Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

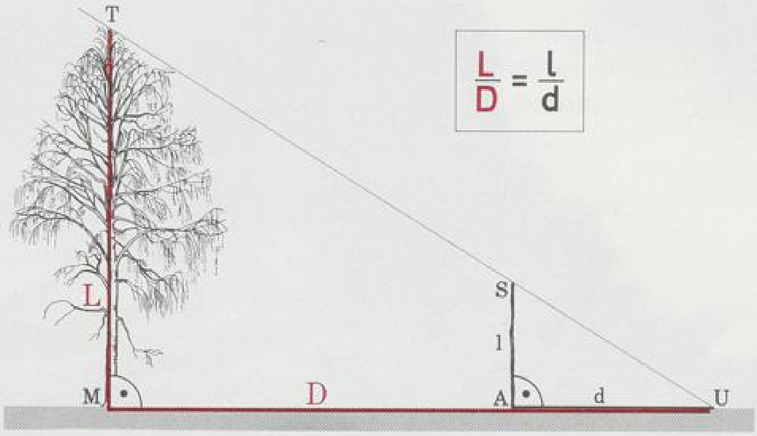
München, 1995

1.1 Die V-Figur

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

1.1 Die V-Figur

Wie hoch ist ein Baum? Mit einem alten, einfachen Verfahren hat ein Förster das schnell heraus. Er braucht nur die Sonne, einen Stab und einen Schuß Geometrie. Ein Baum der Länge L wirft einen Schatten der Länge D. In den Schatten stellt man einen Stab der Länge l so, daß beide Schattenspitzen zusammenfallen; der Schatten des Stabs hat die Länge d. Der Förster berechnet die Baumlänge nach der Formel



Quotienten von Streckenlängen wie L/D und l/d (bzw. L : D und l : d) nennt man kurz Streckenverhältnisse. Man sagt: Die Strecken L und D verhalten sich wie L zu D. Die Försterformel behauptet die Gleichheit zweier Streckenverhältnisse. Eine solche Gleichung heißt Verhältnisgleichung oder **Proportion.** Proportionen sind Bruchgleichungen, sie lassen sich deshalb umformen nach den üblichen Regeln der Algebra (zum Beispiel kreuzweise multiplizieren).

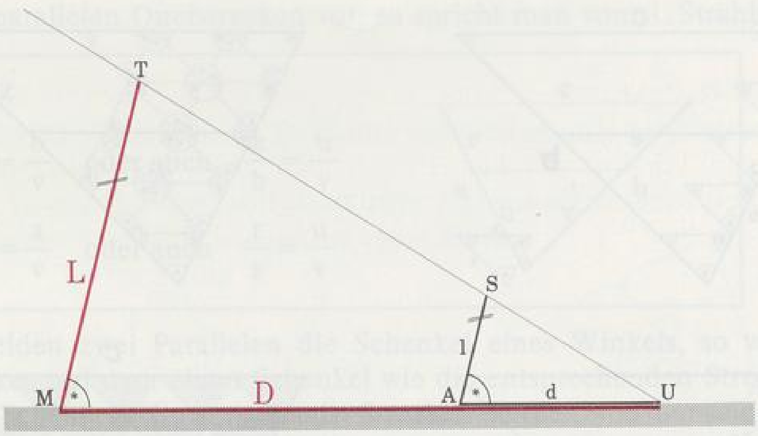
Hat der Förster beispielsweise gemessen: $D = 9{,}6$ m und $d = 3{,}2$ m bei seinem 2 m langen Stab, dann weiß er nach kurzer Überlegung, daß der Baum 6 m hoch ist.

Für senkrechte Bäume können wir diese Formel mit einem Trick leicht beweisen. Wir berechnen den Flächeninhalt des großen Dreiecks MUT auf zwei Arten:

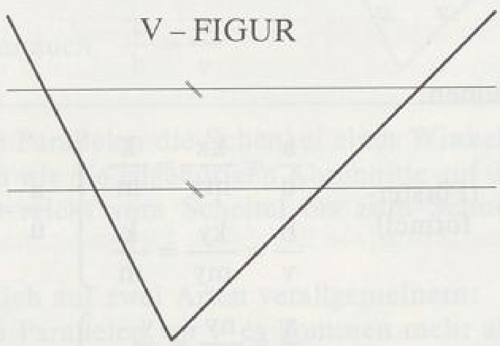
einmal direkt: Fläche (MUT) $= \frac{1}{2}DL$

und einmal als Summe der Flächeninhalte des kleinen Dreiecks AUS und des Trapezes MAST

$$\begin{aligned}
\text{Fläche (AUS)} &= \tfrac{1}{2}d \cdot l \\
\text{Fläche (MAST)} &= \tfrac{1}{2}(l + L)\,(D - d) = \tfrac{1}{2}(lD - ld + LD - Ld) \\
\text{Fläche (MUT)} &= \text{Fläche (AUS)} + \text{Fläche (MAST)} \\
\tfrac{1}{2}DL &= \tfrac{1}{2}dl + \tfrac{1}{2}(lD - ld + LD - Ld) \quad \| \cdot 2 \\
DL &= dl + lD - ld + LD - Ld \\
0 &= lD - Ld \\
Ld &= lD \quad \| \cdot \frac{1}{dD} \qquad \frac{L}{D} = \frac{l}{d}
\end{aligned}$$



Der Förster verwendet die Formel aber auch bei schiefen Bäumen! Allerdings ist jetzt der Beweis mit dem Flächentrick nicht möglich, weil die Höhen in den Dreiecken und im Trapez unbekannt sind. Dafür hilft der Pflastertrick weiter. Die geometrische Figur, die hinter dem Problem steckt, besteht aus einem Winkel, der von zwei Parallelen geschnitten wird. Wir nennen sie kurz und bündig »V-Figur«.



In der V-Figur sollen das kleine Dreieck und das Trapez mit möglichst großen kongruenten Dreiecken ausgelegt werden. Die Seite x des Pflasterdreiecks muß sowohl in r als auch in u genau reinpassen. Damit sich das Pflasterdreieck auch noch in alle Ecken der V-Figur einfügt, müssen seine Winkel genauso groß sein wie die Winkel des großen Dreiecks. Ist schließlich die V-Figur Reihe für Reihe ausgepflastert, so können wir bequem die Försterformel und noch viele weitere Proportionen ablesen.

Die Seiten des Pflasterdreiecks passen in die Seiten des großen Dreiecks k-mal hinein:

$a = kx$, $\quad b = ky$, $\quad c = kz$,

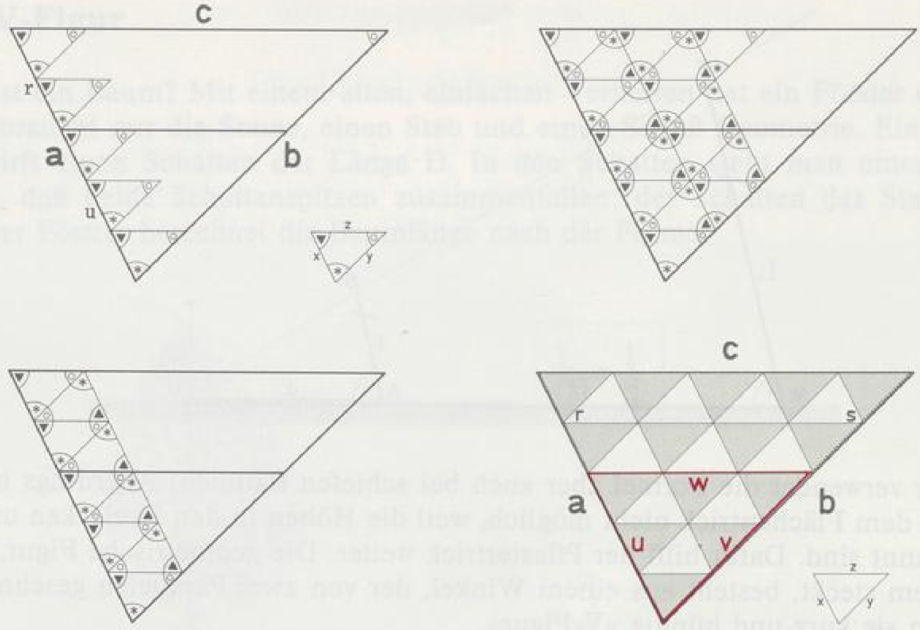
in die Seiten des kleinen Dreiecks passen sie m-mal hinein:

$u = mx$, $\quad v = my$, $\quad w = mz$,

und in die Schenkel des Trapezes passen sie genau n-mal:

$t = nx$, $\quad s = ny$.

Im Bild ist $k = 5$, $m = 3$ und $n = 2$.



Und jetzt hagelt es Proportionen:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{a}=\dfrac{kz}{kx}=\dfrac{z}{x}\\[2ex]\dfrac{w}{u}=\dfrac{mz}{mx}=\dfrac{z}{x}\end{array}\right\}\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{w}{u}\ \text{(Förster-formel)}\qquad\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{u}=\dfrac{kx}{mx}=\dfrac{k}{m}\\[2ex]\dfrac{b}{v}=\dfrac{ky}{my}=\dfrac{k}{m}\end{array}\right\}\ \dfrac{a}{u}=\dfrac{b}{v}$$

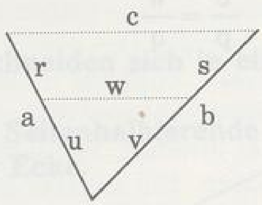
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{w}=\dfrac{kz}{mz}=\dfrac{k}{m}\\[2ex]\dfrac{a}{u}=\dfrac{kx}{mx}=\dfrac{k}{m}\end{array}\right\}\ \dfrac{c}{w}=\dfrac{a}{u}\qquad\left.\begin{array}{l}\dfrac{s}{r}=\dfrac{ny}{nx}=\dfrac{y}{x}\\[2ex]\dfrac{v}{u}=\dfrac{my}{mx}=\dfrac{y}{x}\end{array}\right\}\ \dfrac{s}{r}=\dfrac{v}{u}\qquad\text{usw.}$$

Alle diese Proportionen heißen Strahlensätze oder auch Vierstreckensätze. Der Name Strahlensatz rührt daher, daß man die Schenkel eines Winkels als Strahlen ansehen kann, die vom Scheitel ausgehen. Vierstreckensatz sagt man, weil in jeder Proportion vier Strecken vorkommen. Um Ordnung in diese Vielfalt zu bringen, sortieren wir die Proportionen danach, ob parallele Querstrecken vorkommen oder nicht.

Kommen keine parallelen Querstrecken vor, so spricht man vom 1. Strahlensatz.

1. Strahlensatz

$$c \parallel w \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{u} = \dfrac{b}{v} \quad \text{oder auch} \quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{u}{v} \\[2ex] \dfrac{r}{u} = \dfrac{s}{v} \quad \text{oder auch} \quad \dfrac{r}{s} = \dfrac{u}{v} \end{cases}$$

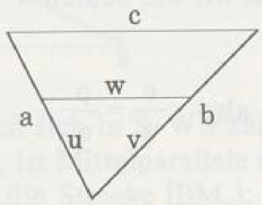


in Worten: Schneiden zwei Parallelen die Schenkel eines Winkels, so verhalten sich die Strecken auf dem einen Schenkel wie die entsprechenden Strecken auf dem andern Schenkel. (Entsprechende Strecken werden von denselben Parallelen auf den Schenkeln abgeschnitten.)

Kommen parallele Querstrecken vor, so spricht man vom 2. Strahlensatz.

2. Strahlensatz

$$c \parallel w \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{w} = \dfrac{a}{u} \quad \text{oder auch} \quad \dfrac{c}{a} = \dfrac{w}{u} \\[2ex] \dfrac{c}{w} = \dfrac{b}{v} \quad \text{oder auch} \quad \dfrac{c}{b} = \dfrac{w}{v} \end{cases}$$

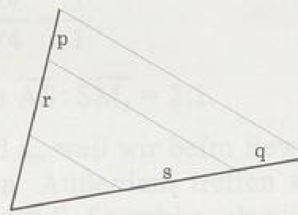


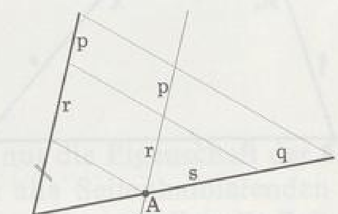
in Worten: Schneiden zwei Parallelen die Schenkel eines Winkels, so verhalten sich die parallelen Strecken wie die zugehörigen Abschnitte auf den Schenkeln. (Ein zugehöriger Abschnitt reicht vom Scheitel bis zum Schnittpunkt von Schenkel und Querstrecke.)

Die Strahlensätze lassen sich auf zwei Arten verallgemeinern:
Es kommen mehr als zwei Parallelen vor – es kommen mehr als zwei Strahlen vor.

Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes auf mehr als zwei Parallelen:

$$\frac{r}{p} = \frac{s}{q} \quad \text{oder auch} \quad \frac{r}{s} = \frac{p}{q}$$



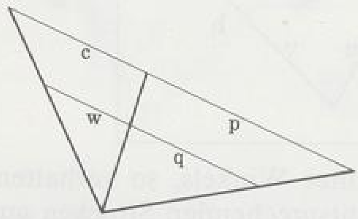


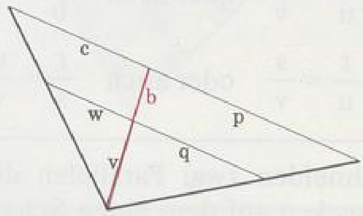
in Worten: Schneiden Parallelen die Schenkel eines Winkels, so verhalten sich die Strecken auf dem einen Schenkel wie die entsprechenden Strecken auf dem andern Schenkel.

Zum Beweis zeichnen wir eine Hilfsgerade, die parallel ist zu einem Schenkel und den andern Schenkel in A schneidet. Dabei entsteht eine neue V-Figur mit Scheitel A, aus ihr lesen wir die behauptete Proportion unmittelbar ab.

Verallgemeinerung des 2. Strahlensatzes auf mehr als zwei Strahlen:

$$\frac{c}{w} = \frac{p}{q} \quad \text{oder auch} \quad \frac{c}{p} = \frac{w}{q}$$





in Worten: Werden Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die parallelen Strecken der einen V-Figur wie die parallelen Strecken der andern V-Figur.

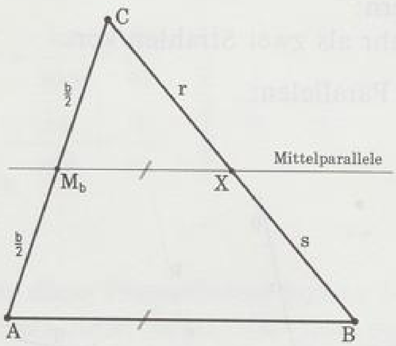
Zum Beweis betrachten wir die beiden V-Figuren:

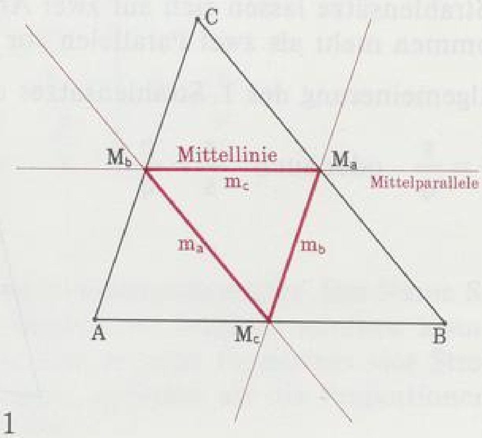
$$\left.\begin{array}{ll} \text{links} & \dfrac{c}{w} = \dfrac{b}{v} \\[2ex] \text{rechts} & \dfrac{p}{q} = \dfrac{b}{v} \end{array}\right\} \quad \text{also} \quad \frac{c}{w} = \frac{p}{q}$$

Wir wenden die Strahlensätze an und beweisen wichtige Sätze.

Satz über die Mittelparallele eines Dreiecks:

Zeichnet man durch die Mitte einer Dreieckseite die Parallele zu einer anderen Dreieckseite, dann halbiert diese Parallele die dritte Dreieckseite.





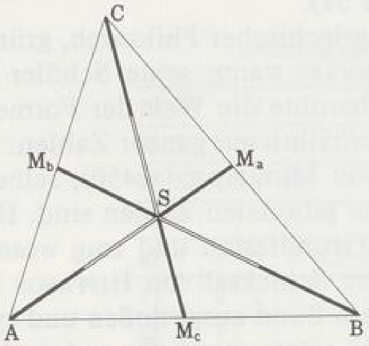
Beweis: Nach dem 1. Strahlensatz gilt $\frac{r}{s} = \frac{b/2}{b/2} = \frac{1}{1}$
also ist $r = s$ und deshalb $X = M_a$.

Die Gerade M_aM_b heißt Mittelparallele des Dreiecks, weil sie zwei Seitenmitten im Dreieck verbindet und zu einer Dreieckseite parallel ist. Jede Strecke, die zwei Seitenmitten im Dreieck verbindet, heißt Mittellinie des Dreiecks. Die V-Figur zeigt:

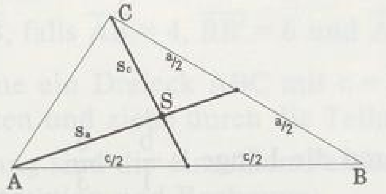
Jede Mittellinie ist halb so lang wie die zu ihr parallele Dreieckseite.

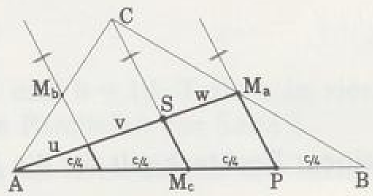
Mit dem Satz über die Mittelparallelen und der Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes beweisen wir den

Schwerpunktsatz:
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt: er heißt Schwerpunkt des Dreiecks.
Die Abschnitte, in die der Schwerpunkt eine Seitenhalbierende teilt, verhalten sich wie 2:1. Das längere Stück ist immer an einer Ecke.



Beweis: Die Seitenhalbierenden s_a und s_c schneiden sich in S. Wir zeichnen zwei Hilfsgeraden parallel zu s_c: Die eine geht durch M_a, ist Mittelparallele im Dreieck BCM_c und halbiert wegen des Mittelparallelensatzes die Strecke $[BM_c]$; die andre Hilfsgerade geht durch M_b und halbiert als Mittelparallele im Dreieck AM_cC die Strecke $[AM_c]$. Die Seite c ist jetzt in vier gleich lange Abschnitte geteilt, drei davon gehören zur V-Figur PAM_a; auf sie wenden wir die Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes an:





$$\frac{u}{v} = \frac{c/4}{c/4} = \frac{1}{1} \quad \text{und} \quad \frac{v}{w} = \frac{c/4}{c/4} = \frac{1}{1},$$

also ist $u = v = w$ und deshalb $\overline{AS} : \overline{SM_a} = 2:1$.

Das Verhältnis 2:1 gilt auch für s_b und s_c, weil wir beim Beweis nur die Eigenschaft der Seitenhalbierung von s_a verwendet haben. Außerdem treffen sich alle Seitenhalbierenden in einem einzigen Punkt, dem Schwerpunkt S. Sowohl s_a als auch s_b teilen nämlich die Seitenhalbierende s_c so, daß sich die Teilstrecken wie 2:1 verhalten.

Maßverwandtschaften

Der Pflastertrick klappt nur, wenn wir eine Strecke x finden, die sowohl in r als auch in u genau reinpaßt. Gibt es eine solche Strecke x, dann heißen u und r maßverwandt oder kommensurabel; das Streckenverhältnis u/r ist dann ein Verhältnis ganzer Zahlen, also eine rationale Zahl.

Im Kapitel **6** werden wir sehen, daß es aber auch Strecken gibt, die kein gemeinsames Maß haben, das heißt, es gibt keine auch noch so kleine Strecke x, die in r und u ganzzahlig enthalten ist. Solche Strecken heißen maßfremd oder inkommensurabel; das Streckenverhältnis ist dann keine rationale Zahl. Das einfachste Beispiel dafür sind die Seite eines Quadrats und die Quadratdiagonale. Auch für maßfremde Strecken gelten die Strahlensätze. Ein Beweis (den wir hier nicht zeigen) beruht darauf, daß man zu jedem Paar maßfremder Strecken ein Paar maßverwandter Strecken so finden kann, daß sich die entsprechenden Strecken beliebig wenig unterscheiden. Ein anderer Beweis versteckt das Problem der Maßfremdheit in Flächenberechnungen (Aufgabe **51**).

PYTHAGORAS (≈ 570 bis ≈ 497), griechischer Philosoph, gründete um 532 in Süditalien eine Philosophenschule. Die Pythagoräer waren seine Schüler oder Anhänger seiner Geheimlehre. Nach ihrer Anschauung beruhte die Welt der Formen und Töne auf ganzen Zahlen und die Harmonie darin auf Verhältnissen ganzer Zahlen.

Wahrscheinlich hat HIPPASOS VON METAPONT (≈ 450), selber Pythagoräer, entdeckt, daß es auch Verhältnisse gibt, die keine rationalen Zahlen sind. Diese Erkenntnis erschütterte die pythagoräische Lehre in ihren Grundfesten und trug wesentlich zur Auflösung jenes Geheimbunds bei. Über das weitere Schicksal von HIPPASOS berichten zwei Legenden: Nach der einen Legende soll er aus dem Bund ausgestoßen und symbolisch bestattet worden sein, indem man ihm einen Grabstein setzte; nach der andern Legende soll er von den Göttern gestraft worden und auf einem untergehenden Schiff ertrunken sein.

Aufgaben

1. a) In einem Rechteck gilt für die Breite b und die Länge l: $\dfrac{b}{l} = \dfrac{5}{3}$.

Ist damit das Rechteck eindeutig bestimmt?

b) Bestimme in einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis a und dem Schenkel 1,5a das Verhältnis von Basis und Schenkel. Wie verhalten sich die zugehörigen Höhen?

c) Bestimme für ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a das Verhältnis von Hypotenuse und zugehöriger Höhe.

2. Zwei Dreiecke stimmen in einer Seite überein.

Wie verhalten sich die Flächeninhalte, wenn für die zugehörigen Höhen gilt: $\dfrac{h'}{h} = \dfrac{3}{2}$?

3. Zwei Dreiecke mit demselben Flächeninhalt stimmen in einer Höhe überein. Wie verhalten sich die zugehörigen Seiten?

4. Beweise: Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

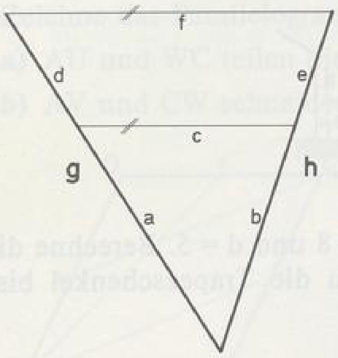
5. Von zwei Rechtecken ist über Breite und Länge bekannt: $\frac{b}{l} = \frac{b'}{l'} = \frac{7}{4}$.

a) Berechne l, wenn b = 4 ist.

b) Berechne b′, wenn l′ = 9 ist.

c) Wie verhalten sich die Flächeninhalte der beiden Rechtecke, wenn b = 5 und b′ = 25 ist?

6. STRECKENSALAT



Streckenlängen

	a	b	c	d	e	f	g	h
a)	3		2			?	5	
b)	3	5		?	4		?	
c)	5	4	3	10		?		?
d)	?			5	4			6
e)	?	?	4	6	4,5	10		
f)		4	2	3		3	?	?
g)	2	?					6	8
h)	7	2			?		10	

7. Zeichne einen Winkel mit Scheitel O und den Schenkeln s und s′. Zwei Parallelen schneiden den Schenkel s in A und B, s′ in A′ und B′; AA′ liegt näher beim Scheitel als BB′. Zeichne jeweils eine passende Figur und berechne:

a) $\overline{A'B'}$, falls $\overline{OA} = 3$, $\overline{OB} = 5$ und $\overline{OA'} = 2$

b) $\overline{BB'}$, falls $\overline{OB} = 7$, $\overline{AB} = 3$ und $\overline{AA'} = 2$

c) $\overline{OB}$, falls $\overline{AB} = 4$, $\overline{BB'} = 6$ und $\overline{AA'} = 4$.

8. Zeichne ein Dreieck ABC mit c = 12, a = 8 und b = 10. Teile a in vier gleich lange Strecken und ziehe durch die Teilpunkte die Parallelen zur Seite c.

Wie lang sind die einzelnen Parallelstrecken im Dreieck und die Teilstrecken auf b? (Konstruktion und Rechnung)

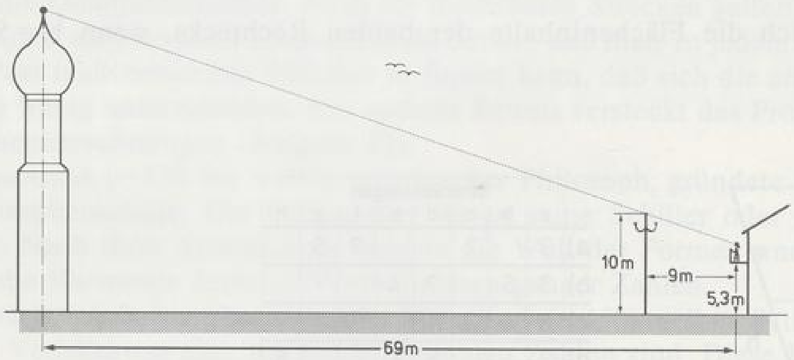
9. Ein Punkt O hat von den Parallelen g und h die Abstände 2 und 5. Eine Gerade k geht durch O und schneidet das Parallelenpaar so, daß die Strecke (auf k) zwischen den Parallelen die Länge 4 hat. Wie weit sind die Schnittpunkte von O entfernt?

10. Zeichne das Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(10 | 1) und C(1 | 7).
Die Parallele zu a durch D(4 | 1) schneidet b in E. 8
Die Parallele zu c durch E schneidet a in F. 0 0 11
Bestimme die Streckenverhältnisse $\overline{CF} : \overline{FB}$ und $\overline{CF} : \overline{CB}$. 0

•11. Zeichne die Punkte A(8,5 | 1) und B(3,5 | 9) und entscheide durch 13
Rechnung, ob S(7,5 | 2,5), T(6 | 5), U(2 | 11,5) und V(1 | 13) 0 0 9
auf AB liegen. 0

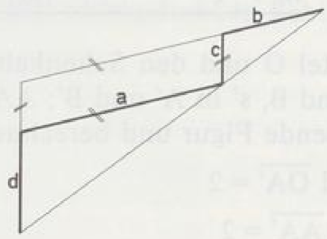
12. Zeichne das Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(13 | 1) und C(5 | 9). 9
Die Parallele zu b durch D(4 | 1) schneidet a in E. 3 0 13
Die Parallele zu AE durch C schneidet AB in F. Berechne $\overline{AF}$. 0

•**13.** Roswitha (Augenhöhe 1,7 m) bestimmt die Höhe h eines Kirchturms. Von ihrem Balkon aus peilt sie über einen Telefonmast die Turmspitze an. In einer Zeichnung trägt sie die gemessenen Abstände und Entfernungen ein. Zu welchem Ergebnis kommt sie?

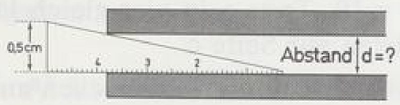


14. In einem Trapez ABCD mit a ∥ c ist a = 12, b = 3, c = 8 und d = 5. Berechne die Seitenlängen des Dreiecks ABT, das entsteht, wenn du die Trapezschenkel bis zum Schnittpunkt T verlängerst.

15. Beweise: $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

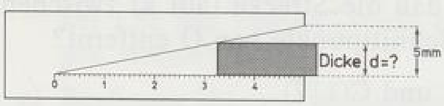


16. MESSKEIL



(die Zeichnung ist nicht maßstäblich)

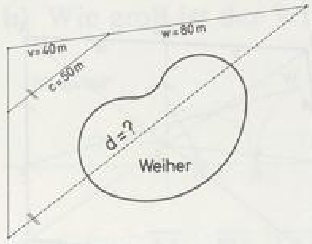
17. KEILAUSSCHNITT



(die Zeichnung ist nicht maßstäblich)

18. FLUSSBREITE

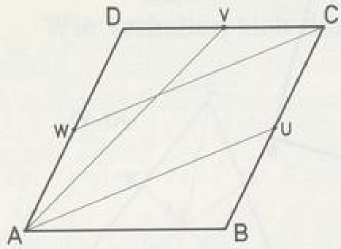
19. WEIHERWASSER



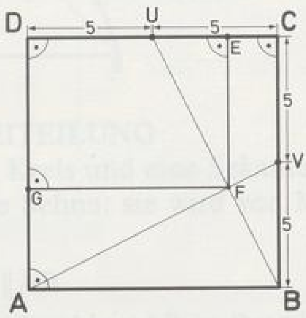
•20. Zeichne das Parallelogramm ABCD mit den Seitenmitten U, V und W. Beweise:

a) AU und WC teilen die Diagonale [BD] in drei gleich lange Strecken.

b) AV und CW schneiden sich auf BD.

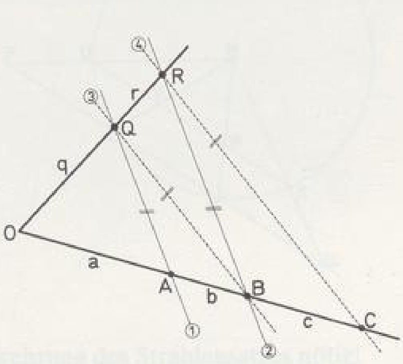


21. $\overline{EF} = ?$
$\overline{GF} = ?$

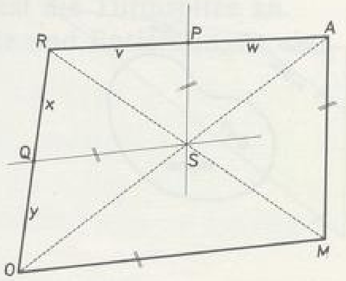


22. Gegeben ist ein Winkel mit Scheitel O, A und B sind zwei beliebige Punkte auf demselben Schenkel. Zwei Parallelen durch A und B schneiden den andern Schenkel in Q und R. Die Parallele zu QB durch R schneidet OA in C.

Zeige: $c = b + b^2/a$.

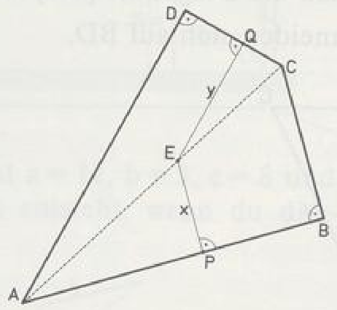


23. Zeichne das Viereck OMAR und den Schnittpunkt S seiner Diagonalen.
Die Parallele zu AM durch S schneidet AR in P.
Die Parallele zu OM durch S schneidet OR in Q.
a) Zeige: $xw = yv$
b)* Welche besondere Lage hat PQ?

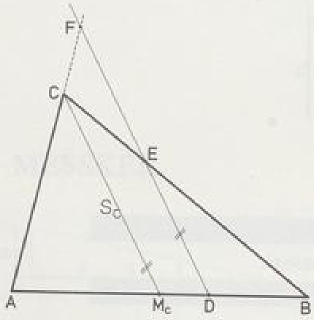


24. Zeichne das Viereck ABCD. Fälle von irgendeinem Punkt E der Diagonale [AC] die Lote auf zwei Gegenseiten.

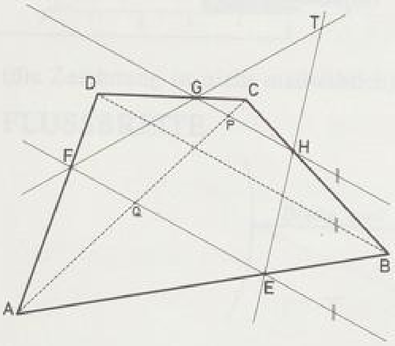
Beweise: $\frac{y}{d} + \frac{x}{b} = 1.$



•25. Beweise: s_c ist das arithmetische Mittel von $\overline{DE}$ und $\overline{DF}$.



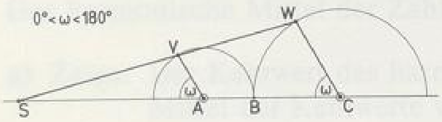
:26. Zeichne das Viereck ABCD und seine Diagonalen. EF und GH sind parallel zu BD.
Beweise: AC, EH und FG treffen sich in einem Punkt, falls EH und FG nicht parallel sind.



* Umkehrung des Strahlensatzes nötig!

•27. **a)** Wie ändert sich S, wenn sich die (parallelen) Radien drehen?

b) Wie groß ist der Winkel VBW?



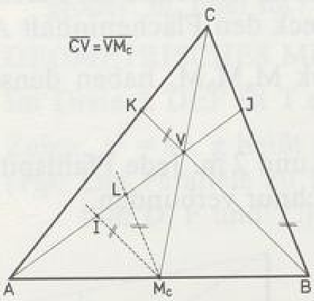
⁝28. **a)** Zeige: $\overline{AI} = \overline{IV}$, $\overline{LM_c} = \overline{CJ}$.

b) Berechne: $\overline{BJ} : \overline{LM_c}$, $\overline{BJ} : \overline{CJ}$, $a : \overline{CJ}$, $b : \overline{CK}$, $c : \overline{JK}$ und $\overline{VA} : \overline{VJ}$.

c)* Zeige: $JK \parallel AB$.

d) Zeige: Die Dreiecke AVC, AM_cV, BCV und BM_cV haben denselben Flächeninhalt.

Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke VJC und ABC?



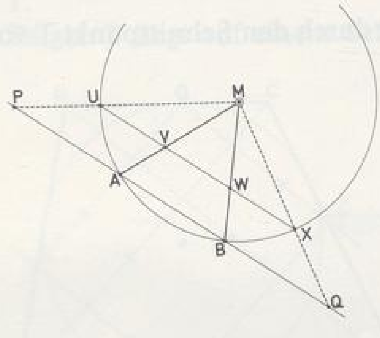
•29. SEHNENDREITEILUNG

Zeichne einen Kreis und eine Sekante; die beiden schneiden sich in A und B. [UX] ist eine besondere Sehne: sie wird von MA und MB in drei gleich lange Abschnitte geteilt.

a) Zeige: $UX \parallel AB$.

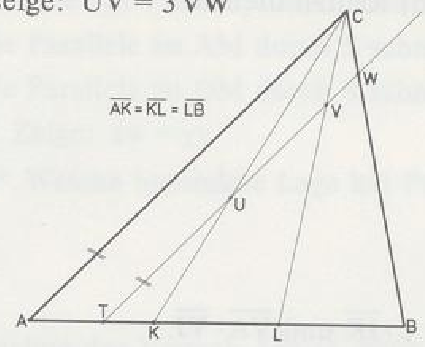
MU und MX schneiden AB in P und Q.

b) Vergleiche die Längen $\overline{PA}$, $\overline{AB}$ und $\overline{BQ}$ und beantworte die Frage: Wie konstruiert man die Sehne, die von zwei gegebenen Radien in drei gleich lange Abschnitte geteilt wird?



* Umkehrung des Strahlensatzes nötig!

30. Zeige: $\overline{UV} = 3\,\overline{VW}$



•31. Zeichne ein Dreieck mit seinem Schwerpunkt S. Ziehe durch S eine Parallele p zu einer Seite; p schneidet die andern Seiten in X und Y.

a) Welches Verhältnis bilden $\overline{XY}$ und die Länge der zu XY parallelen Seite?

b) [XY] zerlegt das Dreieck in ein Trapez und in ein Dreieck. Berechne die Flächeninhalte der beiden Teilfiguren, wenn das Ausgangsdreieck den Flächeninhalt A hat.

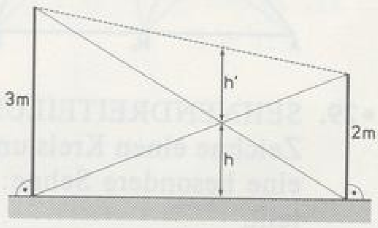
32. Zeige: Ein Dreieck ABC und sein Seitenmitten-Dreieck $M_aM_bM_c$ haben denselben Schwerpunkt.

33. In einem Garten stehen zwei Pfähle mit den Höhen 3 m und 2 m. Jede Pfahlspitze ist mit dem Fuß des andern Pfahls mit einer gespannten Schnur verbunden.

a) In welcher Höhe h treffen sich die Schnüre?

b) Wie hängt die Höhe h vom Abstand der Pfähle ab?

c) Berechne h′.

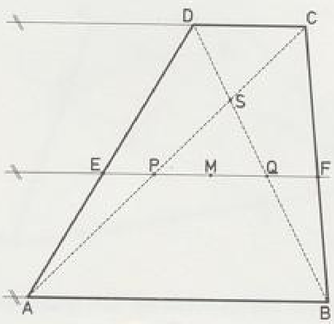


34. Im Trapez ABCD schneiden sich die verlängerten Schenkel AD und BC in T. Die Diagonalen schneiden sich in S.
Zeige: Die Gerade ST halbiert die Basen.

35. **a)** Zeige: $\overline{EQ} = \overline{PF}$.

b) Zeige: [PQ] und [EF] haben denselben Mittelpunkt M.

c) Zeige: Die Gerade MS halbiert a und c und geht durch den Schnittpunkt T von BC und AD.



36. Das arithmetische Mittel der Zahlen a und b ist die Zahl $m_a = \dfrac{a+b}{2}$.

Das harmonische Mittel der Zahlen a und b ist die Zahl $m_h = \dfrac{2ab}{a+b}$, falls $a \neq -b$.

a) Zeige: Der Kehrwert des harmonischen Mittels von a und b ist das arithmetische Mittel der Kehrwerte von a und b, falls $ab \neq 0$.

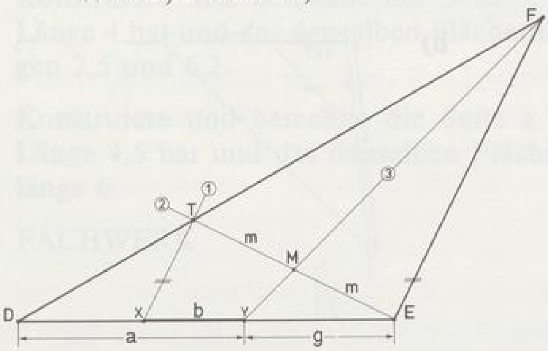
b) Berechne beide Mittel für

a	12	1	3	6
b	6	4	3	0

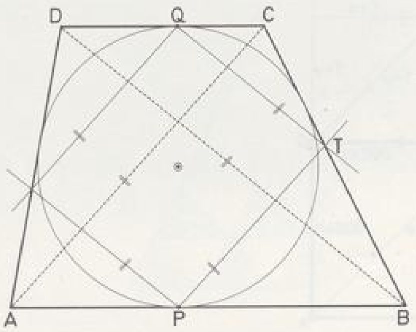
c) Zeichne ein Trapez ABCD mit AB ∥ CD. Die Diagonalen schneiden sich in S.
Die Parallele zur Basis durch S schneidet AD in X und BC in Y.
Zeige: S halbiert [XY].
$\overline{XY}$ ist das harmonische Mittel von a und c.

d) Deute auch das arithmetische Mittel als Länge einer Strecke im Trapez. Was ist größer: m_a oder m_h?

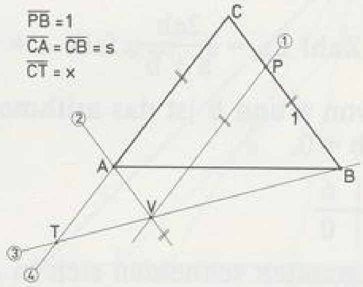
37. GEOMETRISCHES MITTEL
Im Dreieck DEF ist T ein beliebiger Punkt auf der Seite [DF]. M ist Mitte von [ET].
Zeige: $g^2 = ab$. g heißt geometrisches Mittel von a und b.
(*Tip:* Die Parallele zu ET durch D schneidet FM in Z. Strahlensätze zu den Scheiteln D, F und Y!)



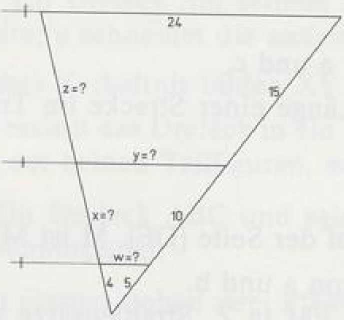
38. Zeichne ein TANGENTENTRAPEZ. Ziehe durch die Berührpunkte (auf den Basen) Geraden, die zu den Diagonalen parallel sind. Zwei solcher Geraden schneiden sich in T.
Zeige: T liegt auf einem Schenkel.



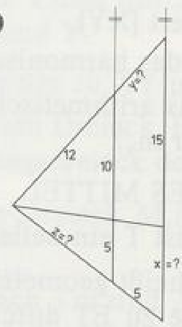
39. Zeige: $\overline{CT} = x = s^2$



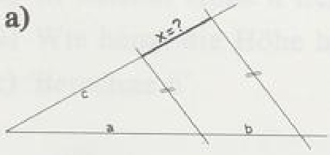
40. a)



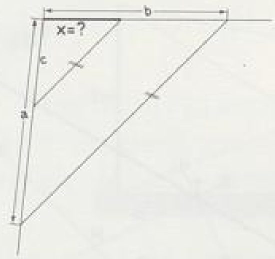
b)



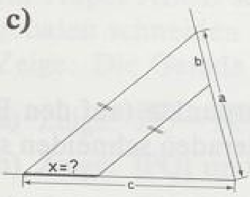
41. a)



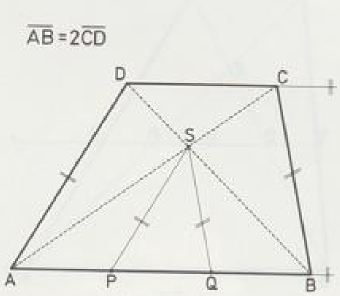
b)



c)



42. Zeige: $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$



43. Konstruiere das Dreieck ABC aus:

0

a) $A(0|0), B(1|-6), S(2|-2)$ 0 0 5

6

13

b) $B(9|4), S(5|6), M_a(7|8)$ 0 0 10

0

5

c) $M_a(3|2{,}5), M_b(0|3), S(2|2)$ 0 0 6

0

11

d) $B(8|2), C(6|9), S(5|?), s_a = 7{,}5$ 0 0 8

0

:44. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $s_a = 5$, $s_b = 8$ und $s_c = 6$.

45. Konstruiere und berechne »die vierte Proportionale« x in der Proportion

a) $7{,}5 : 2{,}5 = 6 : x$ **b)** $68 : 52 = 51 : x$ (siehe Aufgabe **41**).

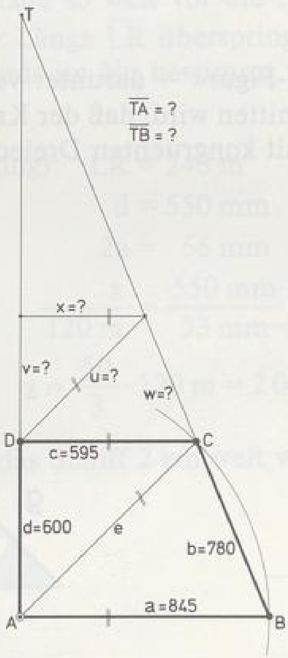
46. Konstruiere und berechne »die dritte Proportionale« x in der Proportion

a) $8 : 6 = 6 : x$ **b)** $4 : 3{,}2 = 3{,}2 : x$.

47. Konstruiere und berechne die Seite x eines Rechtecks, dessen andere Seite y die Länge 4 hat und das denselben Flächeninhalt hat wie ein Rechteck mit den Seitenlängen 2,5 und 6,2.

48. Konstruiere und berechne die Seite x eines Rechtecks, dessen andere Seite y die Länge 4,5 hat und das denselben Flächeninhalt hat wie ein Quadrat mit der Seitenlänge 6.

49. FACHWERK



50. Im Trapez ABCD gilt a = 54, b = 36, c = 18 und d = 28. BC und AD schneiden sich in T.

a) Berechne $\overline{CT}$ und $\overline{DT}$.

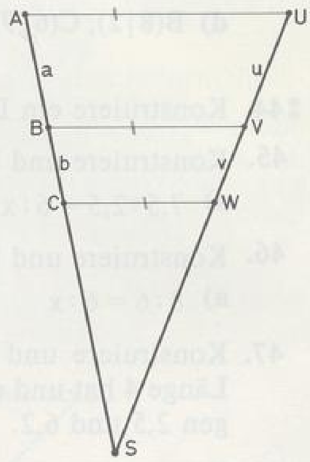
b) Die Parallele zu AD durch C schneidet AB in E und BD in F.
Berechne $\overline{CF} : \overline{FE}$.

51. *Flächenbeweis des 1. Strahlensatzes*

a) Zeige: Die Flächen der Dreiecke ABV und CBV verhalten sich wie a : b.
Die Flächen der Dreiecke UVB und WVB verhalten sich wie u : v.

b) Zeige: Die Dreiecke ABV und UBV sind flächengleich, ebenso die Dreiecke CBV und WBV.

c) Folgere aus **a)** und **b)** die Proportion a : b = u : v.



1.2 Die X-Figur

Die Strahlensätze gelten auch bei der »X-Figur« – darunter verstehen wir eine Geradenkreuzung, die von zwei Parallelen so geschnitten wird, daß der Kreuzpunkt dazwischen liegt. Auch diese X-Figur pflastern wir wieder mit kongruenten Dreiecken aus. Wie bei der V-Figur lesen wir die Strahlensätze direkt ab.

X-FIGUR