# Anschauliche Geometrie

**Barth, Friedrich**

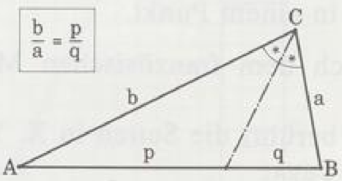
**München, 1995**

2.3 Der Apollonioskreis

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

## * 2.3 Der Apollonioskreis

Jede Winkelhalbierende im Dreieck hat eine überraschende Eigenschaft: sie teilt eine Seite des Dreiecks im Verhältnis der beiden andern.

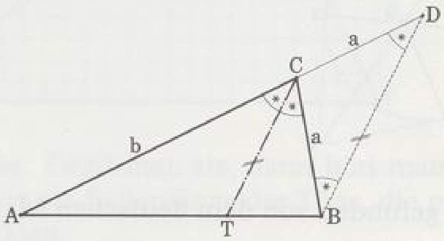



Man sieht das leicht ein, wenn man die Figur zu einer V-Figur ausbaut:

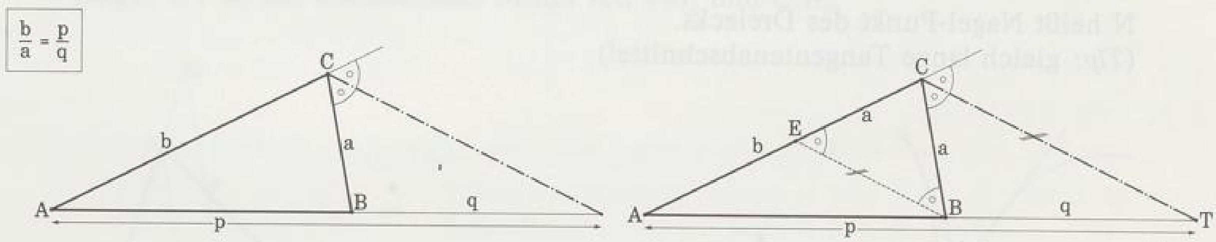
Die Parallele zur Winkelhalbierenden von $\gamma$ schneidet AC in D.

Es gilt $\sphericalangle$ TCB = $\sphericalangle$ CBD (Z-Winkel),
$\sphericalangle$ ACT = $\sphericalangle$ CDB (F-Winkel).

Also ist das Dreieck CBD gleichschenklig, das heißt $\overline{CD} = a$.
In der V-Figur ATBDC lesen wir die behauptete Proportion ab: $p : q = b : a$.




Die Außenwinkelhalbierende hat eine ähnliche Eigenschaft, so gilt zum Beispiel (Bild!) $b : a = p : q$. Wieder machen wir uns das an einer V-Figur klar:




Die Parallele zur Außenwinkelhalbierenden von $\gamma$ schneidet AC in E.

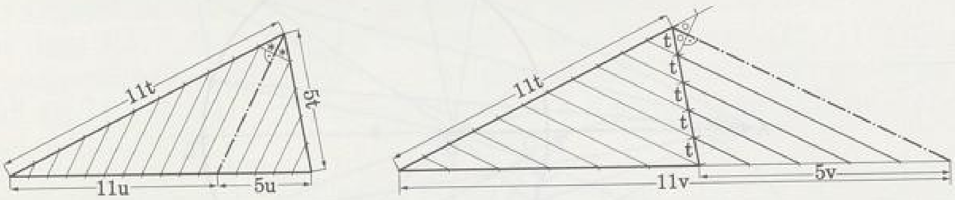
Es gilt $\sphericalangle$ EBC = $\sphericalangle$ BCT (Z-Winkel)
$\sphericalangle$ CEB = $\sphericalangle$ (AC, CT) (F-Winkel)

Also ist das Dreieck EBC gleichschenklig, das heißt $\overline{EC} = a$.
In der V-Figur ABTCE lesen wir die Behauptung ab:

$b : a = p : q$.

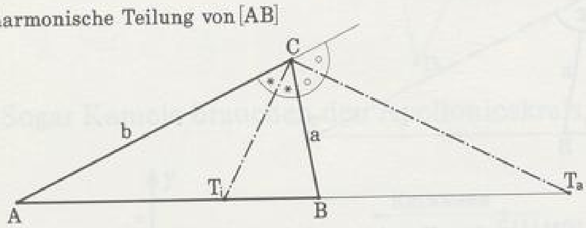
Wir fassen zusammen:

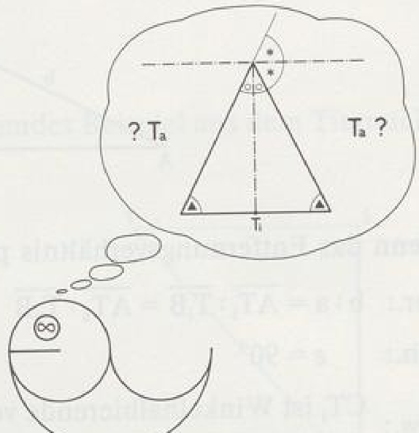
**Satz:**
**Jede Winkelhalbierende im Dreieck teilt die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten.**
**Jede Winkelhalbierende eines Außenwinkels am Dreieck teilt die Gegenseite außen im Verhältnis der anliegenden Seiten. (Ausnahme: gleichschenkliges Dreieck)**

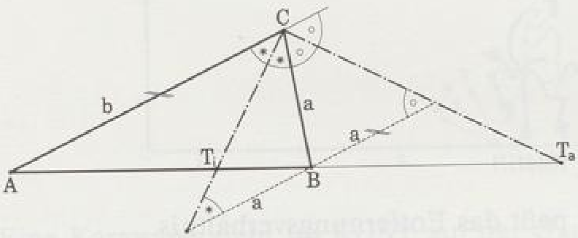



Anders gesagt:
Die innere und die äußere Winkelhalbierende eines Dreieckswinkels teilen die Gegenseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten: $\overline{AT_i} : \overline{T_iB} = b : a = \overline{AT_a} : \overline{T_aB}$. Auch die Umkehrung ist richtig: Teilt man eine Dreieckseite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten, so halbieren die Geraden durch die Teilpunkte und die Gegenecke den Innen- und Außenwinkel.

harmonische Teilung von [AB]



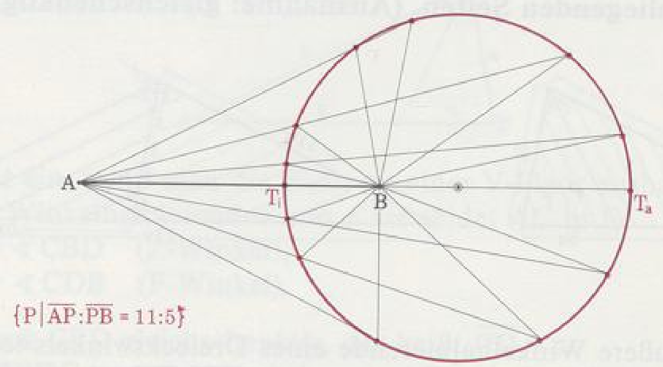



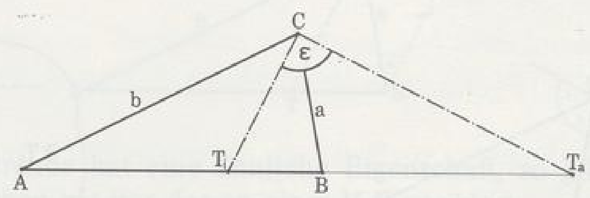

*Beweis:* Man teilt [AB] innen und außen im Verhältnis b:a und verwendet die Dreieckseite b gleich als Hilfslinie. Es entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke mit den Schenkeln a. Aus der Gleichheit der Basiswinkel und aus dem Satz über die Z-Winkel folgt die Behauptung.

Der Satz über die Winkelhalbierenden eines Dreiecks ist die Grundlage für einen berühmten Satz der Antike. Um 200 v. Chr. hat der griechische Mathematiker und Astronom Apollonios in Alexandria folgende Entdeckung gemacht:

**Satz:**
**Der geometrische Ort der Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B ein festes Verhältnis b:a haben, ist der Kreis mit dem Durchmesser $[T_iT_a]$. $T_i$ und $T_a$ teilen [AB] harmonisch im Verhältnis b:a.**




APOLLONIOS zu Ehren heißt dieser Kreis Apollonioskreis.
Der Apollonioskreis ist nichts anderes als der Thaleskreis über $[T_iT_a]$. Weil er ein geometrischer Ort ist, müssen wir zwei Sätze beweisen:




① Wenn das Entfernungsverhältnis paßt, dann liegt der Punkt auf dem Kreis.

Vor.: $b : a = \overline{AT_i} : \overline{T_iB} = \overline{AT_a} : \overline{T_aB}$

Beh.: $\varepsilon = 90°$

Bew.: $\left.\begin{array}{l} CT_i \text{ ist Winkelhalbierende von } \gamma \\ CT_a \text{ ist Winkelhalbierende von } \gamma^* \end{array}\right\}$

also ist $CT_i \perp CT_a$, das heißt $\varepsilon = 90°$.

② Wenn der Punkt auf dem Kreis liegt, dann paßt das Entfernungsverhältnis.

Vor.: $\sphericalangle T_iCT_a = 90°$

Beh.: $b : a = \overline{AT_i} : \overline{T_iB}$

Bew.: Die Parallele zu CB durch A schneidet die Winkelhalbierenden in $D_1$ und $D_2$.

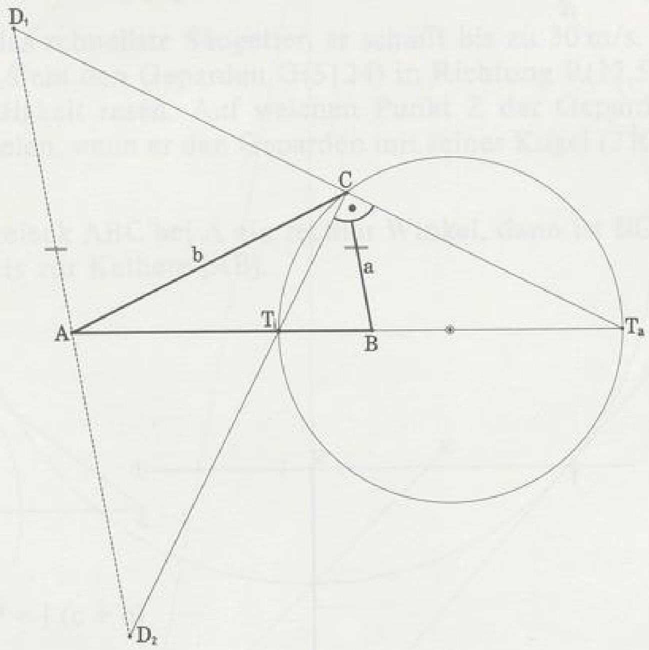
**a)** $\frac{\overline{AD_2}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AT_i}}{\overline{T_iB}} = \frac{\overline{AT_a}}{\overline{T_aB}} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{CB}}$

also ist A Mittelpunkt von $[D_1 D_2]$.

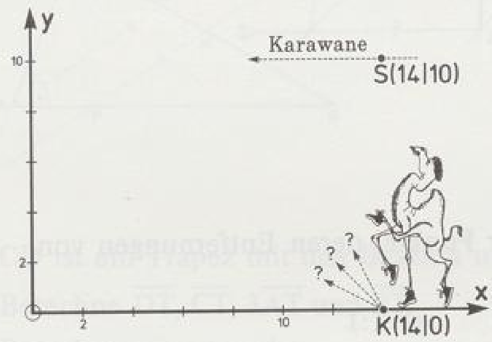
**b)** Weil das Dreieck $D_1 D_2 C$ bei C einen rechten Winkel hat, liegt C auf dem Thaleskreis über $[D_1 D_2]$. Wegen **a)** ist A Mittelpunkt dieses Kreises, das heißt

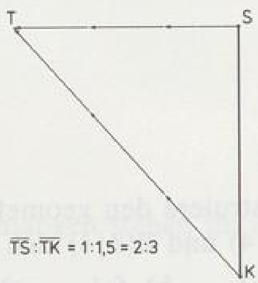
$\overline{AD_2} = \overline{AC}$ und damit

$\frac{b}{a} = \frac{\overline{AT_1}}{\overline{T_1B}}$, q. e. d.




Sogar Kamele brauchen den Apollonioskreis, wie folgendes Beispiel aus dem Tierreich lehrt:



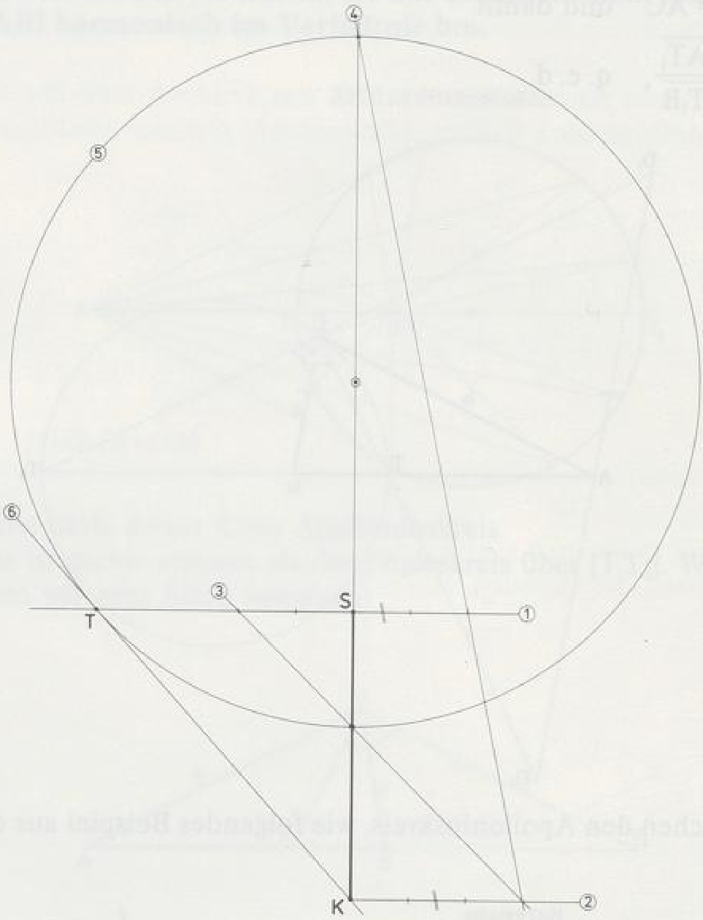




Eine Karawane zieht im KOSY auf der Gerade y = 10 nach links. Im Punkt K(14|0) steht ein einsames Kamel, das sich der Karawane anschließen will. Es sieht die Karawane im Punkt S(14|10). Welchen Punkt T der Karawanenbahn muß das Kamel ansteuern, um die Karawane zu treffen, wenn es eineinhalbmal so schnell läuft wie die Karawane und vorher Apollonios fragt?

Die Weglängen bis zum Treffpunkt T verhalten sich wie die Geschwindigkeiten, also wie 1:1,5. Deshalb liegt T

1) auf der Karawanenbahn und
2) auf dem Apollonioskreis zu [SK] zum Verhältnis 1:1,5.

Der Zeichnung entnimmt man, daß die Karawane eine Strecke der Länge 9 zurücklegt. Der exakte Wert der Streckenlänge ist aber $\sqrt{80}$. Wie man ihn berechnet, erfahren wir im **5.** Kapitel.



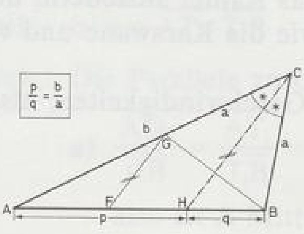

## Aufgaben

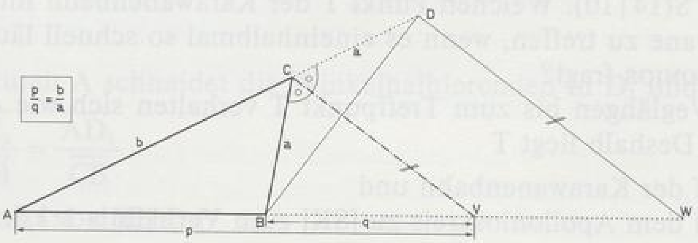
**1.** Konstruiere den geometrischen Ort der Punkte, deren Entfernungen von A(2 | 4) und B(8 | 4) sich verhalten wie 8

4 0 14

**a)** 2:1 **b)** 5:1 **c)** 1:2 **d)** 6:2 **e)** 1:1 0

• **2.** Beweise die Sätze über die Teilungs-Eigenschaften der inneren bzw. äußeren Winkelhalbierenden mit dem 1. Strahlensatz anhand der beiden Bilder.

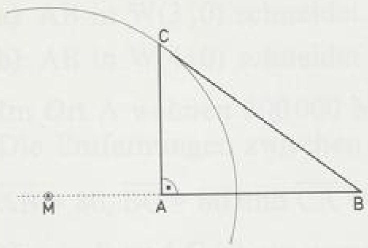


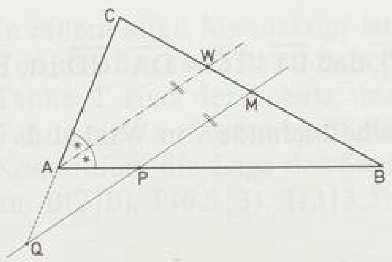
**3.** Zeichne die Strecke [AB] mit A(4 | 1), B(8 | 5) und dem Teilpunkt 13
T(6,5 | 3,5). 0 0 16
Von wo aus sieht man die Teilstrecke [AT] unter dem gleichen Winkel wie 0
[TB]?
Konstruiere die Menge dieser Punkte.
Falls du den Umfangswinkel-Satz kennst, konstruiere die Punkte, von denen aus man die Strecke [AB] unter 45° sieht.

• **4.** Der Gepard ist das schnellste Säugetier, er schafft bis zu 30 m/s. 28
Ein Jäger J(5 | 0) sieht den Geparden G(5 | 24) in Richtung R(12,5 | 18) mit 0 0 13
Höchstgeschwindigkeit rasen. Auf welchen Punkt Z der Geparden-Bahn 0
muß der Jäger zielen, wenn er den Geparden mit seiner Kugel (210 m/s) erlegen will?

**5.** Zeige: Ist im Dreieck ABC bei A ein rechter Winkel, dann ist BC Tangente am Apolloniuskreis zur Kathete [AB].



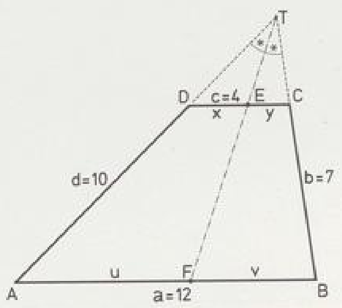

**6.** Zeige: $\overline{CQ} = \overline{BP} = \frac{1}{2}(c + b)$




**7.** ABCD ist ein Trapez mit den Basen a und c. Die Seitenlängen stehen im Bild.

**a)** Berechne $\overline{DT}$, $\overline{CT}$, $3\overline{AT}$ und $\overline{BT}$.

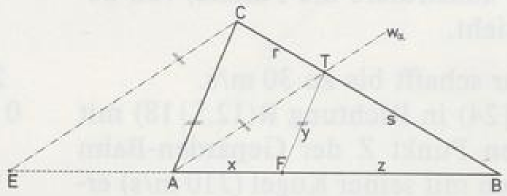
**b)** Berechne x, y, u und v.



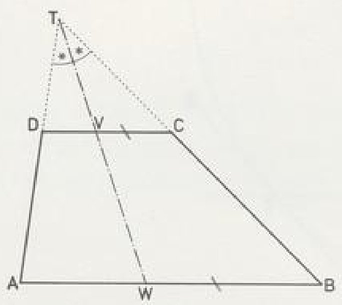
**8.** Bekannt sind die Seiten a, b und c eines Dreiecks ABC.
Bestimme aus a, b und c

**a)** die Teilstreckenlänge r und s

**b)** die Teilstreckenlängen x, y und z.

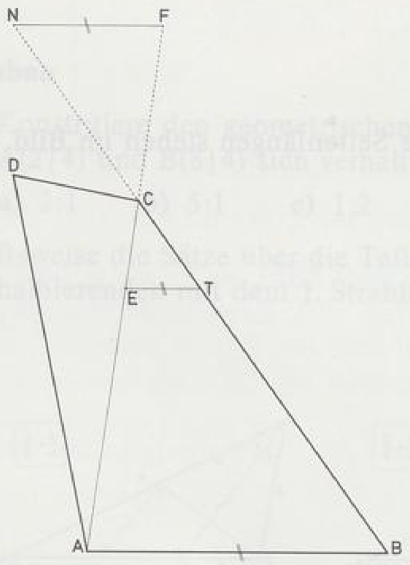



**9.** Zeige: $\overline{AW} : \overline{WB} = \overline{DV} : \overline{VC} = d : b$




**10.** Im Dreieck ABC liegt T so auf [AB], daß $\overline{AT} : \overline{TB} = b : a$ ist.
Begründe: CT halbiert $\gamma$

**•11.** ABCD ist ein beliebiges Viereck. T liegt so auf [BC], daß $\overline{BT} : \overline{TC} = \overline{DA} : \overline{CD}$ ist. B, T, C und N sind harmonische Punkte.
Zeige: DB und DF sind innere und äußere Winkelhalbierende von Winkel $\delta$.



**⁝12.** [AB] ist Durchmesser eines Kreises und [CD] eine dazu senkrechte Sehne. P sei ein beliebiger Kreispunkt. AP schneidet CD in E, BP schneidet CD in F.
Zeige: C, D, E und F sind harmonische Punkte.
(*Tip:* Umfangswinkelsatz!)

**13.** Konstruiere ein Dreieck ABC mit

**a)** $c = 5$, $b : a = 2 : 1$, $w_\gamma = 3{,}5$ **b)** $b = 6$, $a : c = 2 : 5$, $s_b = 4{,}5$

**c)** $a = 7$, $b : c = 1 : 3$, $h_a = 2$ **•d)** $b = 5$, $c : a = 2 : 1$, $h_a = 3$.

**14. a)** Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 6$, $b : a = 5 : 2$ und $h_c = 2{,}5$.
Wieviel verschiedene Lösungen gibt es?

**b)** Berechne, bei welcher Länge von $h_c$ nur eine Lösung existiert, falls $c = 6$ und $b : a = 5 : 2$ ist.

**15.** Vom Dreieck ABC sind bekannt $A(0|0)$ und $B(6|0)$.
Konstruiere das Dreieck, wenn $w_\gamma$

**a)** AB in $W(3|0)$ schneidet und die Länge 5 hat,

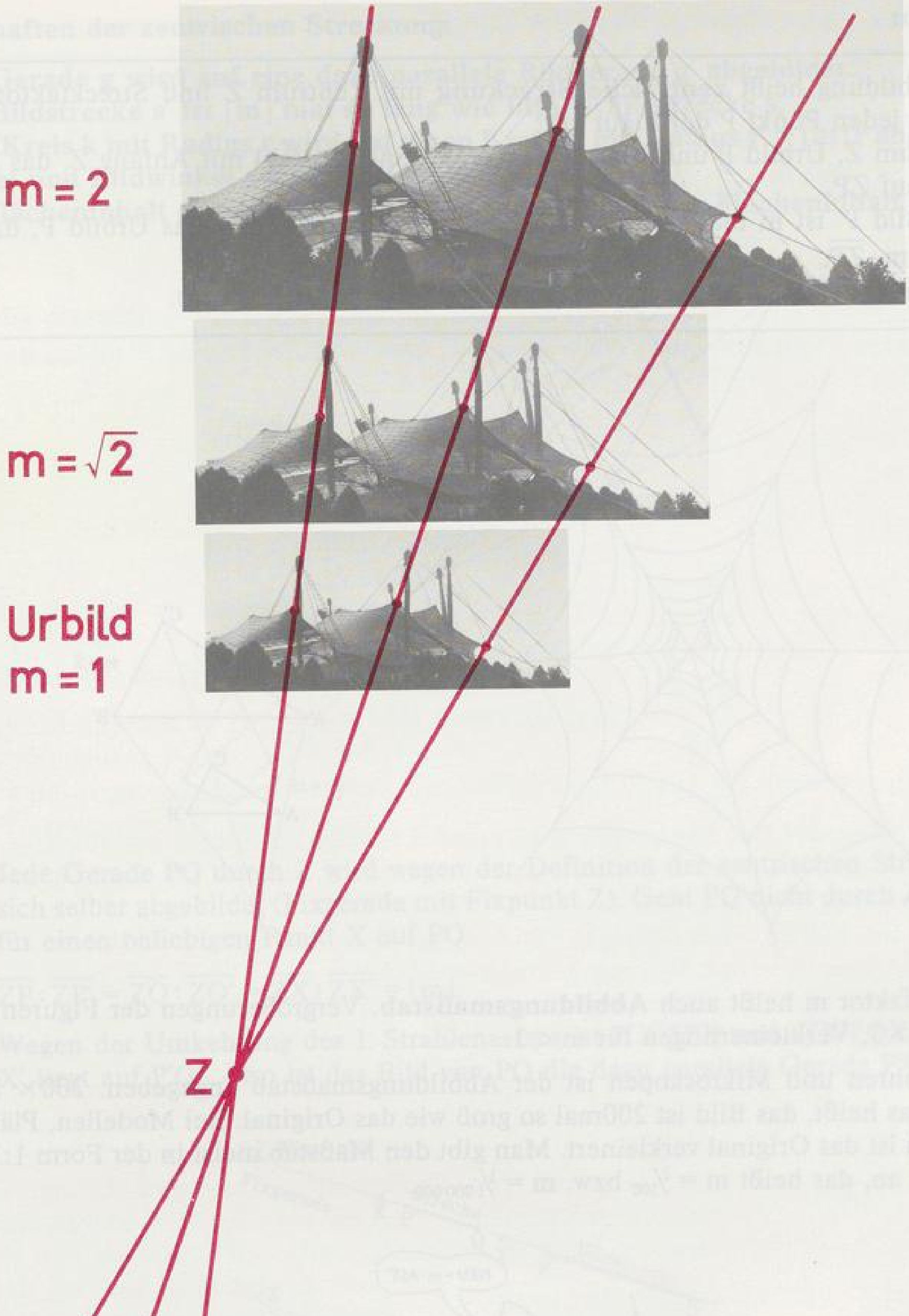
**b)** AB in $W(4|0)$ schneidet und die Länge 7 hat.

**⁝16.** Im Ort A wohnen 300 000 Menschen, im Ort B 100 000 und im Ort C 200 000.
Die Entfernungen zwischen den Orten sind in km:

$\overline{AB} = 80$, $\overline{BC} = 60$ und $\overline{CA} = 50$.

Für A, B und C ist ein gemeinsamer Flughafen geplant. Das Produkt von Einwohnerzahl und Entfernung vom Flughafen soll für jeden Ort gleich sein.
Wo muß der Flughafen gebaut werden?

**17.** In einem alten Manuskript ist die Lage eines Schatzes S beschrieben:
Von der Buche B ist es zum Schatz S doppelt so weit wie von der Eiche E. Von der Tanne T sind der Schatz und die Buche gleich weit entfernt. Der Schatz und die Tanne sind auf derselben Seite der Gerade BE.
Konstruiere die Lage des Schatzes und gib seine Koordinaten so genau wie möglich an. $B(2|0)$, $E(6{,}5|3)$, $T(3|3{,}5)$.





## 3.1 Grundlagen

Verschiedene Vergrößerungen ein und desselben Bilds lassen sich immer so anordnen, daß entsprechende Punkte auf Strahlen liegen, die alle von einem Punkt Z, dem Zentrum, ausgehen. Diesen Bildfolgen liegt eine geometrische Abbildung zugrunde, die zentrische Streckung.