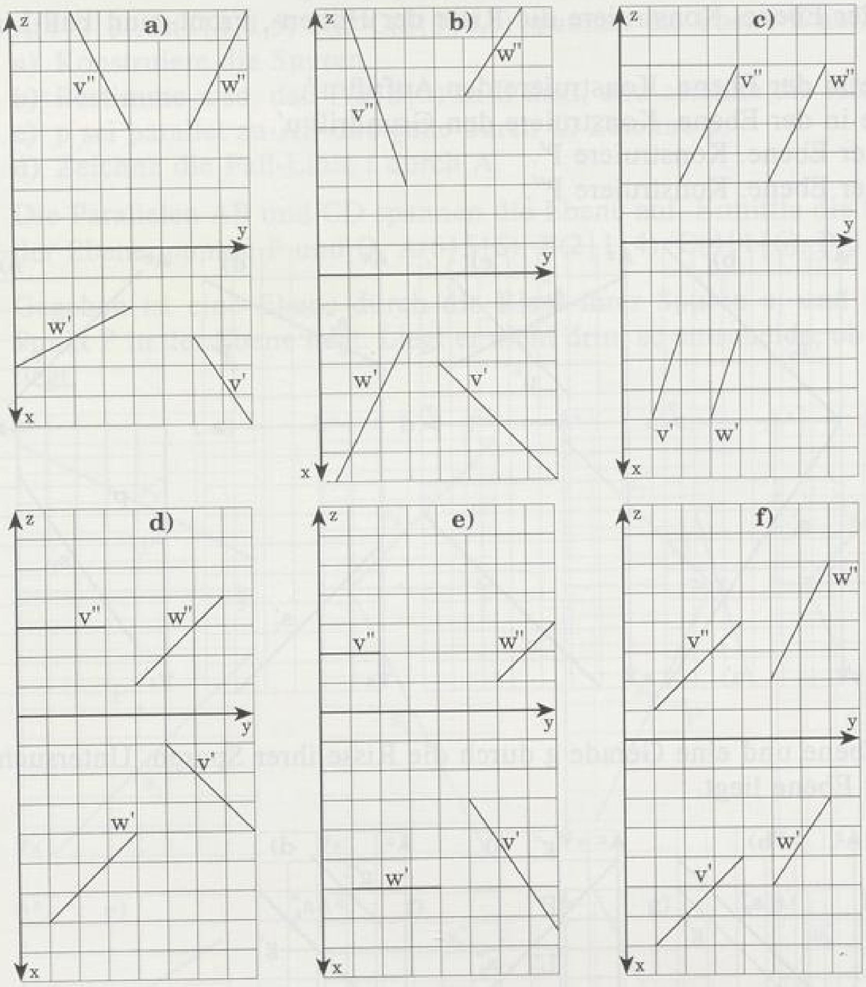
Das Lot einer Ebene steht senkrecht auf einer Frontlinie f und einer Höhenlinie h.



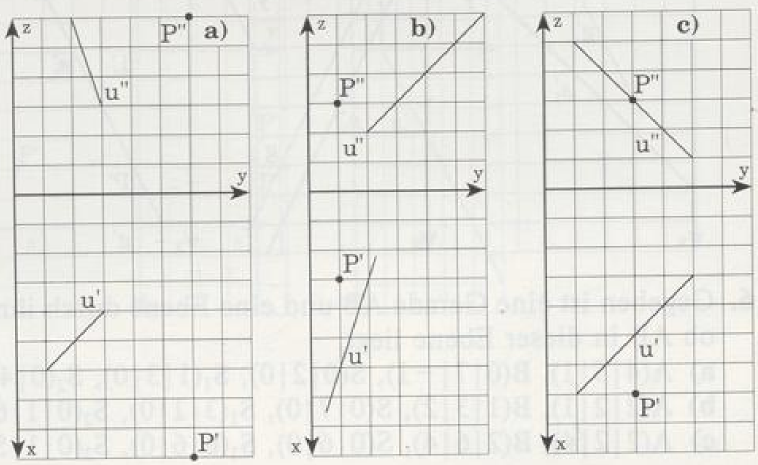


Aufgaben

1. Gegeben sind die Risse zweier Geraden v und w. Konstruiere für den Fall, daß u und v eine Ebene aufspannen, die Spuren dieser Ebene und lies die Punkte ab, in denen sich diese Ebene und die Koordinatenachsen schneiden.

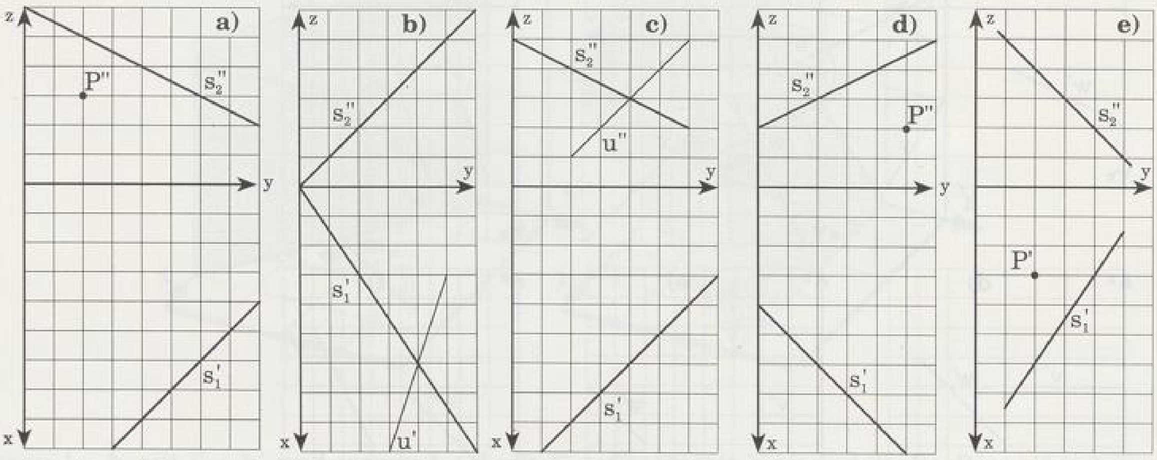


2. Gegeben sind die Risse einer Gerade u und eines Punkts P. Konstruiere für den Fall, daß u und P eine Ebene aufspannen, die Spuren dieser Ebene und lies die Punkte ab, in denen sich diese Ebene und die Koordinatenachsen schneiden.

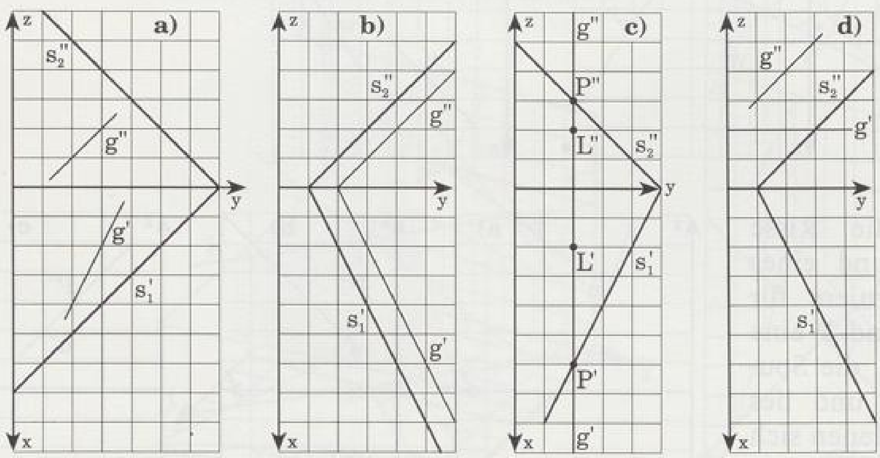


3. A, B und C spannen eine Ebene auf. Konstruiere die Spuren dieser Ebene.
   a) A(3 | 2 | 6), B(2 | 6 | 4), C(1 | 4 | 8)
   b) A(6 | 4 | 0,5), B(1,5 | 2,5 | 2), C(3 | 2 | 1)
   c) A(2,5 | 1 | 1,5), B(7,5 | 4 | 0,5), C(1,5 | 2 | 2,5)

4. Gegeben ist eine Ebene durch die Risse ihrer Spuren s_1 und s_2.
   a) P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere die Risse der Höhen-, Front- und Fall-Linie durch P.
   b) u ist eine Gerade in der Ebene. Konstruiere den Aufriß u″.
   c) u ist eine Gerade in der Ebene. Konstruiere den Grundriß u′.
   d) P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere P′.
   e) P ist ein Punkt der Ebene. Konstruiere P″.



5. Gegeben sind eine Ebene und eine Gerade g durch die Risse ihrer Spuren. Untersuche, ob die Gerade in der Ebene liegt.



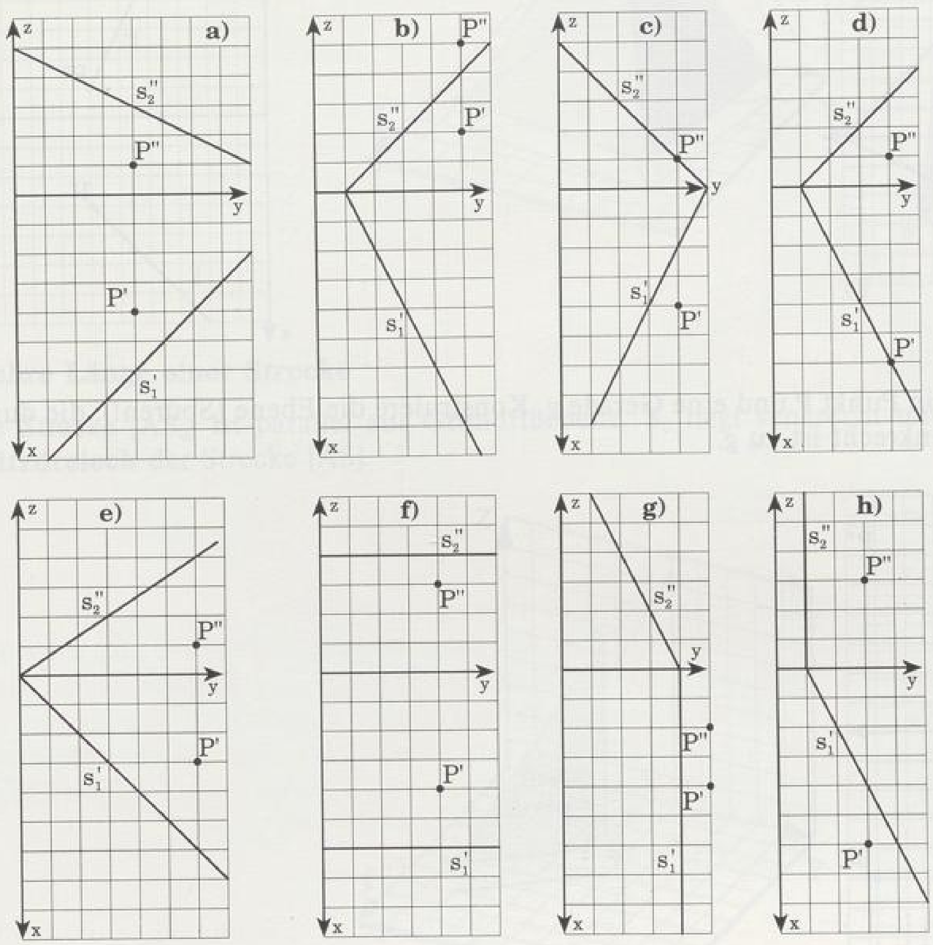
6. Gegeben ist eine Gerade AB und eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2. Entscheide, ob AB in dieser Ebene liegt.
   a) A(4 | 5 | 1), B(0 | 7 | −1), S(0 | 2 | 0), S_1(1 | 3 | 0), S_2(0 | 4 | 1)
   b) A(2 | 2 | 1), B(1 | 3 | 2), S(0 | 7 | 0), S_1(3 | 1 | 0), S_2(0 | 1 | 6)
   c) A(2 | 2 | 4), B(2 | 6 | 4), S(0 | 6 | 0), S_1(6 | 6 | 0), S_2(0 | 1 | 5)

7. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 sowie einer ihrer Punkte P. Konstruiere die Höhenlinie h, die Frontlinie f und die Fall-Linie t, die durch P geht.
a) $P(3|5|?)$, $S(0|4|0)$, $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|6|1)$
b) $P(?|4|2)$, $S(0|8|0)$, $S_1(5|3|0)$, $S_2(0|2|3)$
c) $P(?|4|2)$, $S(0|6|0)$, $S_1(5|1|0)$, $S_2(0|6|6)$

8. $A(4|2|3)$, $B(3|4|1{,}5)$ und $C(2|3|4{,}5)$ spannen die Ebene E auf.
a) Konstruiere die Spuren.
b) Bestimme x so, daß $P(x|5|3)$ in E liegt, und zeichne die Höhenlinie h durch P.
c) p sei parallel zu AB und gehe durch C. Zeichne p.
d) Zeichne die Fall-Linie t durch A.

9. Die Parallelen AB und CD spannen die Ebene auf. Ermittle die fehlenden Koordinaten der Ebenenpunkte P und Q. $A(6|5|6)$, $B(2|1|4)$, $C(4|1|6)$, $P(p|-1|4)$, $Q(2|3|q)$

10. Gegeben ist eine Ebene durch die Risse ihrer Spuren s_1 und s_2. Untersuche, ob der Punkt P in der Ebene liegt. Liegt er nicht drin, so entscheide, ob er drunter oder drüber liegt.

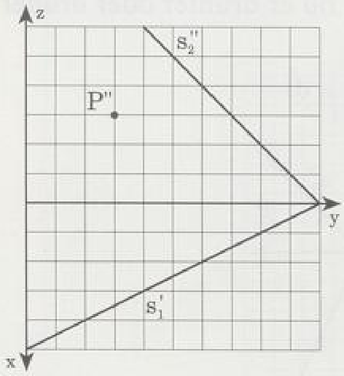


11. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren SS_1 und SS_2 sowie ein Punkt P in ihr. Prüfe, ob die Gerade AB und KL parallel zur Ebene sind, indem du durch P eine Parallele zu AB und KL legst.
S(0|0|0), S_1(9|6|0), S_2(0|6|6), P(1,5|5|4),
A(6|0|0), B(3|2|4), K(0|3|0), L(3|5|2)

12. Gegeben ist eine Ebene durch die Punkte A, B und C sowie ein Punkt P in ihr: A(9|1|4), B(7|8|1,5), C(1|5|6), P(5|4|?).
Konstruiere das Lot von E durch P; in welchem Punkt Q trifft es die Aufrißebene?

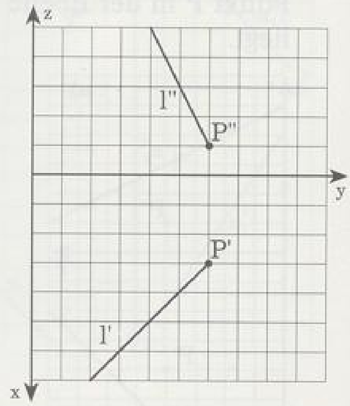
13. Gegeben sind die Spuren einer Ebene sowie ein Ebenenpunkt P. Konstruiere das Lot von E durch P. In welchem Punkt Q trifft es die Aufrißebene, in welchem Punkt R die Grundrißebene?

14. Gegeben ist der Punkt P und das Lot l einer Ebene. Konstruiere die Spuren dieser Ebene.

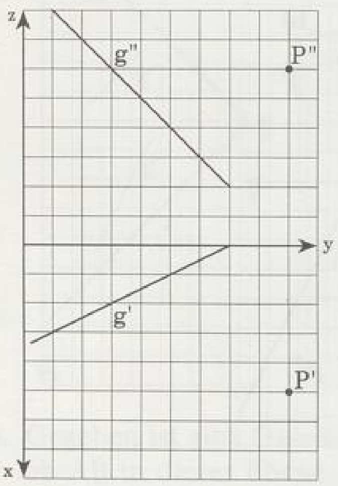


Zu **13.**

Zu **14.**



15. Gegeben ist ein Punkt P und eine Gerade g. Konstruiere die Ebene (Spuren!), die durch P geht und senkrecht ist zu g.

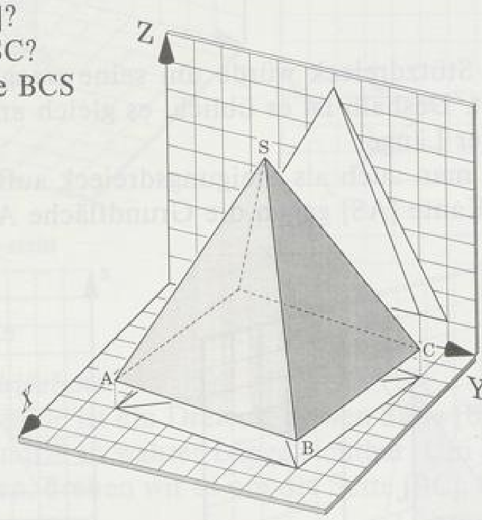


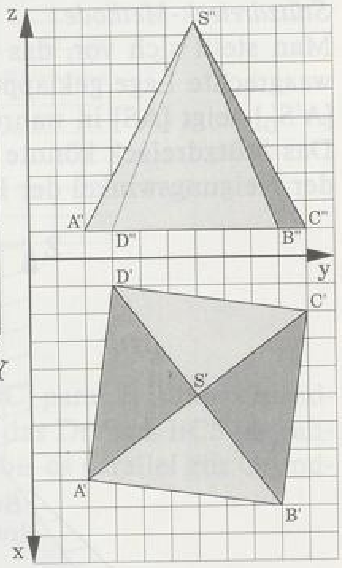
8.2 Konstruktionen

8.2.1 Dreiecke in wahrer Größe

Grund- und Aufriß zeigen Strecken und Winkel im allgemeinen nicht in wahrer Größe. Liegt eine ebene Figur allerdings parallel zu einer Rißebene, so erscheint sie dort in wahrer Größe. Will man also die wahre Größe einer Figur konstruieren, dann muß man sie so drehen, daß sie parallel zu einer der beiden Rißebenen ist. Wir führen das an einer quadratischen Pyramide ABCDS vor, deren Grundfläche parallel ist zur Grundrißebene.

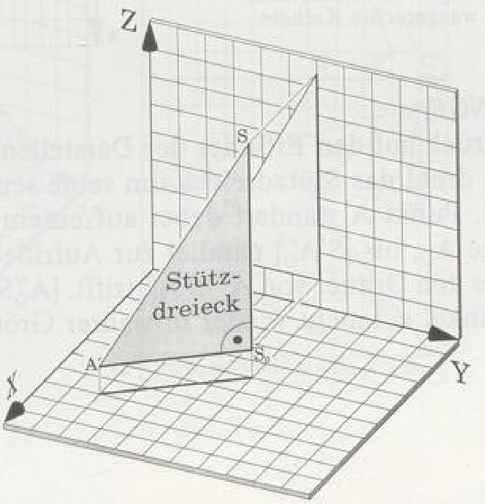
- Wie lang ist die Kante [AS]?
- Wie groß ist der Winkel BSC?
- Wie schaut die Seitenfläche BCS in wahrer Größe aus?

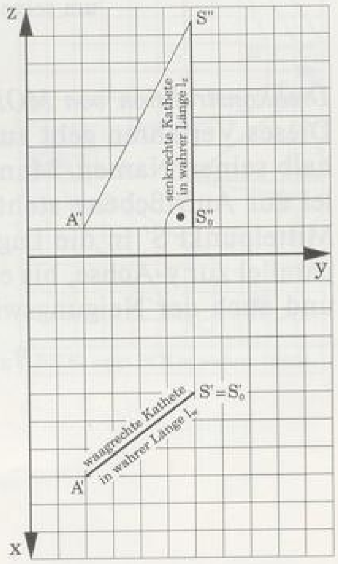




Wahre Länge einer Strecke

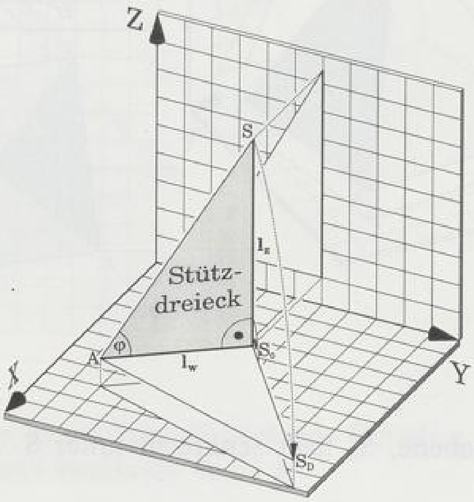
Die Strecke $[AS_0]$ ist parallel zur Grundrißebene, S_0 liegt senkrecht unter S. AS_0S heißt **Stützdreieck** der Strecke [AS].



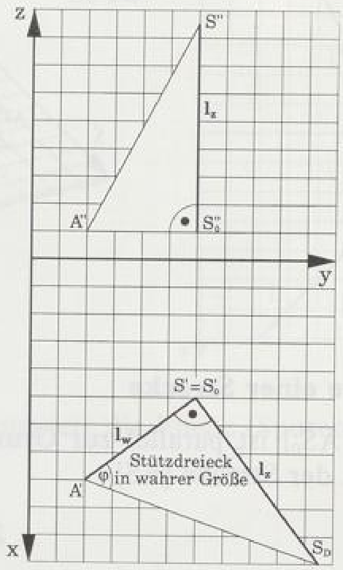


Die Kathete $[AS_0]$ ist parallel zur Grundrißebene, also haben $[A'S_0']$ und $[AS_0]$ dieselbe Länge l_w.
Die Kathete $[SS_0]$ ist parallel zur Aufrißebene, also haben $[S''S_0'']$ und $[SS_0]$ dieselbe Länge l_z.
Weil der Winkel AS_0S 90° mißt, läßt sich das Stützdreieck schnell in wahrer Größe konstruieren: Die Kathete l_w liegt im Grundriß, die Kathete l_z liegt im Aufriß in wahrer Länge vor. Man ergänzt entweder die waagrechte Kathete zum Stützdreieck *(Stützdreieck-Methode)* oder die senkrechte Kathete *(MONGE-Konstruktion)*. Beide Konstruktionen lassen sich auch als Drehung des Stützdreiecks um eine Kathete deuten.

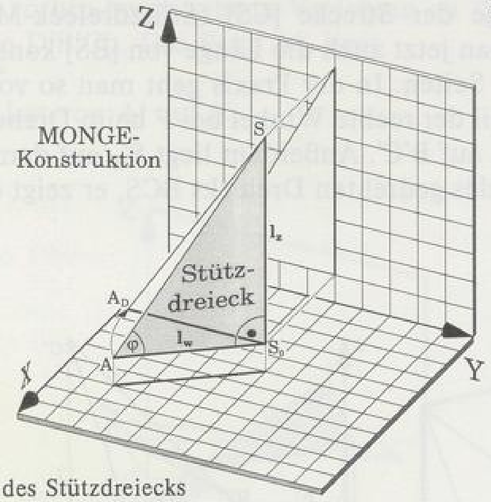
Stützdreieck-Methode
Man stellt sich vor, das Stützdreieck würde um seine waagerechte Kathete $[AS_0]$ in eine waagrechte Lage geklappt. Deshalb ist es üblich, es gleich an die Strecke $[A'S_0']$ zu hängen $[A'S_D']$ zeigt $[AS]$ in wahrer Länge.
Das Stützdreieck könnte man auch als Steigungsdreieck auffassen. Der Winkel φ ist dann der Neigungswinkel der Kante $[AS]$ gegen die Grundfläche ABCD.



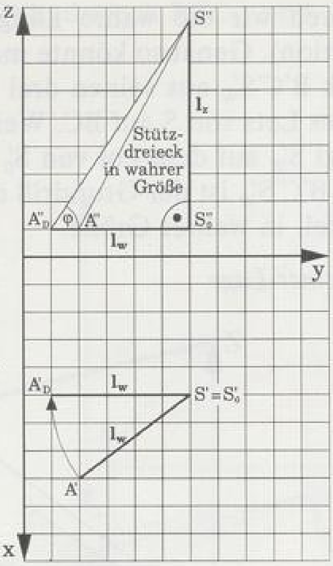
Vierteldrehung des Stützdreiecks um seine waagerechte Kathete



Drehkonstruktion von MONGE
Dieses Verfahren geht zurück auf den Erfinder der Darstellenden Geometrie und trägt deshalb seinen Namen. Man dreht das Stützdreieck um seine senkrechte Kathete, bis es parallel zur Aufrißebene steht. Punkt A wandert dabei auf einem waagrechten Kreisbogen mit Mittelpunkt S' in die Lage A_D, bis $[S'A_D']$ parallel zur Aufrißebene liegt; A'' verschiebt sich parallel zur y-Achse, bis es den Ordner von A' in A_D'' trifft. $[A_D''S'']$ zeigt $[AS]$ in wahrer Länge, und auch der Neigungswinkel φ taucht wieder in wahrer Größe auf.



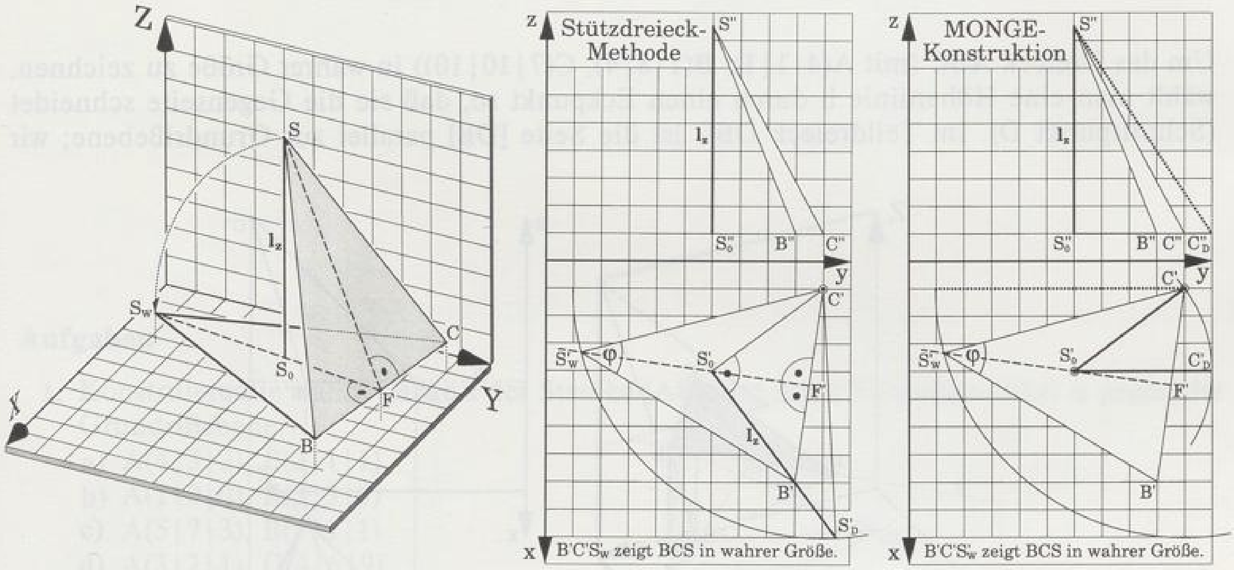
Drehung des Stützdreiecks
um seine senkrechte Kathete,
bis es parallel zur Aufrißebene steht



Wahre Größe eines Dreiecks

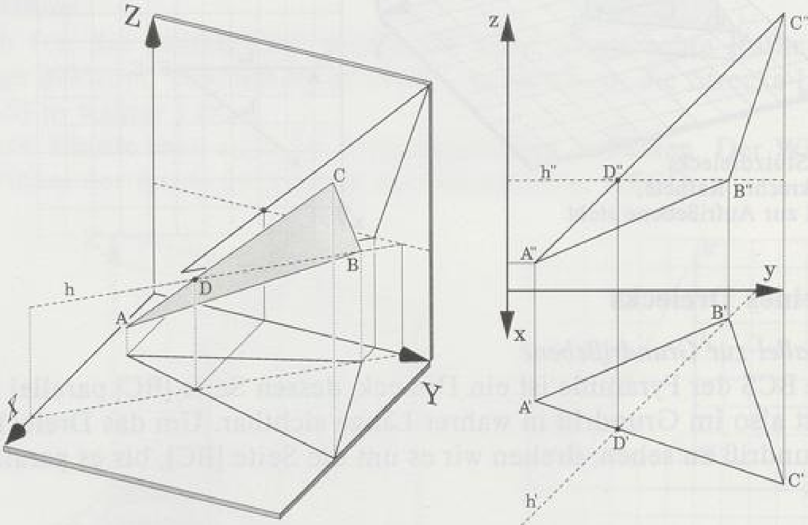
Eine Seite ist parallel zur Grundrißebene

Die Seitenfläche BCS der Pyramide ist ein Dreieck, dessen Seite [BC] parallel ist zur Grundrißebene; [BC] ist also im Grundriß in wahrer Länge sichtbar. Um das Dreieck BCS in wahrer Größe im Grundriß zu sehen, drehen wir es um die Seite [BC], bis es parallel zur Grundrißebene ist.

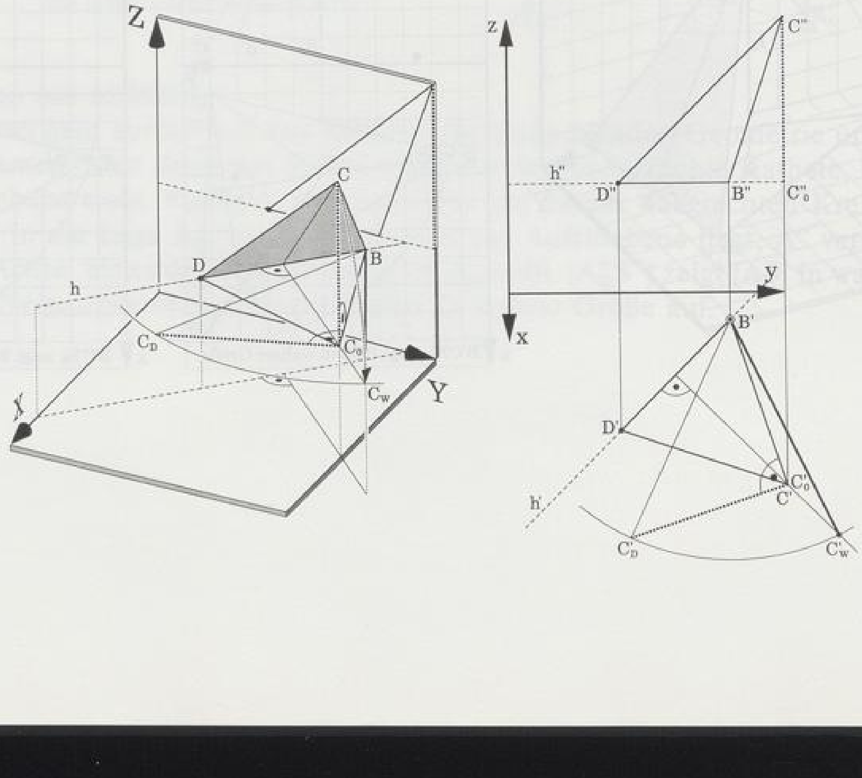


Zuerst konstruieren wir die wahre Länge der Strecke [CS] (Stützdreieck-Methode oder Monge-Konstruktion). Genauso könnte man jetzt auch die Länge von [BS] konstruieren und dann das Dreieck $B'C'S'_W$ aus seinen drei Seiten. In der Praxis geht man so vor:
F ist Fußpunkt des Lots von S auf BC. Weil der rechte Winkel bei F beim Drehen um BC erhalten bleibt, liegt S'_W auf dem Lot von S'_0 auf $B'C'$. Außerdem liegt S'_W auf dem Kreis um C mit Radius [CS]. $B'C'S'_W$ ist der Grundriß des gedrehten Dreiecks BCS, er zeigt es, also seine Seiten und Winkel, in wahrer Größe.

Dreieck in allgemeiner Lage

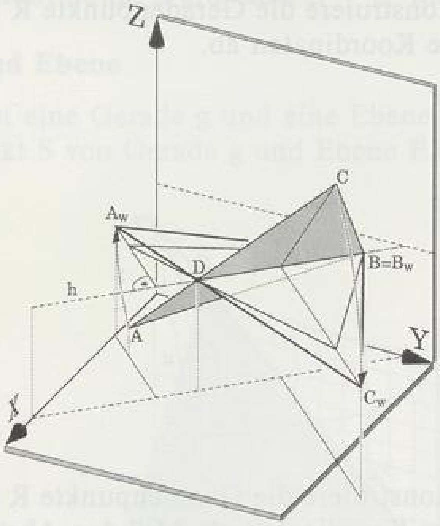


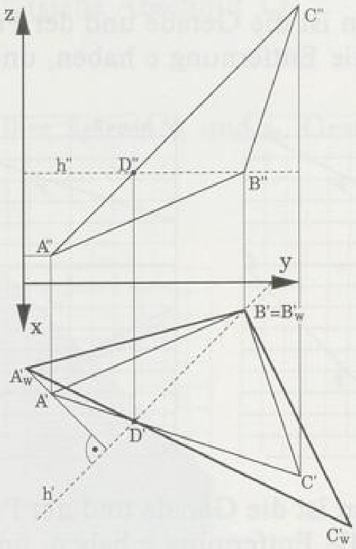
Um das Dreieck ABC (mit A(4|1|1), B(1|8|4), C(7|10|10)) in wahrer Größe zu zeichnen, wählt man eine Höhenlinie h durch einen Eckpunkt so, daß sie die Gegenseite schneidet (Schnittpunkt D). Im Teildreieck DBC ist die Seite [DB] parallel zur Grundrißebene; wir



wenden das vorhin beschriebene Verfahren an (Stützdreieck BCC_0) und konstruieren seine wahre Größe $D'B'C'_W$. Die Ecke A'_W liegt

1. auf $C'_W D'$
2. auf dem Lot von A' auf h'.





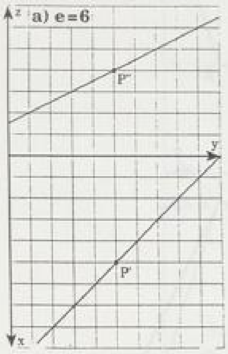
Aufgaben

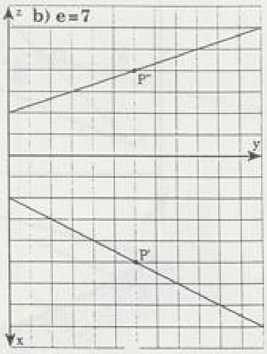
1. Konstruiere die wahre Länge s der Strecke [AB] und ihren Neigungswinkel φ gegen die Grundrißebene.
   a) A(4 | 3 | 2), B(2 | 1 | 1)
   b) A(1 | 0 | 0), B(3 | 3 | 6)
   c) A(5 | 7 | 3), B(2 | 1 | 1)
   d) A(3 | 2 | 1), Q(4 | 6 | 9)

2. Konstruiere das Dreieck ABC in wahrer Größe und miß alle Seiten und Winkel.
   a) A(9 | 7 | 7), B(1 | 1 | 7), C(3 | 4 | 1)
   b) A(2 | 0 | 3), B(8 | 6 | 6), C(0 | 6 | 0)
   c) A(1 | 1 | 1), B(5 | 4 | 1), C(3 | 3 | 2)
   d) A(5 | 1 | 1), B(8 | 5 | 6), C(4 | 8 | 1)

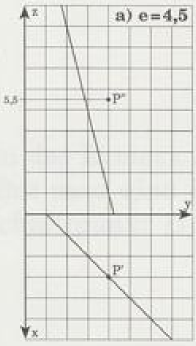
3. Konstruiere das Dreieck ABC in wahrer Größe und miß alle Seiten und Winkel.
   a) A(0|0|0), B(6|3|6), C(2|3|6)
   b) A(5|0|0), B(7|4|4), C(0|10|10)
   c) A(1|0|0), B(9|5|3), C(0|9|4)
   d) A(4|0|0), B(0|1|9), C(6|3|6)

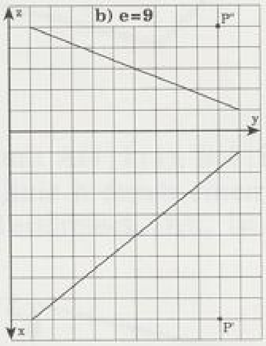
4. Gegeben ist die Gerade und der Punkt P. Konstruiere die Geradenpunkte R und S, die von P die Entfernung e haben, und lies ihre Koordinaten ab.



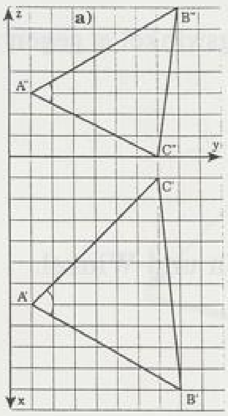


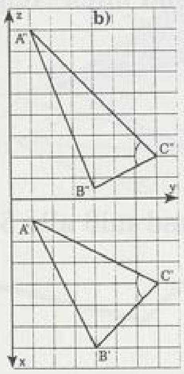
5. Gegeben ist die Gerade und der Punkt P. Konstruiere die Geradenpunkte R und S, die von P die Entfernung e haben, und lies ihre Koordinaten ab. Miß den Abstand d von Punkt und Gerade.





6. Konstruiere die Winkelhalbierende des gekennzeichneten Winkels.





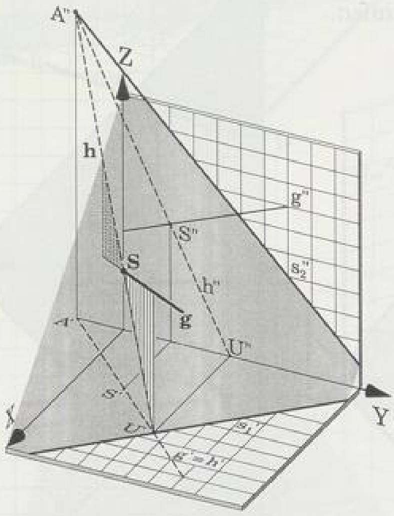
8.2.2 Schnitte von Ebenen und Geraden

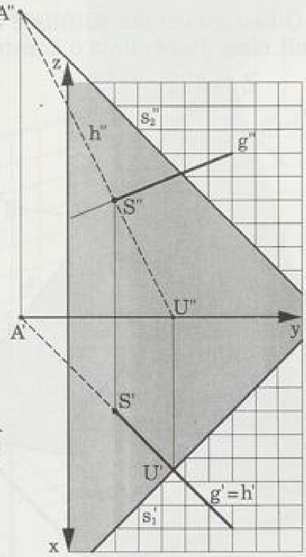
Gerade und Gerade

Zwei Geraden g und k schneiden sich, wenn der Schnittpunkt U′ der Grundrisse und der Schnittpunkt V″ der Aufrisse auf einem Ordner liegen.
Für den Schnittpunkt S gilt dann S′ = U′ und S″ = V″ (siehe Abschnitt 3.)

Gerade und Ebene

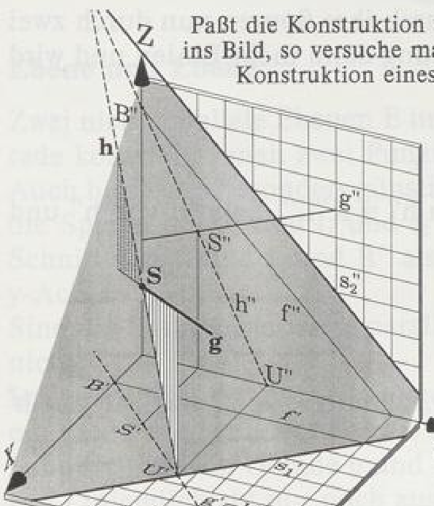
Gegeben ist eine Gerade g und eine Ebene E durch ihre Spuren s_1 und s_2. Gesucht ist der Schnittpunkt S von Gerade g und Ebene E.

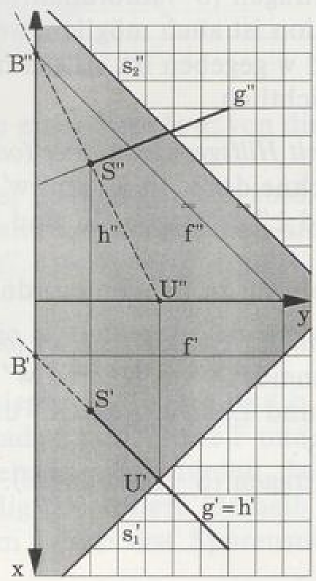




Lösungsidee:
Man arbeitet mit einer Hilfsgeraden h, die in der Ebene senkrecht unter (oder über) g verläuft, deren Grundriß h′ mit g′ also zusammenfällt. Der Schnittpunkt von g und h liegt sowohl auf g als auch in E, ist folglich der gesuchte Schnittpunkt S.

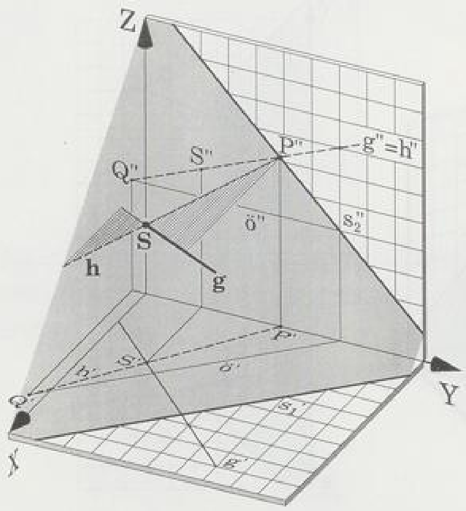
Paßt die Konstruktion von Punkt A auf h nicht ins Bild, so versuche man es stattdessen mit der Konstruktion eines Punkts B mithilfe einer passenden Frontlinie f.

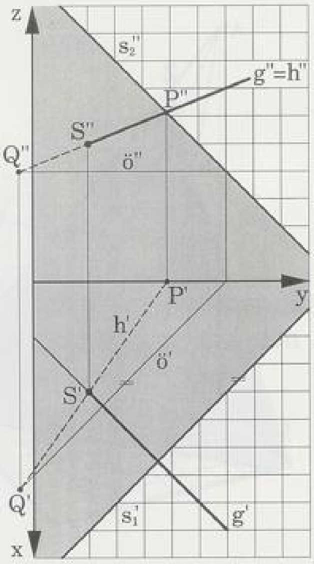




Konstruktion:
Grundriß: h' schneidet s_1' in U' und s_2' in A'.
Aufriß: U'' und A'' eintragen (U' und A' »raufordnen«), denn $h'' = U''A''$. h'' und g'' schneiden sich in S''.
Grundriß: S' eintragen (S'' »runterordnen«)
Als Hilfsgerade h kann man genau so gut die Gerade nehmen, die waagrecht hinter (oder vor) g in der Ebene verläuft, deren Aufriß h'' mit g'' also zusammenfällt.
Konstruktion:
Aufriß: h'' schneidet s_2'' in P''. Der Schnittpunkt von h'' und s_1'' liegt zu weit abseits. Als Ersatz schneiden wir h'' mit dem Riß $ö''$ einer geeigneten Höhenlinie und bekommen den Schnittpunkt Q''.

P und Q bestimmen die Hilfslinie h.
Q ist mit einer Höhenlinie ö konstruiert.

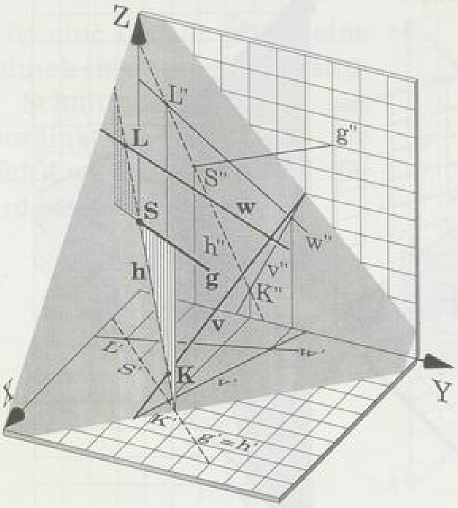


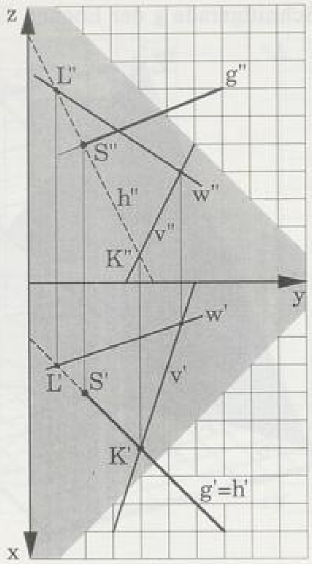


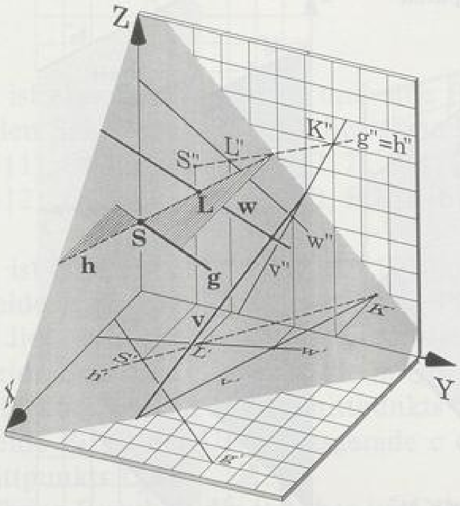
Grundriß: P' und Q' eintragen (P'' und Q'' runterordnen!), denn $h' = K'L'$. h' und g' schneiden sich in S'.
Aufriß: S'' eintragen (S' raufordnen!).
Die Konstruktion ist auch möglich, wenn die Ebene statt durch ihre Spuren nun durch zwei Geraden v und w gegeben ist. Allerdings enthält die Zeichnung dann mehr Linien und wird weniger übersichtlich.

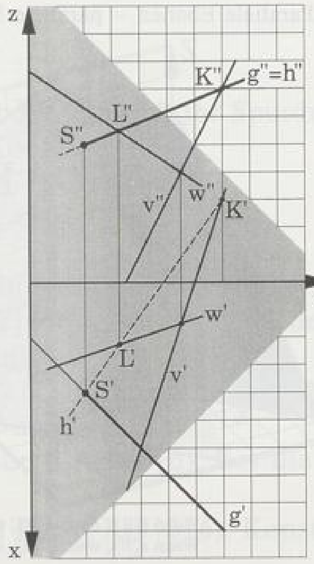
Konstruktion mit Hilfsgerade h unter (oder über) g:
Grundriß h' schneidet v' in K' und w' in L'.
Aufriß: K'' und L'' eintragen (K' und L' raufordnen!), denn $h'' = K''L''$. Schnitt von h'' und g'' ergibt S''.
Grundriß: S' eintragen (S'' runterordnen!)

Konstruktion mit Hilfsgerade h hinter (oder vor) g:
Aufriß: h'' schneidet v'' in K'' und w'' in L''.
Grundriß: K' und L' eintragen (K'' und L'' runterordnen!), denn $h' = K'L'$. Schnitt von h' und g' ergibt S'.
Aufriß: S'' eintragen (S' raufordnen!).





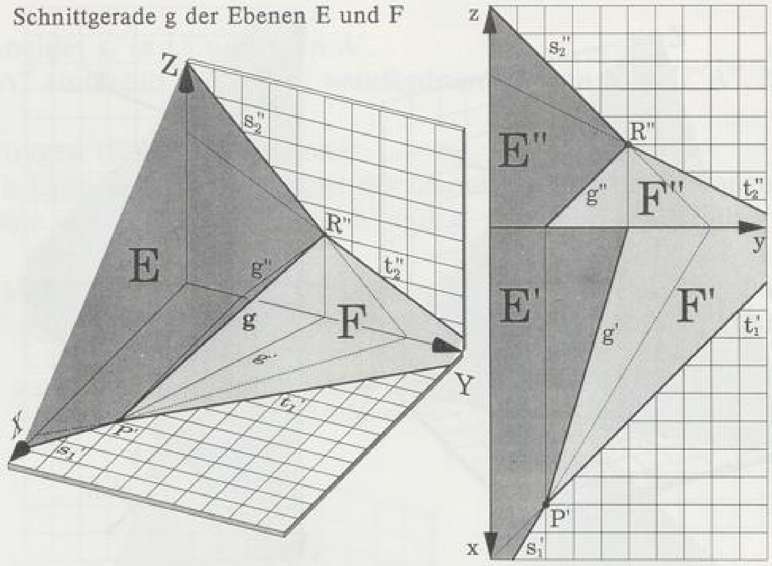




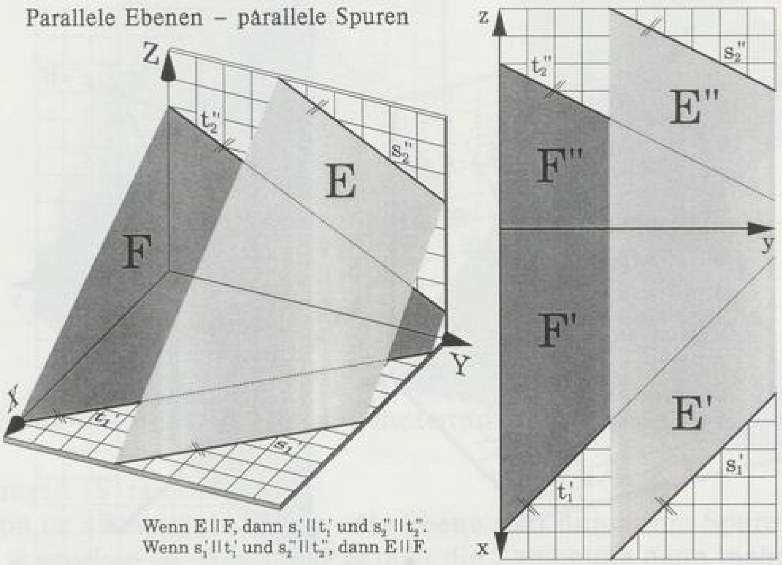
Ebene und Ebene

Zwei nicht parallele Ebenen E und F schneiden sich in einer Gerade g; von dieser Schnittgerade konstruiert man zwei Punkte P und R.
Auch hier ist es besonders günstig, wenn die Spuren der Ebenen gegeben sind. Sind s_1 und s_2 die Spuren von E und t_1 und t_2 die Spuren von F, dann konstruiert man am besten P′ als Schnitt von s_1' und t_1' und R″ als Schnitt von s_2'' und t_2''. Die Risse P″ und R′ liegen auf der y-Achse.
Sind die Spuren paarweise parallel, dann sind auch die Ebenen parallel und schneiden sich nicht.
Ist jede Ebene durch zwei Geraden gegeben, zum Beispiel E durch a und b, so ergibt sich ein Punkt der Schnittgerade als Schnittpunkt von Gerade a und Ebene F und der andere als Schnittpunkt von Gerade b und Ebene F. Dabei entstehen so viele Linien, daß sich im fertigen Liniendickicht nur noch auskennt, wer eigenhändig konstruiert. Deshalb verzichten wir auf die Vorführung dieser Zeichnung und raten dem Leser: erst Spurensuche und dann Konstruktion wie oben.

Schnittgerade g der Ebenen E und F



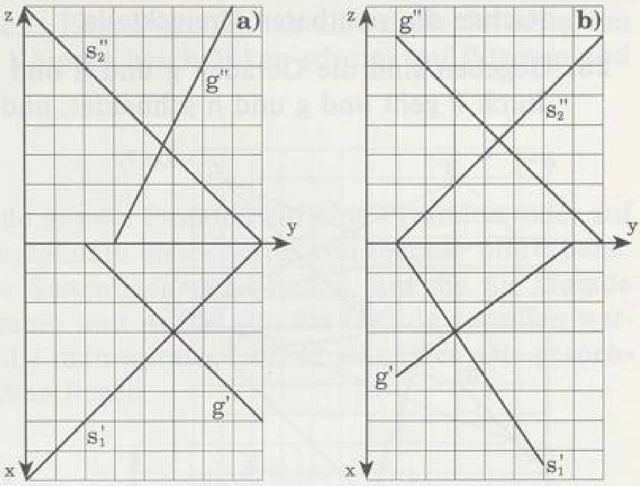
Parallele Ebenen – parallele Spuren



Wenn E || F, dann $s_1' \parallel t_1'$ und $s_2'' \parallel t_2''$.
Wenn $s_1' \parallel t_1'$ und $s_2'' \parallel t_2''$, dann E || F.

Aufgaben

1. Gegeben ist eine Gerade g und eine Ebene E durch ihre Spuren. Konstruiere den Schnittpunkt T und lies seine Koordinaten ab. Zeichne die Gerade fett, wo sie nicht von der Ebene verdeckt ist.



2. Gegeben ist eine Gerade g = PQ und eine Ebene E durch ihr Spurdreieck ABC. Konstruiere den Schnittpunkt T und lies seine Koordinaten ab.
   a) P(3 | 5 | 1), Q(7 | 11 | −5), A(9 | 7 | 7), B(1 | 1 | 7), C(3 | 4 | 1)
   b) P(1 | 6 | 2), Q(3 | 2 | 6), A(2 | 0 | 3), B(8 | 6 | 6), C(0 | 6 | 4)

3. Gegeben ist eine Ebene E durch A(8 | 0 | 0), B(0 | 8 | 0) und C(0 | 0 | 4).
   a) Schneide E mit der Gerade a, die in P(2 | 4 | 0) senkrecht auf der Grundrißebene steht; lies die Koordinaten des Schnittpunkts S ab.
   b) Schneide E mit der Gerade b, die in Q(0 | 2 | 2) senkrecht auf der Aufrißebene steht; lies die Koordinaten des Schnittpunkts T ab.
   c) Schneide E mit der Ursprungsgerade c durch R(9 | 3 | 6); lies die Koordinaten des Schnittpunkts U ab.
   d) Die Ebene F enthält die y-Achse und den Punkt R(9 | 3 | 6). Konstruiere zwei Spurpunkte der Schnittgerade t von E und F.

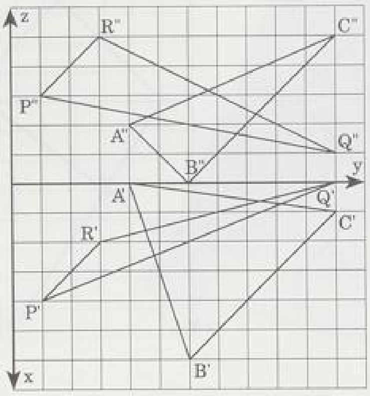
4. P(7 | 1 | 2), Q(3 | 5 | 4), A(6 | 2 | 0), B(1,5 | 8 | 3), C(2 | 4 | 6).
   Schneide die Gerade g = PQ mit der Ebene E durch A, B und C. Liegt der Schnittpunkt S außerhalb oder innerhalb des Dreiecks ABC?

5. Konstruiere die Schnittgerade t der Ebenen ABC und PQR.
   a) A(2 | 6 | 0), B(0 | 10 | 0), C(0 | 6 | 4), P(0 | 0 | 0), Q(4 | 2 | 0), R(0 | 2 | 3)
   b) A(4 | 7 | 2), B(2 | 8 | 4), C(1 | 4 | 2), P(2 | 9 | 1,5), Q(1 | 7 | 3), R(4 | 6 | 2)

6. Durch A(6 | 0 | 0), B(0 | 6 | 0) und C(0 | 0 | 3) geht die Ebene E. Konstruiere die Schnittgerade t von E und der Ebene F, für die gilt
   a) F steht senkrecht auf der Grundrißebene und geht durch O(0 | 0 | 0) und P(5 | 4 | 0).
   b) F steht senkrecht auf der Aufrißebene und geht durch U(3 | 2 | 0) und V(4 | 6 | 6).
   c) F enthält die y-Achse und geht durch U(4 | 4 | 4).

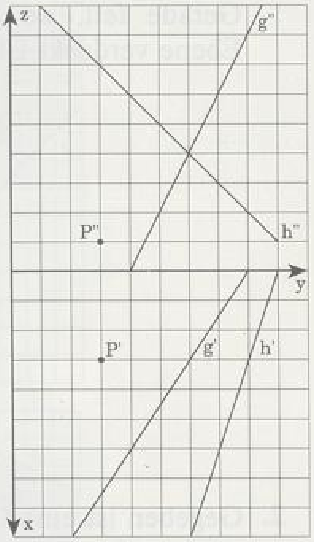
•7. Gegeben sind die Dreiecke ABC und PQR. Konstruiere ihre Schnittstrecke; kennzeichne die sichtbaren Dreieckteile.

:8. Gegeben sind die Geraden g und h und der Punkt P. Konstruiere die Gerade s, die durch P geht und g und h schneidet, und lies die Koordinaten der Schnittpunkte ab.

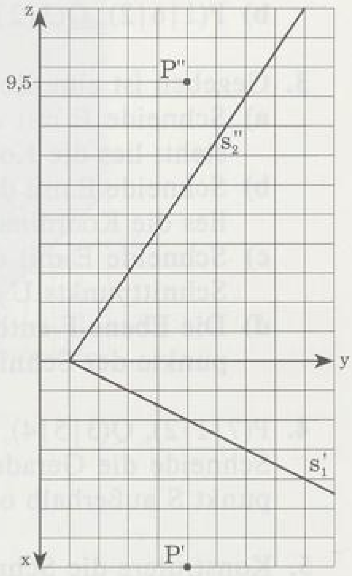


Zu 7.

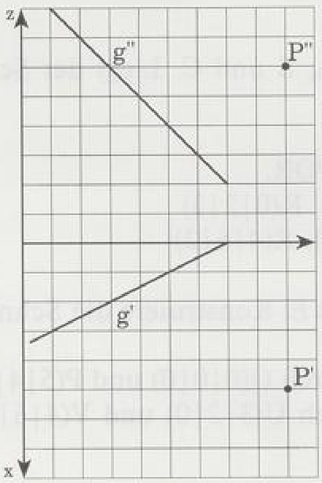
Zu 8.



•9. **Abstand Punkt-Ebene**
Gegeben sind die Spuren einer Ebene E und ein Punkt P. Fälle das Lot von P auf E. In welchem Punkt L trifft es die Ebene? Konstruiere die Strecke [PL] in wahrer Länge; welchen Abstand d haben P und E?



•10. **Abstand Punkt-Gerade**
Gegeben ist ein Punkt P und eine Gerade g. Fälle das Lot von P auf g; in welchem Punkt L trifft es die Gerade? Konstruiere die Strecke [PL] in wahrer Länge; welchen Abstand d haben P und g?
Gehe so vor:
Konstruiere die Ebene (Spuren!), die durch P geht und senkrecht ist zu g.
Der Schnittpunkt von g und E ist der Lotfußpunkt L.



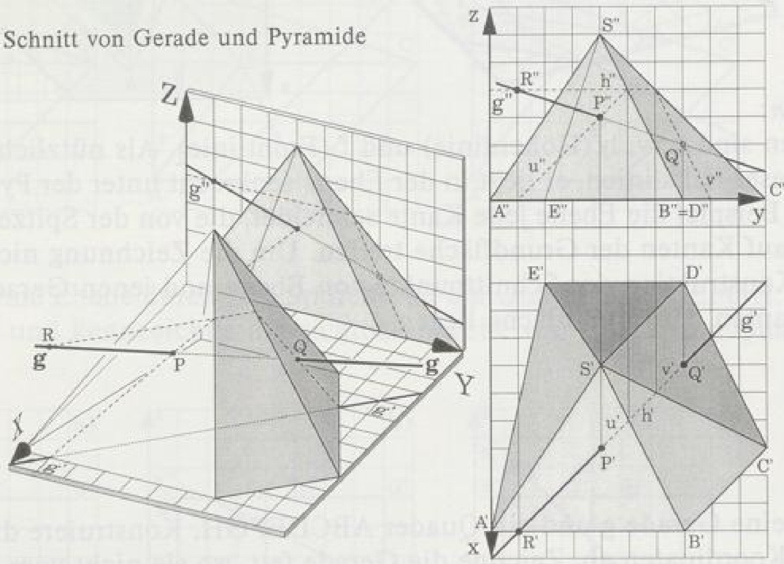
8.2.3 Schnitte an Prismen und Pyramiden

Die Schnittprobleme Gerade-Ebene und Ebene-Ebene wenden wir an auf die Schnitte von Körpern mit Geraden und Ebenen. Bei den Körpern beschränken wir uns auf Prismen und Pyramiden.

Schnitt von Gerade und Pyramide

Von Sonderfällen abgesehen trifft eine Gerade in zwei Punkten auf eine Pyramide (oder auf ein Prisma). Man konstruiert diese Durchstoßpunkte als Schnitte von Gerade und Ebene. Eine kleine Schwierigkeit besteht darin, die Seitenflächen zu finden, auf die die Gerade trifft. Infrage kommen nur solche, die in Grund- und Aufriß von der Gerade getroffen werden. Diese Seitenflächen liegen in Ebenen, die man mit der Gerade schneidet. Die gesuchten Schnittpunkte müssen in den Seitenflächen liegen.

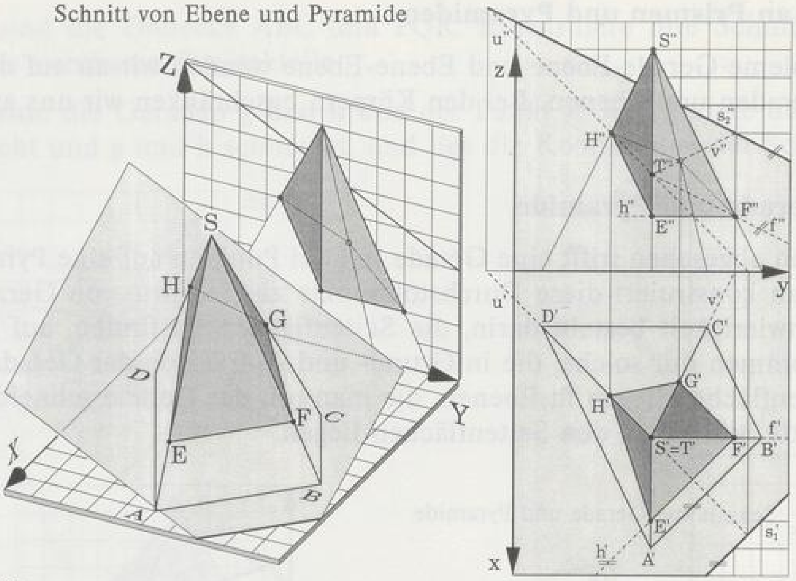
Schnitt von Gerade und Pyramide



Zur Konstruktion:
Die Gerade g trifft im Grundriß nicht die Seitenflächen A′S′E′ und S′D′E′. Deshalb konstruieren wir die Schnitte der Gerade mit den restlichen Seitenflächen: Die Hilfsgerade u liegt in der Ebene SAB und schneidet g in P; P liegt auch in der Seitenfläche, ist also einer der gesuchten Durchstoßpunkte.
Die Hilfsgerade v liegt in der Ebene SCD und schneidet g in Q; Q liegt auch in der Seitenfläche, ist also der zweite Durchstoßpunkt.
Die Hilfsgerade h (hier eine Höhenlinie) liegt in der Ebene SBC und schneidet in R; R liegt in keiner Seitenfläche, ist also kein Durchstoßpunkt.

Schnitt von Ebene und Pyramide

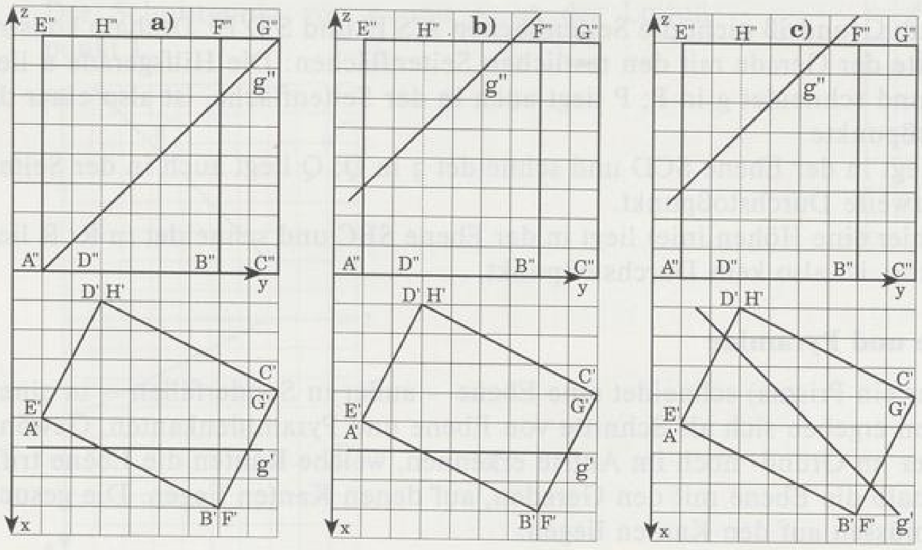
Eine Pyramide (oder ein Prisma) schneidet eine Ebene – außer in Sonderfällen – in einem Vieleck. Seine Ecken ergeben sich als Schnitte von Ebene und Pyramidenkanten. Gewöhnlich kann man weder im Grund- noch im Aufriß erkennen, welche Kanten die Ebene trifft. Man schneidet deshalb die Ebene mit den Geraden, auf denen Kanten liegen. Die gesuchten Schnittpunkte müssen auf den Kanten liegen.



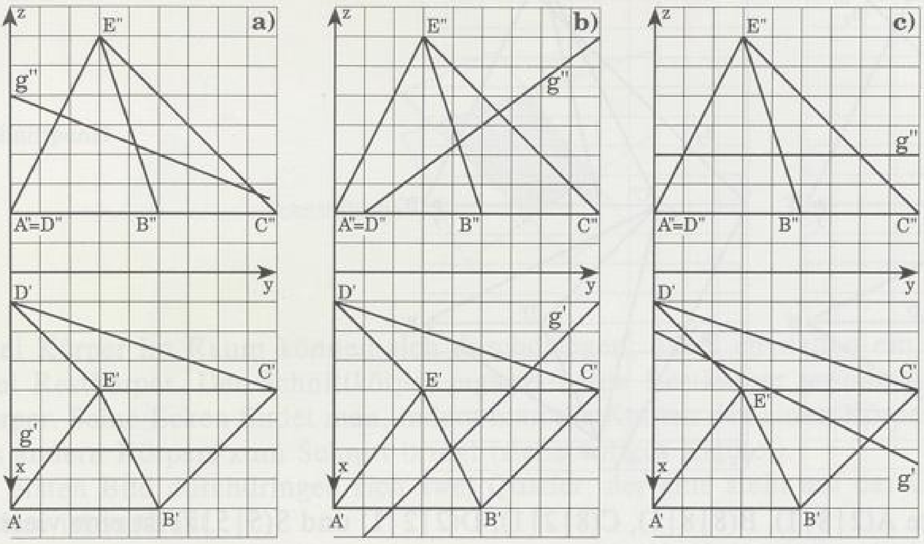
Zur Konstruktion:
Die Hilfsgeraden sind u, v, h (Höhenlinie) und f (Frontlinie). Als nützlich erweist sich der Treffpunkt T dieser Hilfslinien, er liegt in der Ebene senkrecht unter der Pyramidenspitze S. Weil in diesem Beispiel die Ebene jede Kante schneidet, die von der Spitze S ausgeht, kann sie nicht mehr auf Kanten der Grundfläche treffen. Um die Zeichnung nicht zu überladen, haben wir die Konstruktion der Schnittpunkte von Ebene und jenen Geraden weggelassen, in denen die Kanten der Grundfläche liegen.

Aufgaben

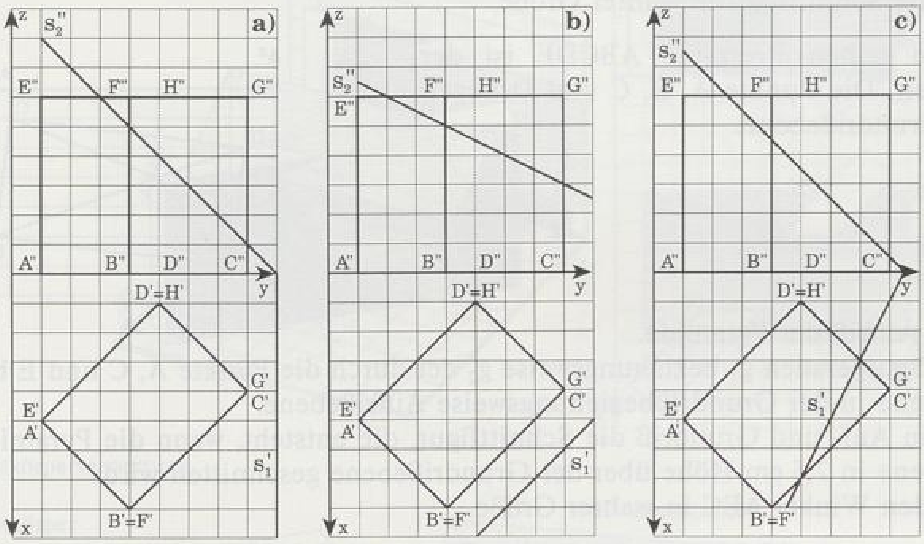
1. Gegeben ist eine Gerade g und ein Quader ABCDEFGH. Konstruiere die Schnittpunkte und lies die Koordinaten ab. Zeichne die Gerade fett, wo sie nicht vom Quader verdeckt ist, und gestrichelt, wo sie im Quader liegt.



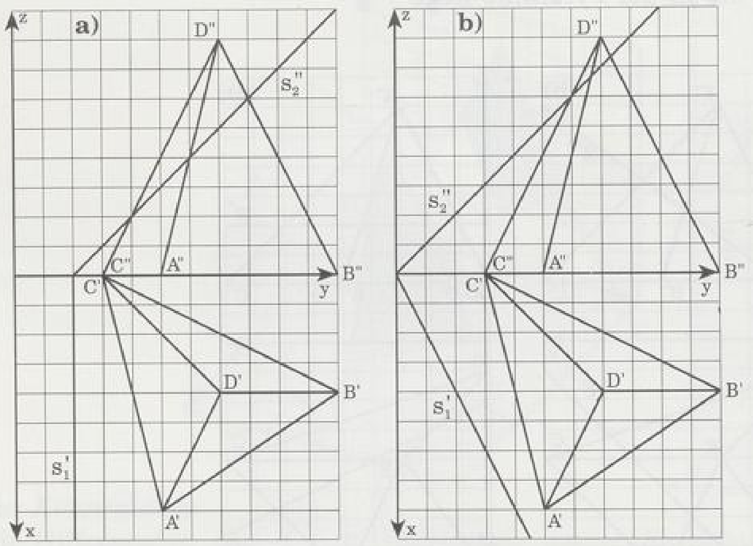
2. Gegeben ist eine Gerade g und eine Pyramide ABCDE. Konstruiere die Schnittpunkte und lies die Koordinaten ab. Zeichne die Gerade fett, wo sie nicht von der Pyramide verdeckt ist, und gestrichelt, wo sie in der Pyramide liegt.



3. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren und ein Quader ABCDEFGH. Konstruiere die Schnittfläche und kennzeichne die sichtbaren Teile von Ebene und Quader.



4. Gegeben ist eine Ebene durch ihre Spuren und eine Pyramide ABCD. Konstruiere die Schnittfläche und kennzeichne die sichtbaren Teile von Ebene und Pyramide.



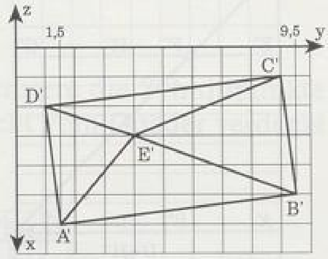
5. Durch die Punkte A(2 | 8 | 1), B(8 | 8 | 1), C(8 | 2 | 1), D(2 | 2 | 1) und S(5 | 5 | 7) ist eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S gegeben.

a) Zeichne Auf- und Grundriß. Welche Art von Pyramide ist dargestellt?

b) Eine zur Grundrißebene senkrechte Ebene E halbiert die Seitenkante [BS] und ist parallel zur Diagonale [AC] der Grundfläche. Zeichne die Spurgeraden e_1 und e_2 ein.

c) Zeichne die Schnittfigur von Ebene E und Pyramide in den Grund- und Aufriß und konstruiere die Schnittfigur in wahrer Größe.

6. Von einer 5 cm hohen Pyramide ABCDE ist der Grundriß gegeben. Die Punkte A, B, C und D liegen 1 cm über der Grundrißebene.



a) Zeichne den Aufriß der Pyramide.

b) Zeichne die Spurgeraden g_1 beziehungsweise g_2 der durch die Punkte A, C und E bestimmten Ebene in der Grundrißbeziehungsweise Aufrißebene.

c) Konstruiere in Auf- und Grundriß die Schnittfigur, die entsteht, wenn die Pyramide von einer Ebene in 2,5 cm Höhe über der Grundrißebene geschnitten wird.

d) Konstruiere den Winkel AEC in wahrer Größe.

7. a) Das Parallelogramm ABCD ist durch die Punkte A(2,5 | 2 | 4), B(3,5 | 7 | 6) und C(1 | 9 | 5) festgelegt. Zeichne es in Grund- und Aufriß.

b) Gegeben sind noch die Punkte E(9 | 1 | 10) und F(12 | 5 | 7). Parallel zur Gerade EF fallen Sonnenstrahlen aufs Viereck ABCD. Konstruiere die Schattenfigur $A_1B_1C_1D_1$, die in der Grundrißebene entsteht.

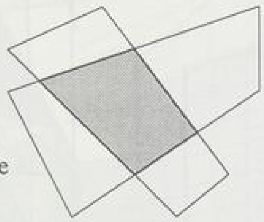
c) Unter welchem Winkel μ fallen die Sonnenstrahlen von **b)** auf die Grundrißebene? Konstruiere diesen Winkel in wahrer Größe.

8.2.4 Durchdringungen

Haben zwei Figuren gemeinsame Punkte, dann sagt man: sie schneiden sich. Zwei Geraden können sich in einem Punkt schneiden. Zwei Flächen in der Ebene können sich in einer Fläche überlappen.

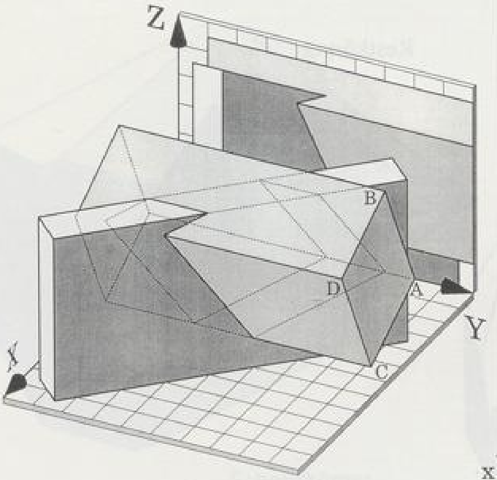
Schnittpunkt

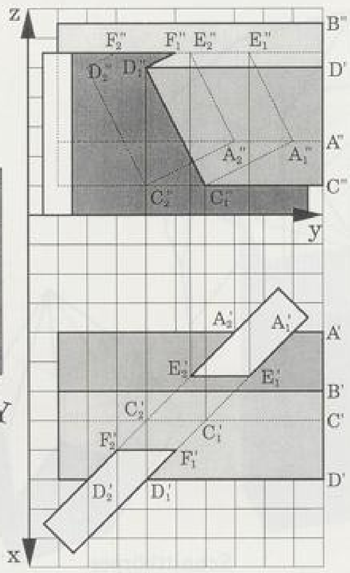
Schnittfläche



Zwei Körper im Raum können sich durchdringen; dabei entstehen ein Schnittkörper und zwei Restkörper. Der Schnittkörper ergänzt beide Restkörper jeweils zum ursprünglichen Körper. Seine Ecken findet man, indem man die Kanten des einen Körpers mit den Flächen des andern Körpers zum Schnitt bringt (siehe voriges Kapitel).
Im ersten Bild durchdringen sich zwei Quader; der eine steht auf der Grundrißebene, der andere ist verdreht.

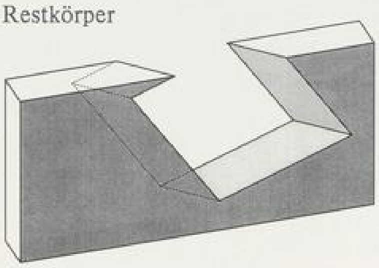
Schnitt zweier Quader



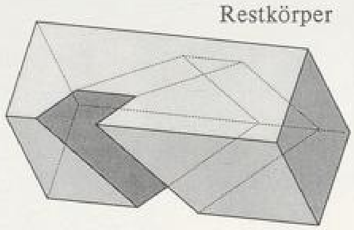


Restkörperverwertung

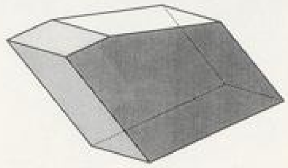
Restkörper



Restkörper

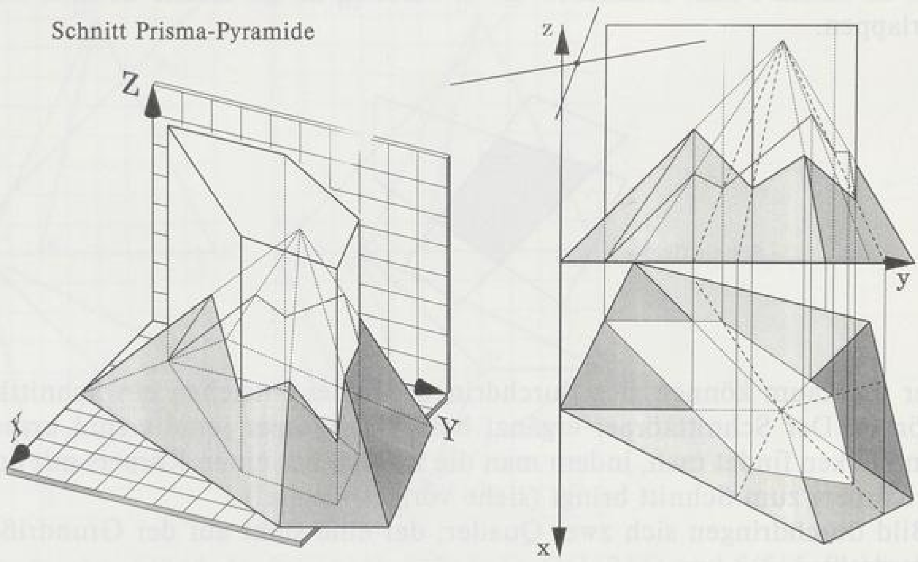


Schnittkörper

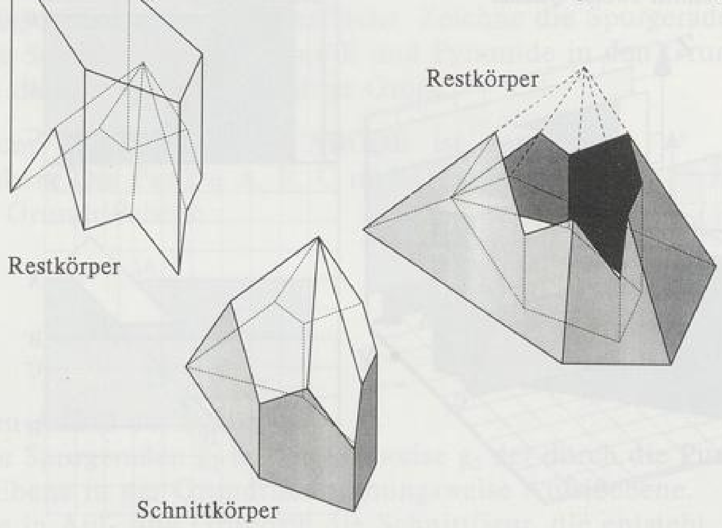


Im zweiten Bild durchdringen sich eine fünfseitige Pyramide und ein fünfseitiges gerades Prisma; beide Körper stehen auf der Grundrißebene.

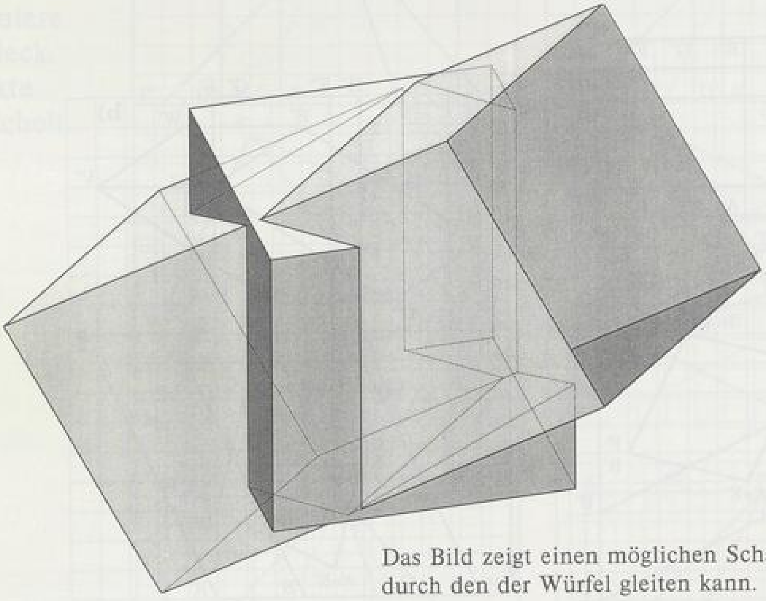
Schnitt Prisma-Pyramide



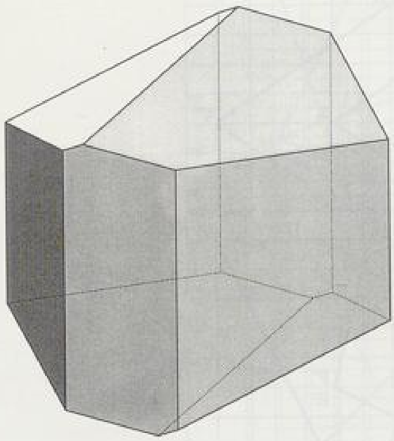
Restkörperverwertung



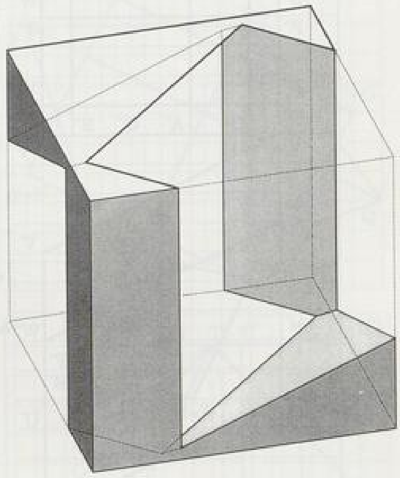
Aufgabe des Prinzen von der Pfalz (1619 bis 1682):
Schiebe einen Würfel durch einen
gleich großen hindurch.



Das Bild zeigt einen möglichen Schacht,
durch den der Würfel gleiten kann.



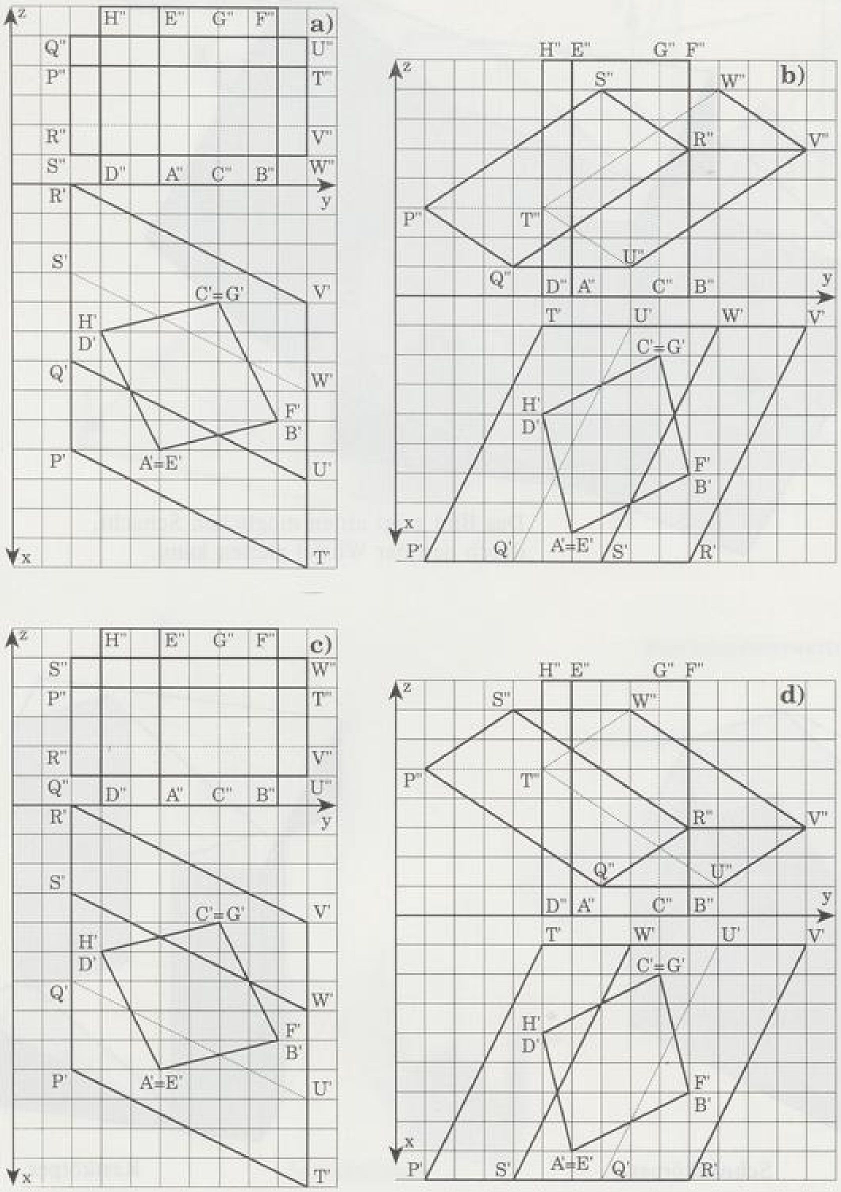
Schnittkörper



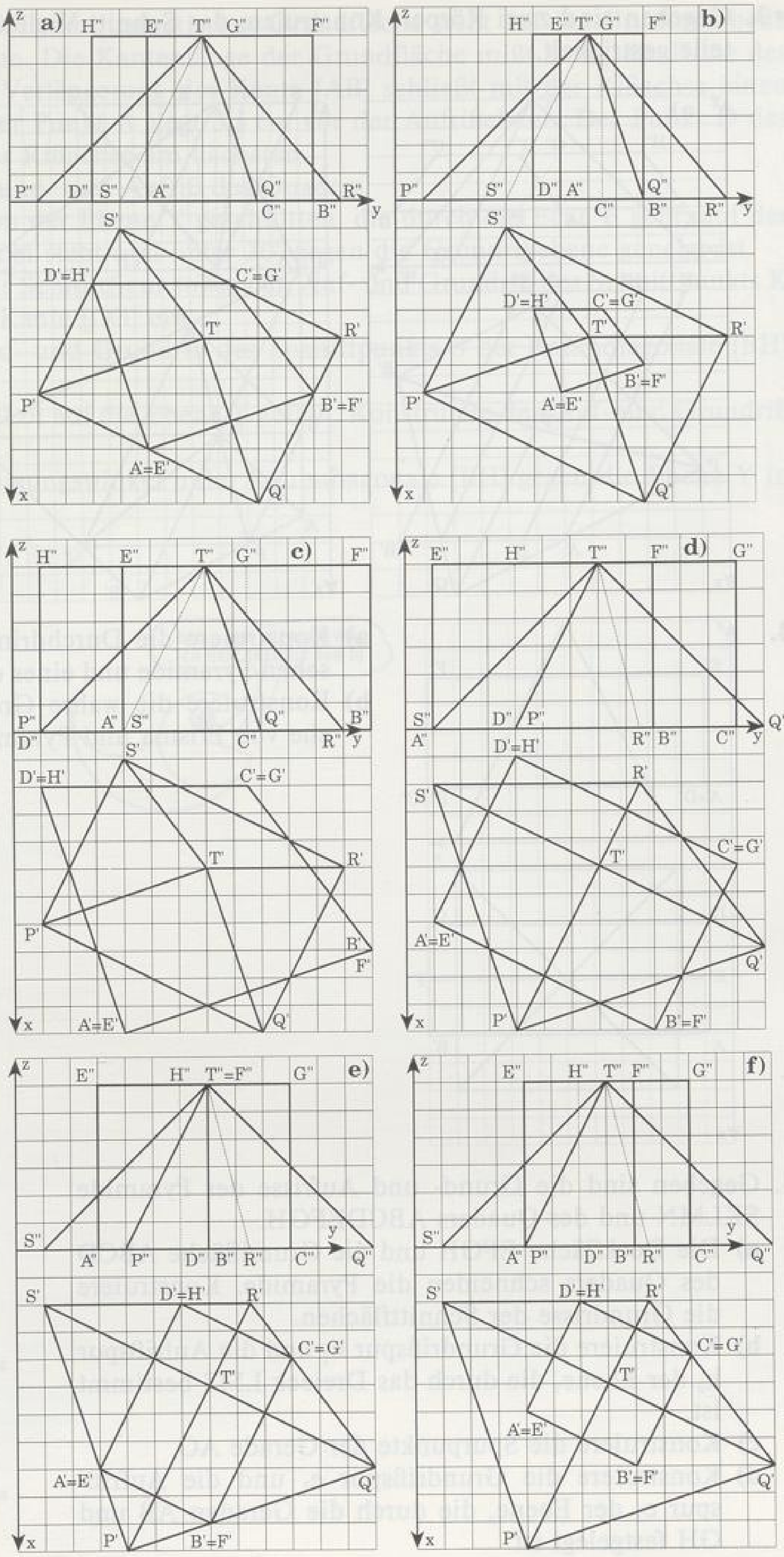
Restkörper

Aufgaben

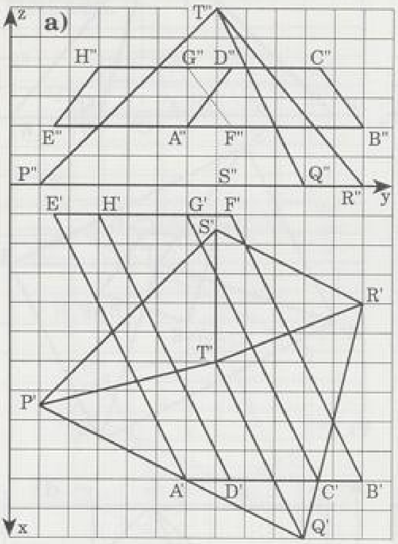
1. Konstruiere das Schnitt-Vieleck der beiden Prismen. Zeichne verdeckte Figurteile gestrichelt.

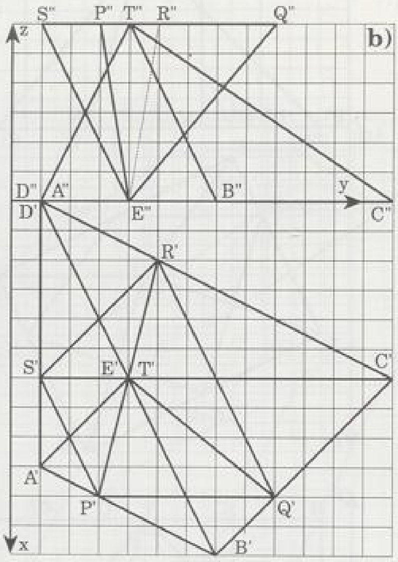


2. Gegeben ist ein Prisma ABCDEFGH und eine Pyramide PQRST. Konstruiere das Schnitt-Vieleck. Zeichne verdeckte Figurteile gestrichelt.

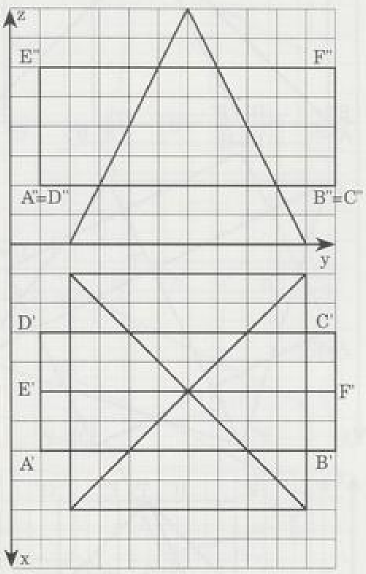


•3. Gegeben sind zwei Körper. Konstruiere das Schnitt-Vieleck. Zeichne verdeckte Figurteile gestrichelt.





4.



a) Konstruiere die Durchdringung einer quadratischen Pyramide und eines dreiseitigen Prismas.

b) Konstruiere die wahre Größe einer Schnittfläche von Prisma und Pyramide.

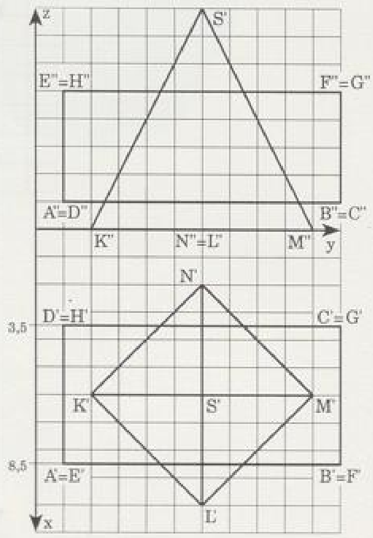
5. Gegeben sind die Grund- und Aufrisse der Pyramide SKLMN und des Quaders ABCDEFGH.

a) Die Deckfläche EFGH und die Grundfläche ABCD des Quaders schneiden die Pyramide. Konstruiere die Grundrisse der Schnittflächen.

b) Konstruiere die Grundrißspur h_1 und die Aufrißspur h_2 der Ebene, die durch das Dreieck LMS bestimmt ist.

c) Konstruiere die Spurpunkte der Gerade AG.

d) Konstruiere die Grundrißspur e_1 und die Aufrißspur e_2 der Ebene, die durch die Geraden AB und GH festgelegt ist.



6. Ein Quader ABCDEFGH mit quadratischer Grundfläche steht auf der Grundrißebene und vor der Aufrißebene. Die Kantenlänge der Grundfläche mißt 5 cm, die Höhe des Quaders ist 6 cm. Die Verlängerung der Kante [AB] schließt mit der Rißachse einen Winkel von 60° ein. Der Punkt A liegt 3,5 cm vor der Aufrißebene. Der Punkt D des Grundquadrats liegt der Rißachse am nächsten.

a) Konstruiere den Grund- und Aufriß des Quaders.

b) Der Quader wird von der Ebene Y geschnitten, die durch die Ecke E geht, auf der Aufrißebene senkrecht steht und unter 30° gegen die Grundrißebene geneigt ist. Trage den Aufriß der Schnittfigur sowie den Auf- und Grundriß des Schnittpunkts K der Ebene und der Kante [CG] ein.

c) Konstruiere den Auf- und Grundriß des Schnittpunkts S der Raumdiagonale [BH] und der Ebene Y.

d) Von H aus wird ein Lot auf die Ebene Y gefällt. Konstruiere den Auf- und Grundriß des Lotfußpunkts R.

e) Konstruiere den Neigungswinkel μ der Raumdiagonale [BH] gegen die Ebene Y in wahrer Größe.