Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

2.2 Innere und äußere Teilung

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

•11. Zeichne das Rechteck BERN mit B(3|0), E(0|0), R(0|−5) und zerlege es von R aus in

a) drei **b)** vier **c)** fünf flächengleiche Teile.

•12. Zeichne das Viereck ROMA mit R(0|11), O(0|0), M(8,5|−1) und A(6|9) und zerlege es von O aus in

a) drei flächengleiche Teile

b) in zwei Flächenstücke, deren Inhalte sich verhalten wie 2:7 (zwei Möglichkeiten).

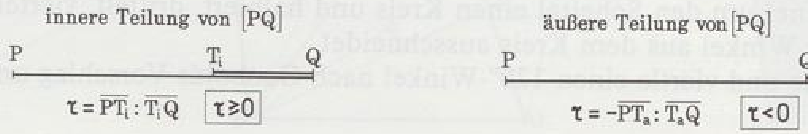
2.2 Innere und äußere Teilung

Für einen Punkt T auf [PQ], der [PQ] im Verhältnis $\tau = 2{:}1$ teilt, gilt $\overline{PT} : \overline{TQ} = 2:1$.

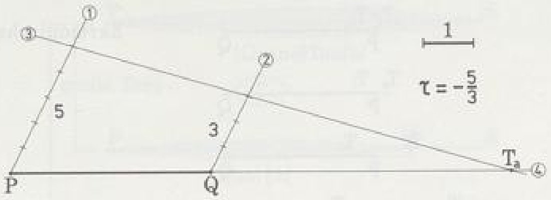
Wenn wir nur fordern, daß T auf der Gerade PQ liegt, dann gibt es noch einen zweiten Punkt T*, der die Gleichung $\overline{PT^*} : \overline{T^*Q} = 2:1$ erfüllt. Weil T* nicht auf der Strecke [PQ] liegt, teilt er sie unserm Gefühl nach auch nicht. Aber die Mathematiker erweitern den Begriff »Teilung einer Strecke« so, daß er auch für solche Fälle gilt: Man nennt T* äußeren Teilpunkt und ordnet ihm das Teilverhältnis $\tau = -2$ zu. Um T und T* deutlicher zu unterscheiden, bezeichnet man T als inneren Teilpunkt; für T ist $\tau = +2$.

Definition:

Der Punkt $T_i \neq Q$ auf [PQ] **teilt** die Strecke [PQ] **innen** im Verhältnis $\tau = \overline{PT_i} : \overline{T_iQ}$ $(\tau \geqq 0)$. Der Punkt $T_a \neq Q$ auf PQ (außerhalb [PQ] **teilt** die Strecke [PQ] **außen** im Verhältnis $\lvert\tau\rvert$ mit $\tau = -\overline{PT_a} : \overline{T_aQ}$ $(\tau < 0)$.



Den äußeren Teilpunkt konstruiert man mit der V-Figur. Ein Beispiel mit $\overline{PQ} = 4$ und $\tau = -5/3$ sehen wir im Bild. Wieder überprüfen wir die Zeichengenauigkeit. Wir berechnen die Streckenlängen $\overline{PT_a}$ und $\overline{T_aQ}$. Nennen wir $\overline{T_aQ} = x$, dann ist $\overline{PT_a} = x + 4$.



Strahlensatz: $\dfrac{x+4}{x} = \dfrac{5}{3}$ $\|$ kreuzweise multiplizieren

$$3x + 12 = 5x$$
$$12 = 2x, \quad \text{also} \quad x = 6.$$

Es ergibt sich $\overline{T_aQ} = 6$ und $\overline{PT_a} = 10$.

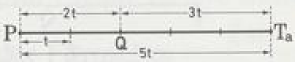
Einfacher geht's wieder mit folgender Überlegung:

Setzen wir $\overline{PT_a} = 5t$ und $\overline{T_aQ} = 3t$, dann ist $\overline{PQ} = 2t$

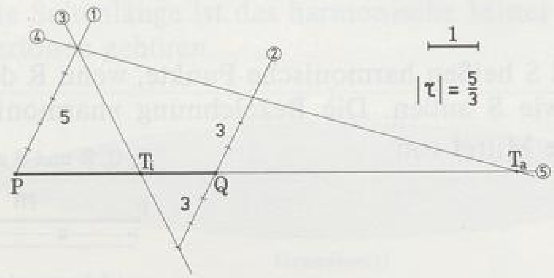
$$4 = 2t, \text{ also } t = 2,$$

und es gilt $\overline{PT_a} = 5t = 5 \cdot 2 = 10$

$\overline{T_aQ} = 3t = 3 \cdot 2 = 6$



Wenn T_i und T_a die Strecke [PQ] innen und außen im selben Verhältnis teilen, sagt man: T_i und T_a teilen die Strecke [PQ] **harmonisch.** Dann gilt $\dfrac{\overline{PT_i}}{\overline{T_iQ}} = \dfrac{\overline{PT_a}}{\overline{T_aQ}} = |\tau|$



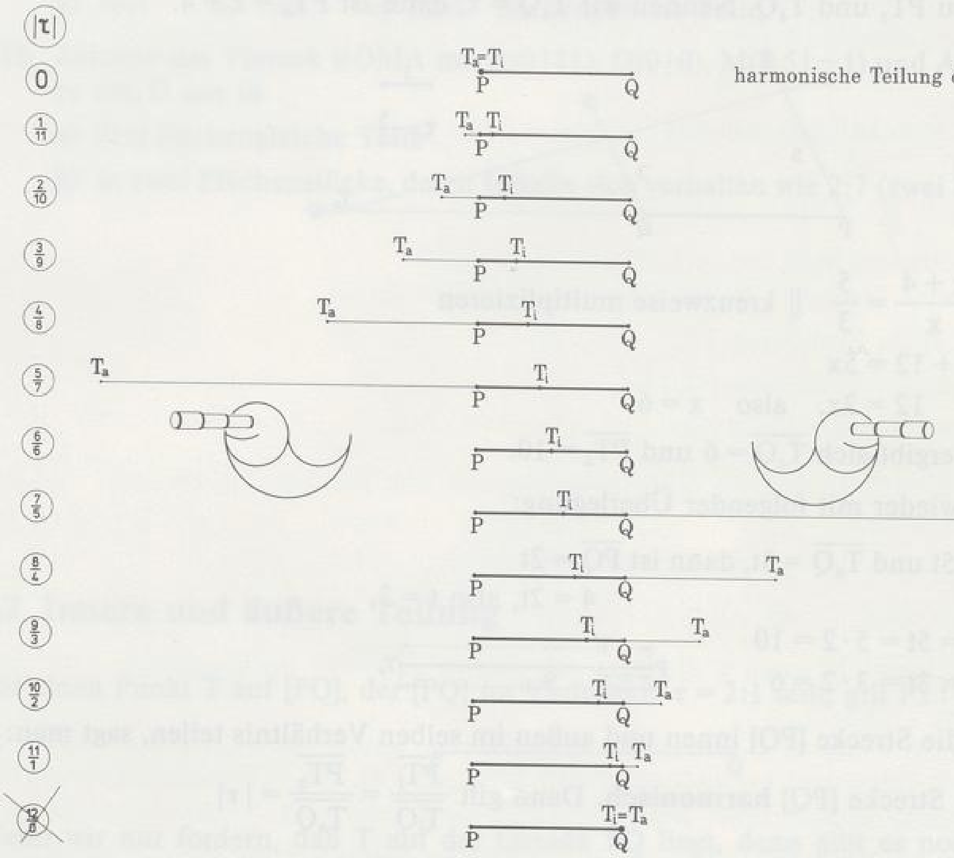
Durch eine einfache Umformung ergibt sich aus $\dfrac{\overline{PT_i}}{\overline{T_iQ}} = \dfrac{\overline{PT_a}}{\overline{T_aQ}} \;\Big\|\; \cdot \dfrac{\overline{T_iQ}}{\overline{PT_a}}$ die Gleichung

$\dfrac{\overline{PT_i}}{\overline{PT_a}} = \dfrac{\overline{T_iQ}}{\overline{T_aQ}}$ beziehungsweise $\dfrac{\overline{T_iP}}{\overline{PT_a}} = \dfrac{\overline{T_iQ}}{\overline{QT_a}}$

Q und P teilen $[T_iT_a]$ harmonisch $\boxed{\overline{T_iQ}:\overline{QT_a} = \overline{T_iP}:\overline{PT_a}}$

T_i und T_a teilen [PQ] harmonisch $\boxed{\overline{PT_i}:\overline{T_iQ} = \overline{PT_a}:\overline{T_aQ}}$

Die letzte Gleichung bedeutet aber: P und Q teilen die Strecke $[T_iT_a]$ außen und innen im Verhältnis $|\tau'|$, also harmonisch. Dabei gilt $\tau' \neq \tau$.



harmonische Teilung der Strecke [PQ]

Vier Punkte P, Q, R und S heißen harmonische Punkte, wenn R die Strecke [PQ] innen im selben Verhältnis teilt wie S außen. Die Bezeichnung »harmonisch« kommt daher, daß $\overline{PQ} = m$ das harmonische Mittel von $\overline{PR} = a$ und $\overline{PS} = b$ ist.

P, Q, R und S sind harmonische Punkte

m ist harmonisches Mittel von a und b

$$\boxed{m = \frac{2ab}{a+b}}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

Beweis: $\dfrac{a}{m-a} = \dfrac{b}{b-m}$ $\|$ kreuzweise multiplizieren

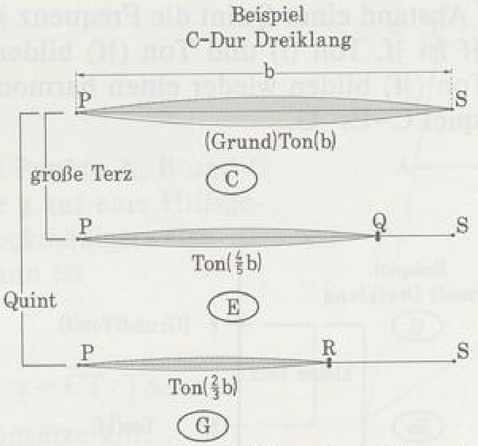
$$ab - am = bm - ab$$

$$2ab = m(a+b) \quad \| : (a+b)$$

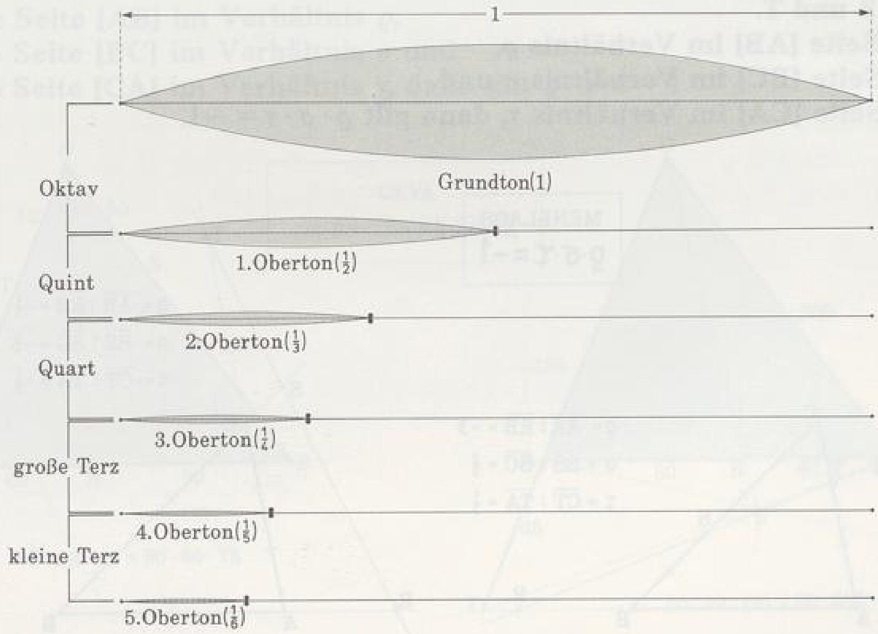
$\dfrac{2ab}{a+b} = m$, bildet man den Kehrwert, so ergibt sich

$$\frac{1}{m} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{2}$$

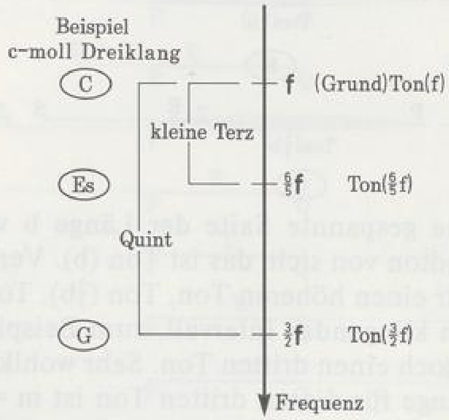
** Was ist eigentlich so harmonisch am harmonischen Mittel?*



Stellen wir uns unter [PS] eine gespannte Saite der Länge b vor. Reißen wir sie an, so schwingt sie und gibt den Grundton von sich, das ist Ton (b). Verkürzen wir den schwingenden Teil auf $a = \frac{2}{3}b$, so hören wir einen höheren Ton, Ton ($\frac{2}{3}$b). Ton (b) und Ton ($\frac{2}{3}$b) bestimmen eine Quint, ein angenehm klingendes Intervall, zum Beispiel die Töne C und G. Für einen Dreiklang brauchen wir noch einen dritten Ton. Sehr wohlklingend (= harmonisch) ist der Durdreiklang. Die Saitenlänge für diesen dritten Ton ist $m = \frac{4}{5}b$. Ton (b) und Ton ($\frac{4}{5}$b) bestimmen eine große Terz, zum Beispiel C und E. Die Saitenlänge m für diesen mittleren harmonischen Ton errechnet sich aus der Formel $m = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}b \cdot b}{b+b} = \frac{4b}{2+3} = \frac{4}{5}b$. Weil die Formel einen (musikalisch harmonischen) Mittelwert liefert, nennt man den Mittelwert harmonisches Mittel. $\frac{4}{5}$ ist das harmonische Mittel von 1 und $\frac{2}{3}$.
Das harmonische Mittel taucht auch bei den Obertönen auf. Die Obertöne eines Grundtons ergeben sich durch Halbieren, Dritteln, Vierteln usw. ein und derselben Saite. Jede zu einem Oberton gehörende Saitenlänge ist das harmonische Mittel der Saitenlängen, die zu den beiden Nachbar-Obertönen gehören.



Ein Maß für die Höhe eines Tons ist seine Frequenz f. Hat der Grundton die Frequenz f, das ist Ton (f), so hat der Ton im Abstand einer Quint die Frequenz $\frac{3}{2}$f, das ist Ton ($\frac{3}{2}$f). Das harmonische Mittel von f und $\frac{3}{2}$f ist $\frac{6}{5}$f. Ton (f) und Ton ($\frac{6}{5}$f) bilden das Intervall der kleinen Terz. Ton (f), Ton ($\frac{6}{5}$f) und Ton ($\frac{3}{2}$f) bilden wieder einen harmonischen Dreiklang, diesmal den Molldreiklang, zum Beispiel C–Es–G.



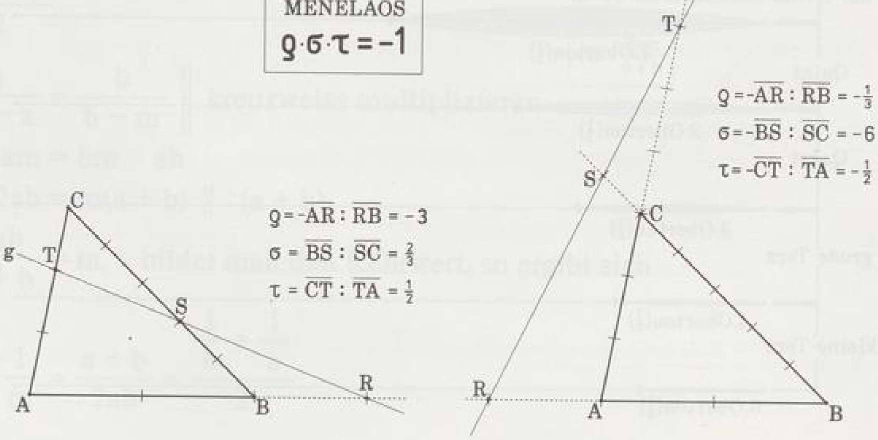
Übrigens läßt sich der mittlere Ton beim Molldreiklang auch noch anders erzeugen: man wählt für den mittleren Ton das arithmetische Mittel der Saitenlängen, die zu den beiden andern Tönen gehören.

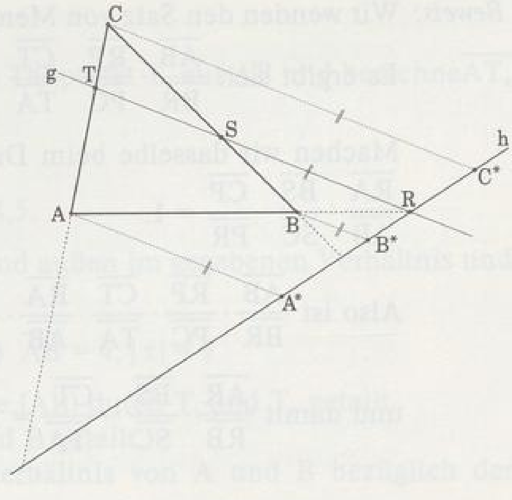
* Zwei verblüffende Eigenschaften von Teilverhältnissen am Dreieck

1. Der Satz von Menelaos (Alexandria, um 100 n. Chr.)

Eine Gerade g schneide die Seiten eines Dreiecks bzw. deren Verlängerungen in den Punkten R, S und T.
Teilt R die Seite [AB] im Verhältnis ϱ,
S die Seite [BC] im Verhältnis σ und
T die Seite [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -1$.

MENELAOS
$\boxed{\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -1}$





Beweis: Wir projizieren die Punkte A, B und C parallel zur Gerade g auf eine Hilfsgerade h (die wir zweckmäßigerweise durch R legen). Dann ist

$\varrho = -\overline{AR} : \overline{RB}$,

$\sigma = BS : SC$ und $\tau = CT : TA$.

Wegen der Strahlensätze gilt:

$\overline{AR} : \overline{RB} = \overline{A^*R} : \overline{RB^*}$, $\overline{BS} : \overline{SC} = \overline{B^*R} : \overline{RC^*}$ und $\overline{CT} : \overline{TA} = \overline{C^*R} : \overline{RA^*}$.

Dann ist

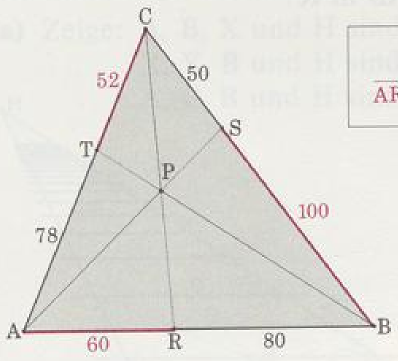
$$\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -\frac{\overline{A^*R}}{\overline{RB^*}} \cdot \frac{\overline{B^*R}}{\overline{RC^*}} \cdot \frac{\overline{C^*R}}{\overline{RA^*}} = -1 \quad \text{q. e. d.}$$

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung: Wählt man R auf AB, S auf BC und T auf CA, so daß $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = -1$ ist, dann liegen R, S und T auf einer Gerade.

Beweis: RS und AC schneiden sich in T'. Nach MENELAOS gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau' = -1$, folglich ist $\tau' = \tau$ und deshalb T' = T, q. e. d.

2. Der Satz von Ceva (GIOVANNI CEVA, Mantua, 1647 bis 1734)

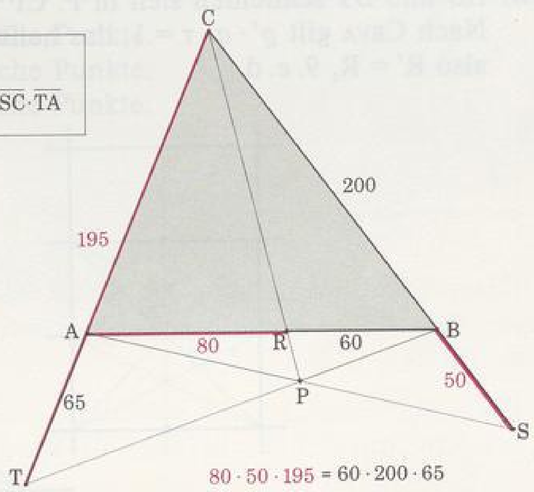
Irgendein Punkt P sei mit den Ecken A, B und C eines Dreiecks verbunden. AP schneide BC in S, BP schneide AC in T, und CP schneide AB in R.
Teilt R die Seite [AB] im Verhältnis ϱ,
S die Seite [BC] im Verhältnis σ und
T die Seite [CA] im Verhältnis τ, dann gilt $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1$.



$60 \cdot 100 \cdot 52 = 80 \cdot 50 \cdot 78$

CEVA

$\overline{AR} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CT} = \overline{RB} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{TA}$



$80 \cdot 50 \cdot 195 = 60 \cdot 200 \cdot 65$

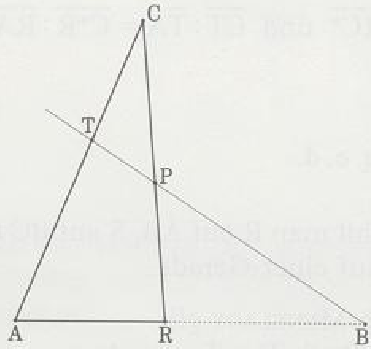
Beweis: Wir wenden den Satz von Menelaos aufs Dreieck ARC mit der Schnittgerade TP an.

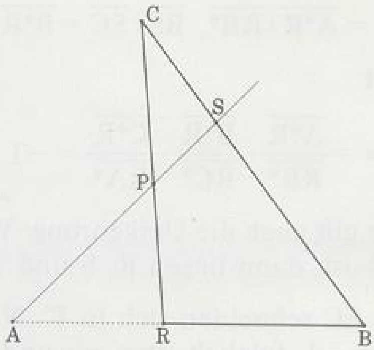
Es ergibt sich $\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} = 1.$

Machen wir dasselbe beim Dreieck RBC mit der Schnittgerade SP, so ergibt sich $\frac{\overline{RA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PR}} = 1.$

Also ist $\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PR}} = 1 \cdot 1$

und damit $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{CT}}{\overline{TA}} = 1,$ also $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1.$





Der Satz gilt auch dann, wenn P außerhalb des Dreiecks liegt.
Besonders einprägsam ist die Deutung dieses Satzes in der Produktform:
$\overline{AR} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CT} = \overline{RB} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{TA}.$

Auch hier gilt die Umkehrung: Wählt man R auf AB, S auf BC und T auf CA, so daß $\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = 1$ ist, so schneiden sich die Geraden CR, AS und BT in einem Punkt oder sie sind parallel.

Beweis: AS und BT schneiden sich in P. CP schneide AB in R′.
Nach Ceva gilt $\varrho' \cdot \sigma \cdot \tau = 1$, das heißt $\varrho' = \varrho$,
also R′ = R, 9. e. d.

Aufgaben

1. Gegeben ist eine Strecke [AB]. Konstruiere den Teilpunkt T_a auf AB und berechne $\overline{AT_a}$ und $\overline{T_aB}$.

   a) $\overline{AB} = 5$, $\tau = -1{,}5$ **b)** $\overline{AB} = 7$, $\tau = -\frac{2}{5}$
   c) $\overline{AB} = 2{,}5$, $\tau = -0{,}8$ **d)** $\overline{AB} = 3{,}5$, $\tau = -4{,}5$.

2. Gegeben ist die Strecke [AB]. Teile sie innen und außen im gegebenen Verhältnis und berechne $\overline{AT_i}$, $\overline{T_iB}$, $\overline{AT_a}$ und $\overline{T_aB}$.

   a) $\overline{AB} = 6$, $|\tau| = \frac{1}{3}$ **b)** $\overline{AB} = 7$, $|\tau| = \frac{7}{3}$ **c)** $\overline{AB} = 4$, $|\tau| = \frac{3}{5}$

3. Bei den Beispielen in Aufgabe **2** ist die Strecke [AB] durch T_i und T_a geteilt. Umgekehrt wird die Strecke $[T_iT_a]$ durch A und B geteilt.
   Berechne für **a)**, **b)** und **c)** jeweils das Teilverhältnis von A und B bezüglich der Strecke $[T_iT_a]$.

• 4. Zeichne ein Dreieck ABC. P teilt [AB] innen im Verhältnis 2:1. Konstruiere Q auf AC so, daß CB die Strecke [PQ] halbiert. In welchem Verhältnis teilt Q die Strecke [AC]?

• 5. Die inneren und äußeren gemeinsamen Tangenten zweier Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 schneiden M_1M_2 in T bzw. in S.
   Zeige: M_1, M_2, T und S sind harmonische Punkte.

6. Teile die Strecke [AB] mit $\overline{AB} = 6$ harmonisch im Verhältnis

   a) 1:3 **b)** 5:1 Berechne jeweils $\overline{AT_i}$ und $\overline{AT_a}$.

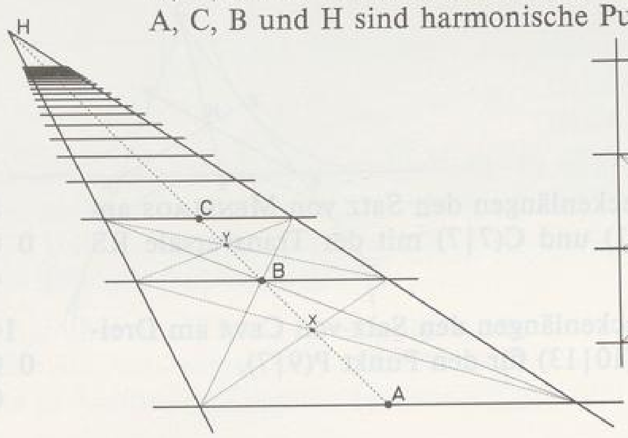
• 7. Die Strecke [AB] wird innen von P und außen von Q harmonisch im Verhältnis $|\tau|$ geteilt. Dann teilen A und B die Strecke [PQ] auch harmonisch, aber im Verhältnis $|\tau'|$.
   Berechne τ' in Abhängigkeit von τ.

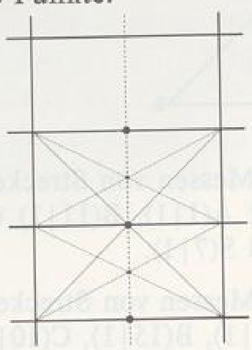
8. $X(x|0)$ und $T(t|0)$ teilen [AB] mit $A(-3|0)$ und $B(3|0)$ harmonisch.

   a) Konstruiere T für $x = -2$, $x = -1$ und $x = 1{,}5$.
   b) Berechne t allgemein in Abhängigkeit von x.

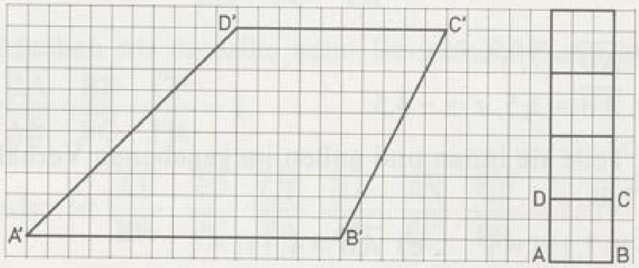
: 9. PERSPEKTIVE
   Das Bild zeigt, wie man ein Gleis, eine Leiter oder einen Zaun perspektivisch darstellt.

   a) Zeige: A, B, X und H sind harmonische Punkte.
   X, Y, B und H sind harmonische Punkte.
   A, C, B und H sind harmonische Punkte.

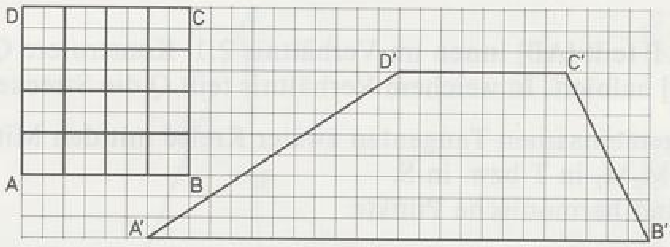




b) Zeichne das Trapez A′B′C′D′ ab und konstruiere das perspektive Bild eines Wegs mit mindestens vier quadratischen Platten.

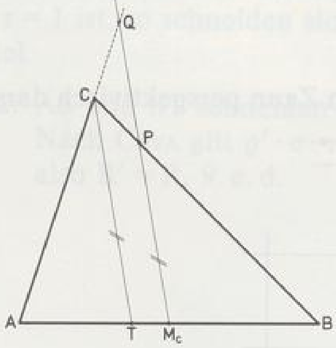


c) Zeichne das Trapez A′B′C′D′ ab und fülle es so aus, daß das perspektive Bild des quadratischen Gitters ABCD entsteht.



10. Eine Saite ist 60 cm lang. Zupft man sie, dann hört man ihren Grundton. Berechne und konstruiere die Saitenlänge der Töne, die mit dem Grundton eine Quint bzw. eine große Terz bilden.

11. Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt T auf c. Die Parallele zu CT durch M_c schneidet eine Seite in P und die Verlängerung der andern Seite in Q.
Zeige: $\overline{CT}$ ist das harmonische Mittel von $\overline{PM_c}$ und $\overline{QM_c}$.



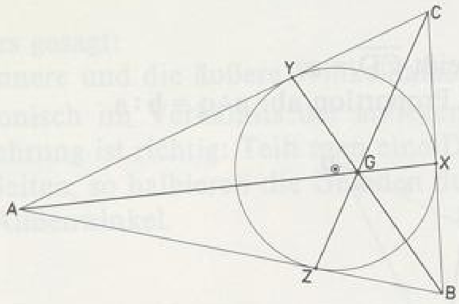
12. Überprüfe durch Messen von Streckenlängen den Satz von MENELAOS am 8
Dreieck ABC mit A(1|1), B(11|1) und C(7|7) mit der Transversale RS 0 0 14
durch R(3|3) und S(7|1). 4

13. Überprüfe durch Messen von Streckenlängen den Satz von CEVA am Drei- 14
eck ABC mit A(1|1), B(15|1), C(10|13) für den Punkt P(9|7). 0 0 16
0

14. Beweise mit dem Satz von CEVA:
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

15. Zeichne ein Dreieck ABC. Wähle E auf [AC] und D auf [BC] so, daß $\overline{AE} = kb$ und $\overline{BD} = ka$ ist. Zeige mit dem Satz von CEVA:
AD, BE und s_c treffen sich in einem Punkt.

•16. GERGONNE-PUNKT (nach dem französischen Mathematiker Joseph Diaz GERGONNE 1771 bis 1859).
Der Inkreis eines Dreiecks berührt die Seiten in X, Y und Z.
Beweise mit dem Satz von CEVA:
AX, BY und CZ treffen sich in einem Punkt G.
G heißt Gergonne-Punkt des Dreiecks.
(*Tip:* gleich lange Tangentenabschnitte!)



•17. NAGEL-PUNKT (1836 gefunden von dem deutschen Mathematiker Heinrich von NAGEL)
Die Ankreise eines Dreiecks berühren die Seiten in X, Y und Z.
Beweise mit dem Satz von CEVA:
AX, BY und CZ treffen sich in einem Punkt N.
N heißt Nagel-Punkt des Dreiecks.
(*Tip:* gleich lange Tangentenabschnitte!)