Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

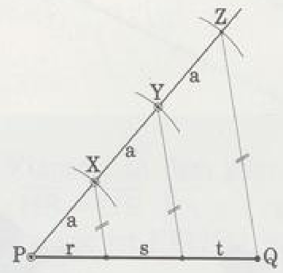
München, 1995

2.1 Teilverhältnis

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

2.1 Teilverhältnis

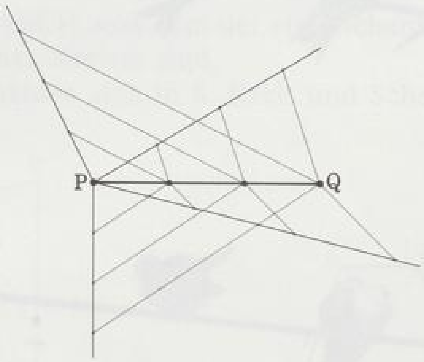
Eine der einfachsten Konstruktionen ist die Halbierung einer Strecke. Damit lassen sich Strecken auch in 4, 8, 16 ... gleiche Teile zerlegen. Wie aber teilt man eine Strecke mit Zirkel und Lineal in 3 oder 5 oder gar 37 gleiche Stücke? Die Verallgemeinerung des 1. Strahlensatzes hilft uns weiter.



Um die Strecke [PQ] zu dritteln, zeichnen wir von P aus einen Strahl und tragen auf ihm eine beliebige Strecke a dreimal ab. Den Endpunkt Z der 3. Strecke verbinden wir mit Q. Die Parallelen zu ZQ durch X und Y teilen [PQ] in drei gleich lange Strecken. Es gilt nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{r}{s} = \dfrac{a}{a}, & \text{das heißt} \quad r = s \\[2ex] \dfrac{s}{t} = \dfrac{a}{a}, & \text{das heißt} \quad s = t \end{array}\right\} \text{ also } \quad r = s = t = \tfrac{1}{3}\overline{PQ}$$

Bei der Konstruktion spielt es keine Rolle, welchen Winkel Strecke und Strahl bilden.



Der Punkt T zerlegt [PQ] in zwei Teilstrecken, die sich wie 2:1 oder wie 1:2 verhalten, je nachdem, mit welcher Teilstrecke man die Proportion anfängt:

$\overline{PT} : \overline{TQ} = 2 : 1,$

aber $\overline{QT} : \overline{TP} = 1 : 2$

Man sagt: Der Punkt T teilt die Strecke [PQ] im Verhältnis 2:1, aber er teilt die Strecke [QP] im Verhältnis 1:2. Den Quotienten 2:1 bzw. 1:2 nennt man hier Teilverhältnis. Um das Teilverhältnis eindeutig anzugeben, unterscheidet man zwischen Anfangs- und Endpunkt der Strecke. Der Anfangspunkt steht beim Streckensymbol an 1. Stelle:

[PQ] hat den Anfangspunkt P
[QP] hat den Anfangspunkt Q

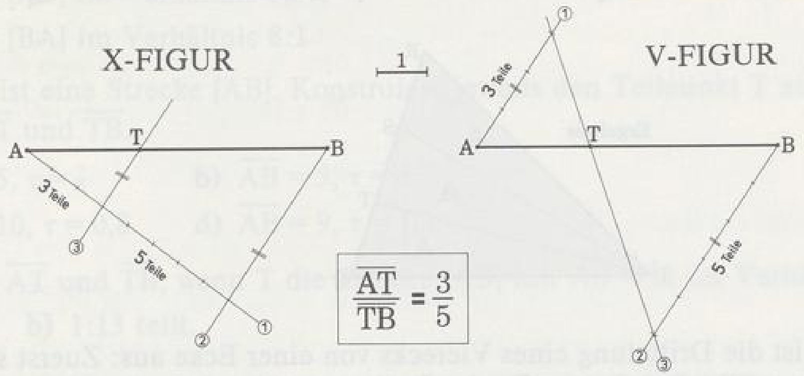
Definition:

Liegt der Punkt $T \neq Q$ auf der Strecke [PQ] und wählt man P als Anfangspunkt,

dann heißt $\tau = \overline{PT} : \overline{TQ}$ **Teilverhältnis** von T bezüglich [PQ].

Sind Strecke und Teilverhältnis gegeben, so findet man den Teilpunkt T mit der V-Figur oder der X-Figur.
Beispiel: Konstruiere T, falls $AB = 6$ und $\tau = 0{,}6$. Es gilt die Proportion $\overline{AT} : \overline{TB} = 3 : 5$.

KONSTRUKTION MIT DER



Bei dieser Konstruktion haben wir eine einfache Möglichkeit, die Zeichengenauigkeit zu überprüfen: wir berechnen die Längen $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$.

Strahlensatz: $\dfrac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \dfrac{3}{5}$, wir nennen $\overline{AT} = x$, dann ist $\overline{TB} = 6 - x$.

Es ergibt sich $\dfrac{x}{6-x} = \dfrac{3}{5} \;\Big\|\; \cdot 5\,(6-x)$

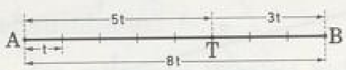
$$5x = 18 - 3x, \quad \text{also} \quad 8x = 18 \quad \text{und damit}$$

$$x = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Also ist $\overline{AT} = 2{,}25$ und $\overline{TB} = 3{,}75$.

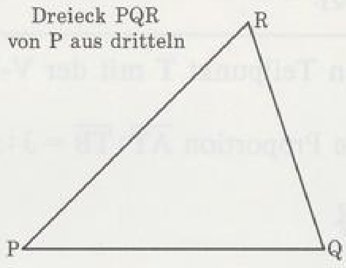
Einfacher geht's mit folgender Überlegung: Wir denken uns AB in $3 + 5 = 8$ gleiche Teile t geteilt. Dann ist $6 = 8t$, also $t = 3/4$, und es gilt

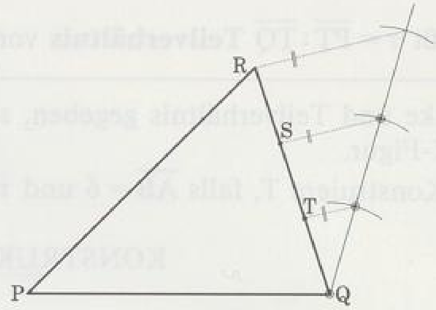
$\overline{AT} = 3t = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ und
$\overline{TB} = 5t = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75.$

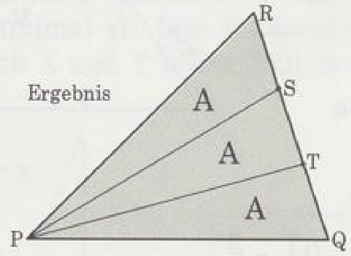


Winkel lassen sich – genau wie Strecken – in 2, 4, 8 … gleiche Teile zerlegen. Große Mathematiker haben sich jahrhundertelang den Kopf darüber zerbrochen, wie sie einen Winkel allein mit Zirkel und Lineal dritteln oder fünfteln oder … könnten. Dank Algebra und Analytischer Geometrie wissen wir heute, daß dies unmöglich ist.

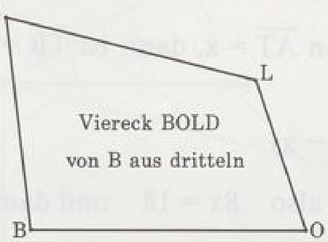
Vielecke dagegen lassen sich von einer Ecke aus (mit Zirkel und Lineal) in beliebig viele flächengleiche Teile zerlegen. Am einfachsten geht's beim Dreieck: hier müssen wir bloß die gegenüberliegende Seite in gleich lange Strecken teilen. Das Bild zeigt eine Drittelung von P aus. Die Teildreiecke haben gleich lange Grundseiten und dieselbe Höhe, also denselben Flächeninhalt.

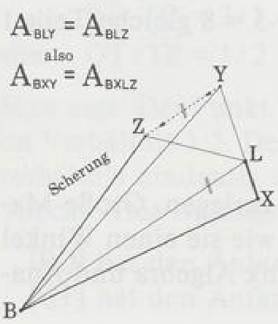


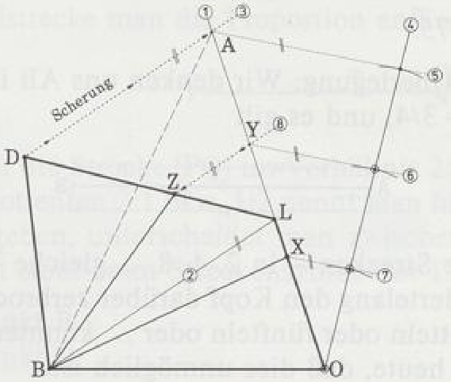


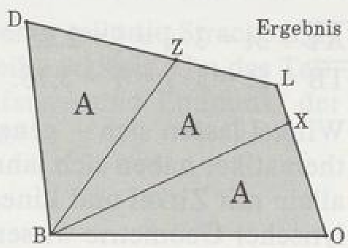


Etwas vertrackt ist die Drittelung eines Vierecks von einer Ecke aus: Zuerst scheren wir das Viereck BOLD zum Dreieck BOA: ① bis ③. Dann dritteln wir das Dreieck BOA von der Ecke B aus: ④ bis ⑦. Schließlich scheren wir Y aufs Viereck BOLD zurück: ⑧.









Aufgaben

1. Zeichne eine Strecke [AB] mit der Länge a = 9 und konstruiere die Strecke [AC] mit
   a) $\overline{AC} = \frac{3}{4}a$ **b)** $\overline{AC} = \frac{2}{5}a$ **c)** $\overline{AC} = \frac{3}{7}a$
   d) $\overline{AC} = \frac{11}{9}a$ **e)** $\overline{AC} = 1{,}4\,a$.

2. Zeichne die Strecke [AB] mit A(1 | 1) und B(8 | 1). In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [AB]?
   a) T(2,5 | 1) **b)** T(7 | 1) **c)** T(3 | 2)

3. Zeichne die Strecke [AB] mit A(1 | 2) und B(10 | 6,5).
   Konstruiere den Teilpunkt T und gib seine Koordinaten an.
   a) T teilt [AB] im Verhältnis 1:2
   b) T teilt [AB] im Verhältnis 3,5:1
   c) T teilt [BA] im Verhältnis 8:1

4. Gegeben ist eine Strecke [AB]. Konstruiere jeweils den Teilpunkt T auf [AB] und berechne $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$.
   a) $\overline{AB} = 5,\ \tau = \frac{7}{3}$ **b)** $\overline{AB} = 5,\ \tau = \frac{3}{7}$
   c) $\overline{AB} = 10,\ \tau = 0{,}8$ **d)** $\overline{AB} = 9,\ \tau = 1{,}2$

5. Berechne $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$, wenn T die Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 11$ im Verhältnis
   a) 5:7 **b)** 1:13 teilt.

6. Zeichne das Dreieck ABC mit A(2 | 1), B(9,5 | 3,5) und C(5,5 | 9,5). Konstruiere Punkt T auf dem Dreieck und gib seine Koordinaten an:
   a) AT zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, deren Flächen sich verhalten wie 3:1.
   b) CT zerlegt das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke, deren Flächen sich verhalten wie 3:2.

7. In einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Umfang u = 17 verhalten sich die Schenkel zur Basis wie 2:1.
   Konstruiere das Dreieck.

8. Das Dreieck ABC hat den Umfang u = 16.
   Konstruiere das Dreieck, wenn a : b : c = 5 : 6 : 7 ist. (Diese Schreibweise für a : b = 5 : 6 und b : c = 6 : 7 und a : c = 5 : 7.)

9. Zeichne ein Rechteck mit $\overline{AB} = 7$ und $\overline{AD} = 5$.
   a) Konstruiere das Viereck A′B′C′D′ mit $\overline{A'B'} = \frac{4}{5}\overline{AB}$ und $\overline{A'D'} = \frac{2}{3}\overline{AD}$.
   b) Wie verhalten sich die Flächeninhalte?

10. Geobold schlägt ein Verfahren vor, wie man Winkel halbieren, dritteln, vierteln usw. kann. Er zeichnet um den Scheitel einen Kreis und halbiert, drittelt, viertelt usw. die Sehne, die der Winkel aus dem Kreis ausschneidet.
    Halbiere, drittle und viertle einen 120°-Winkel nach Geobolds Vorschlag und miß die Teilwinkel.

•11. Zeichne das Rechteck BERN mit B(3|0), E(0|0), R(0|−5) und zerlege es von R aus in
a) drei **b)** vier **c)** fünf flächengleiche Teile.

•12. Zeichne das Viereck ROMA mit R(0|11), O(0|0), M(8,5|−1) und A(6|9) und zerlege es von O aus in
a) drei flächengleiche Teile
b) in zwei Flächenstücke, deren Inhalte sich verhalten wie 2:7 (zwei Möglichkeiten).

2.2 Innere und äußere Teilung

Für einen Punkt T auf [PQ], der [PQ] im Verhältnis $\tau = 2{:}1$ teilt, gilt $\overline{PT} : \overline{TQ} = 2 : 1$.

Wenn wir nur fordern, daß T auf der Gerade PQ liegt, dann gibt es noch einen zweiten Punkt T*, der die Gleichung $\overline{PT^*} : \overline{T^*Q} = 2 : 1$ erfüllt. Weil T* nicht auf der Strecke [PQ] liegt, teilt er sie unserm Gefühl nach auch nicht. Aber die Mathematiker erweitern den Begriff »Teilung einer Strecke« so, daß er auch für solche Fälle gilt: Man nennt T* äußeren Teilpunkt und ordnet ihm das Teilverhältnis $\tau = -2$ zu. Um T und T* deutlicher zu unterscheiden, bezeichnet man T als inneren Teilpunkt; für T ist $\tau = +2$.

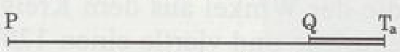
Definition:

> Der Punkt $T_i \neq Q$ auf [PQ] **teilt** die Strecke [PQ] **innen** im Verhältnis $\tau = \overline{PT_i} : \overline{T_iQ}$ $(\tau \geqq 0)$.
> Der Punkt $T_a \neq Q$ auf PQ (außerhalb [PQ] **teilt** die Strecke [PQ] **außen** im Verhältnis $|\tau|$ mit $\tau = -\overline{PT_a} : \overline{T_aQ}$ $(\tau < 0)$.

innere Teilung von [PQ]

$\tau = \overline{PT_i} : \overline{T_iQ}$ $\boxed{\tau \geq 0}$

äußere Teilung von [PQ]



$\tau = -\overline{PT_a} : \overline{T_aQ}$ $\boxed{\tau < 0}$