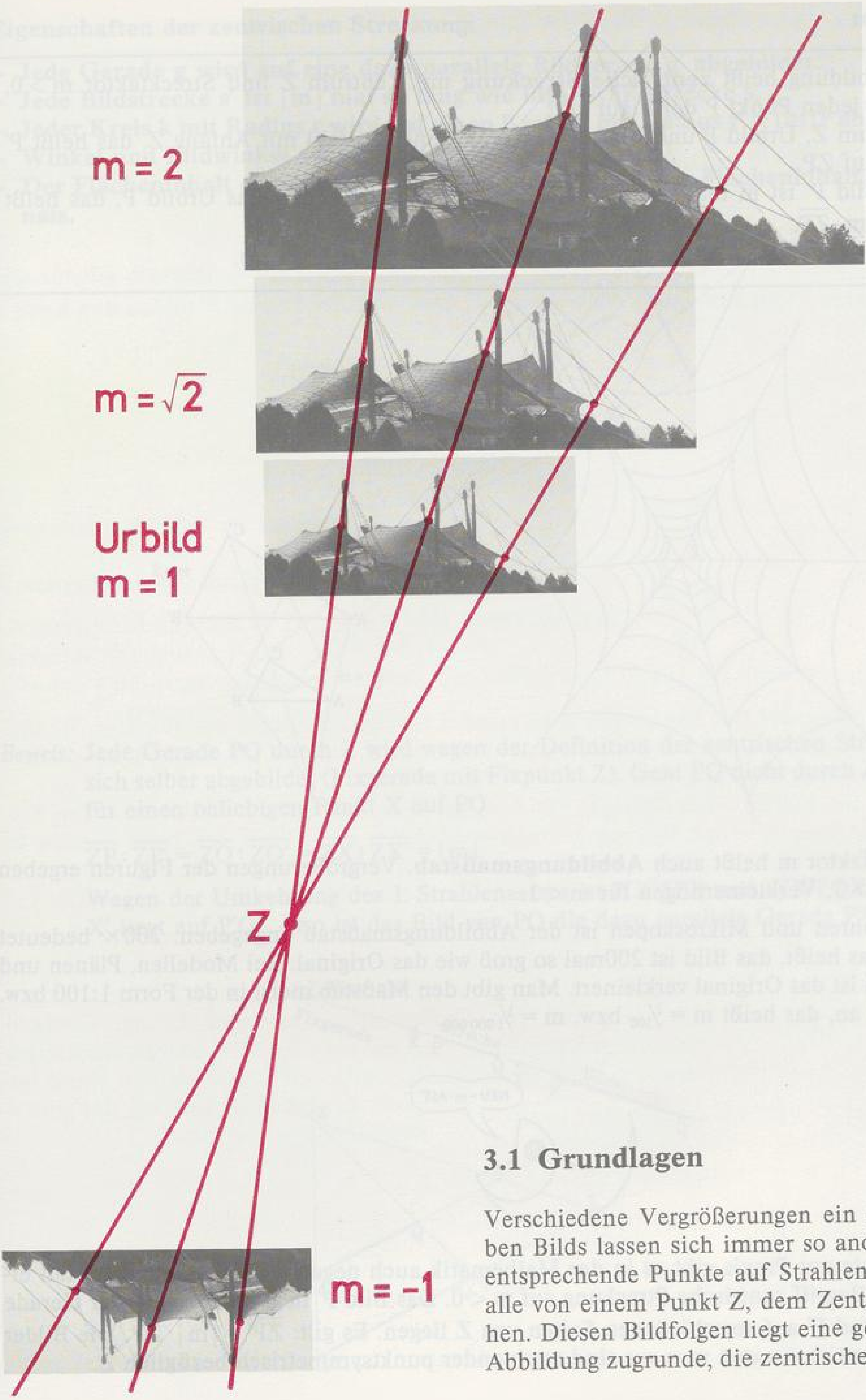
Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

3.1 Grundlagen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924



3.1 Grundlagen

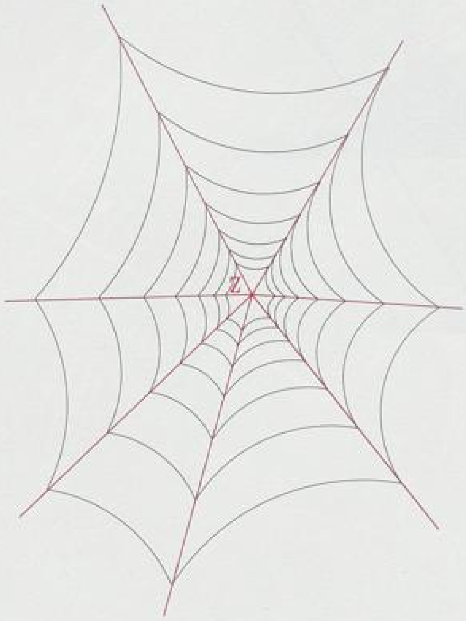
Verschiedene Vergrößerungen ein und desselben Bilds lassen sich immer so anordnen, daß entsprechende Punkte auf Strahlen liegen, die alle von einem Punkt Z, dem Zentrum, ausgehen. Diesen Bildfolgen liegt eine geometrische Abbildung zugrunde, die zentrische Streckung.

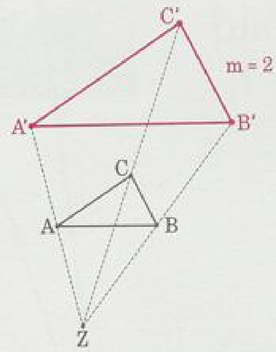
Definition:

Eine Abbildung heißt **zentrische Streckung** mit Zentrum Z und Streckfaktor $m > 0$, wenn für jeden Punkt P der Figur gilt:

1. Zentrum Z, Urbild P und Bild P′ liegen auf einem Strahl mit Anfang Z, das heißt P′ liegt auf ZP.
2. Das Bild P′ ist m mal so weit vom Zentrum Z entfernt wie das Urbild P, das heißt $\overline{ZP'} = m \cdot \overline{ZP}$.

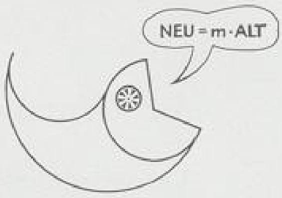
Man bezeichnet die zentrische Streckung symbolisch mit S (Z, m).





Der Streckfaktor m heißt auch **Abbildungsmaßstab.** Vergrößerungen der Figuren ergeben sich für $m > 1$, Verkleinerungen für $m < 1$.

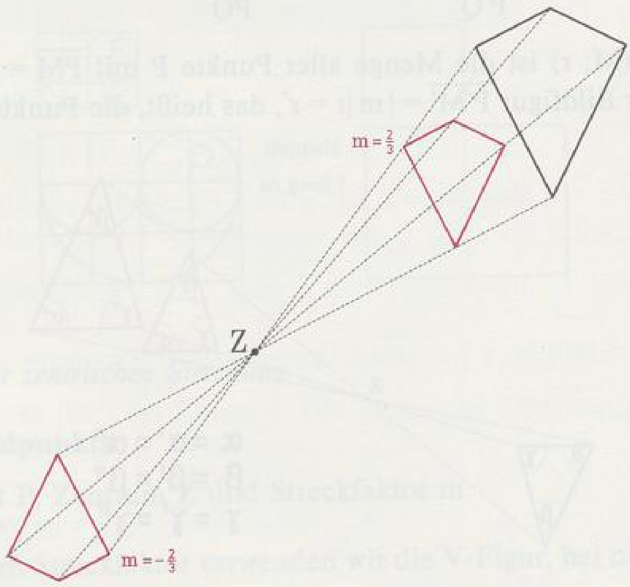
Auf Fernrohren und Mikroskopen ist der Abbildungsmaßstab angegeben. 200× bedeutet $m = 200$, das heißt, das Bild ist 200mal so groß wie das Original. Bei Modellen, Plänen und Landkarten ist das Original verkleinert. Man gibt den Maßstab meist in der Form 1:100 bzw. 1:1 000 000 an, das heißt $m = \frac{1}{100}$ bzw. $m = \frac{1}{1\,000\,000}$.



Im Gegensatz zur Praxis gibt es in der Mathematik auch negative Streckfaktoren: Man erweitert den Begriff zentrische Streckung auf $m < 0$. Das Bild P′ liegt dann so auf der Gerade ZP, daß P und P′ auf verschiedenen Seiten von Z liegen. Es gilt: $\overline{ZP'} = |m| \cdot \overline{ZP}$. Die Bilder einer Figur zu $m = s$ und $m = -s$ sind zueinander punktsymmetrisch bezüglich Z.

Eigenschaften der zentrischen Streckung:

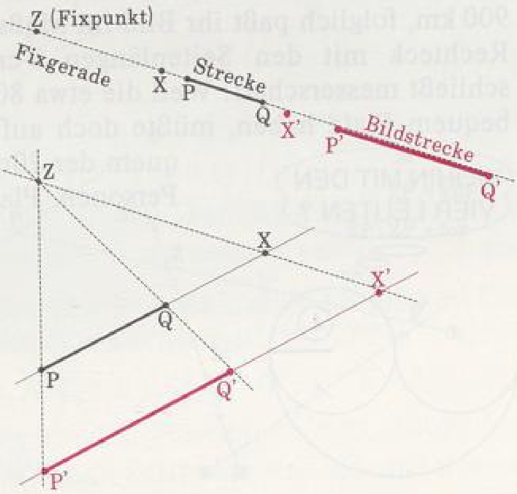
- **Jede Gerade g wird auf eine dazu parallele Bildgerade g′ abgebildet.**
- **Jede Bildstrecke s′ ist |m| mal so lang wie ihre Urbildstrecke s.**
- **Jeder Kreis k mit Radius r wird auf einen Kreis k′ mit Radius r′ = |m| r abgebildet.**
- **Winkel und Bildwinkel sind gleich groß.**
- **Der Flächeninhalt der Bildfigur ist m^2 mal so groß wie der Flächeninhalt des Originals.**



Beweis: Jede Gerade PQ durch Z wird wegen der Definition der zentrischen Streckung auf sich selber abgebildet (Fixgerade mit Fixpunkt Z). Geht PQ nicht durch Z, dann gilt für einen beliebigen Punkt X auf PQ

$\overline{ZP} : \overline{ZP'} = \overline{ZQ} : \overline{ZQ'} = \overline{ZX} : \overline{ZX'} = |m|$.

Wegen der Umkehrung des 1. Strahlensatzes ist P′X′ ∥ PX und Q′X′ ∥ QX, das heißt, X′ liegt auf P′Q′. Also ist das Bild von PQ die dazu parallele Gerade P′Q′.



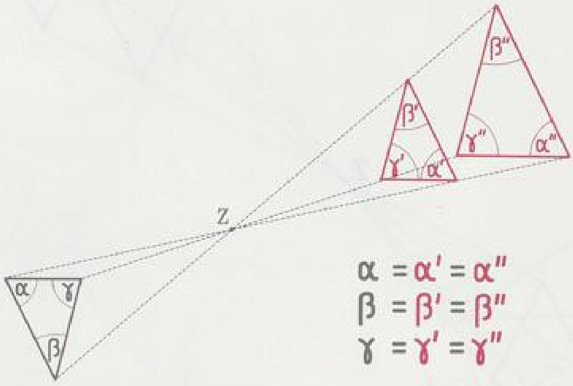
Wegen des 2. Strahlensatzes gilt außerdem

$\overline{P'Q'} : \overline{PQ} = \overline{P'Z} : \overline{PZ} = |m|$, also $\overline{P'Q'} = |m| \cdot \overline{PQ}$.

Liegt Z auf PQ, dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} \overline{ZP'} = |m| \cdot \overline{ZP} \\ \overline{ZQ'} = |m| \cdot \overline{ZQ} \end{array}\right\} \underbrace{|\overline{ZQ'} - \overline{ZP'}|}_{\overline{P'Q'}} = |m| \cdot \underbrace{|\overline{ZQ} - \overline{ZP}|}_{\overline{PQ}}$$

Der Kreis k (M; r) ist die Menge aller Punkte P mit $\overline{PM} = r$. Deshalb gilt für alle Punkte P′ der Bildfigur $\overline{P'M'} = |m| r = r'$, das heißt, die Punkte P′ bilden den Kreis k (M′; r′).



$\alpha = \alpha' = \alpha''$
$\beta = \beta' = \beta''$
$\gamma = \gamma' = \gamma''$

Die Schenkel des Bildwinkels sind parallel zu den Schenkeln des Winkels, Winkel und Bildwinkel sind also gleich groß: Ein Dreieck wird auf ein Dreieck mit denselben Winkelmaßen abgebildet.

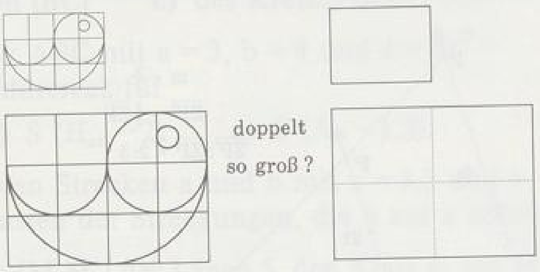
Für die Fläche eines Dreiecks gilt $A = \frac{1}{2}gh$. Demnach hat das Bilddreieck den Flächeninhalt $A' = \frac{1}{2}g'h' = \frac{1}{2}|m| \cdot g \cdot |m| h = m^2 \cdot \frac{1}{2}gh = m^2 A$. Weil sich jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen läßt, stimmt diese Beziehung auch für Vieleckflächen. Sie gilt sogar für krummlinig begrenzte Flächen. Der Beweis ist allerdings kompliziert.

Geobold hat Schwierigkeiten mit Flächeninhalten. Die Bundesrepublik paßt in ein Rechteck mit den Seitenlängen 600 km und 900 km, folglich paßt ihr Bild im Maßstab 1:20 Millionen in ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 cm und 4,5 cm. Geobold schließt messerscharf: Weil die etwa 80 Millionen Bundesbürger bequem Platz haben, müßte doch auf seiner kleinen Karte bequem der 20millionste Teil, das sind 4 Personen, Platz haben.

In der Umgangssprache unterscheidet man oft nicht deutlich genug zwischen Längen- und Flächenverhältnissen. Was bedeutet zum Beispiel:

ein doppelt so großes Rechteck,
ein doppelt so großes Zimmer,
ein doppelt so großes Foto?

Der Klarheit halber sollte man den Maßstab immer nur auf Längenverhältnisse beziehen, so, wie es bei der zentrischen Streckung üblich ist.

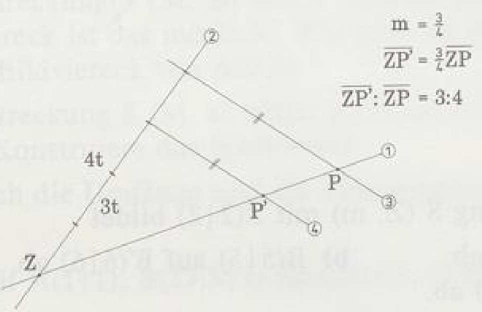


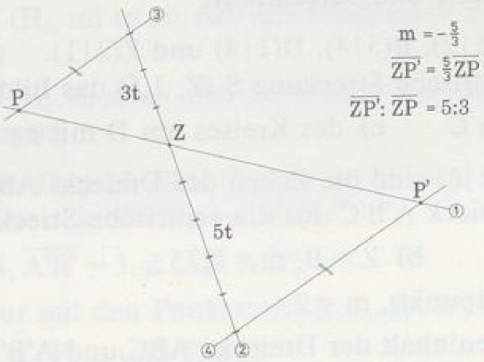
Grundkonstruktionen zur zentrischen Streckung

Konstruktion des Bildpunkts

Gegeben: Urbildpunkt P, Zentrum Z und Streckfaktor m
Gesucht: Bildpunkt P′
Lösung: Bei positivem Streckfaktor verwenden wir die V-Figur, bei negativem Streckfaktor verwenden wir die X-Figur.

Konstruktion des Bildpunkts

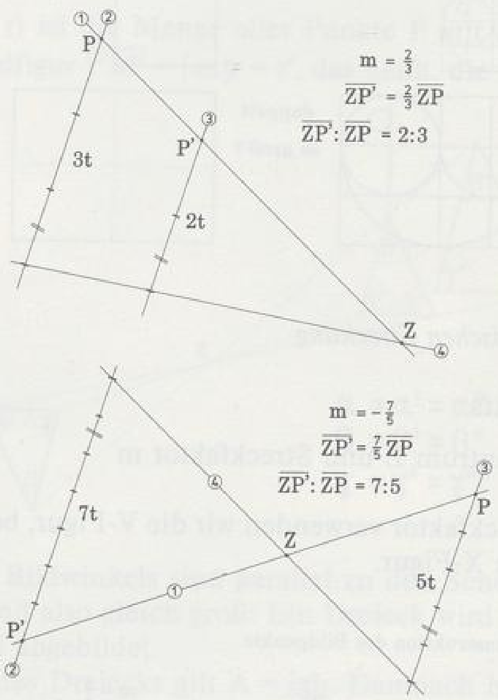




Konstruktion des Zentrums

Gegeben: Urbild P, Bildpunkt P′ und Streckfaktor m
Gesucht: Zentrum Z
Lösung: Bei positivem Streckfaktor verwenden wir die V-Figur, bei negativem Streckfaktor verwenden wir die X-Figur.

Konstruktion des Zentrums



Aufgaben

1. Die zentrische Streckung S (Z, m) mit Z(2|2) bildet
a) A(7|2) auf A′(8|2) ab. **b)** B(5|5) auf B′(6|6) ab.
c) C(6|0) auf C′(3|1,5) ab.
Zeichne jeweils die Punkte und berechne m.

2. Zeichne die Punkte A(5|2), B(3|4), D(1|4) und Z(2|1).
Konstruiere für die zentrische Streckung S (Z, 1,5) das Bild
a) von [AB] **b)** von C **c)** des Kreises um D mit r = 1.

3. A(1|1), B(6|1) und C(3|6) sind die Ecken des Dreiecks ABC.
Konstruiere das Bilddreieck A′B′C′ für die zentrische Streckung S (Z, m)
a) Z = D(0|3), m = 1,5 **b)** Z = B, m = 0,75
c) Z = H (Höhenschnittpunkt), m = 2
d) Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke ABC und A′B′C′.

4. Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit $a = 6$, $\alpha = 75°$ und $b = 4$.
Konstruiere das Bild des Parallelogramms für die zentrische Streckung S (Z, m)

a) $Z = B$, $m = 0{,}5$ **b)** Z ist Mitte von [AD], $m = 0{,}5$

c) Z ist Fußpunkt des Lots durch D auf AB, $m = 1{,}5$.

5. Zeichne die Punkte A(7 | 0), B(3 | 0), C(0 | 2,5) und Z(4 | 3).
Konstruiere für die zentrische Streckung S (Z, −0,5) das Bild

a) von A **b)** von [BC] **c)** des Kreises um A mit $r = 3$.

6. Zeichne das Dreieck ABC mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$.
Konstruiere das Bilddreieck für

a) S (C, −1) **b)** S (H_c, −2) **c)** S (A, −1,5).

7. Zeichne die parallelen Strecken a und b mit $a = 3{,}5$ und $b = 2$ im Abstand 3.
Konstruiere die Zentren der Streckungen, die b auf a abbilden, und gib m an.

8. Zeichne die Strecke [M_1M_2] der Länge 5, den Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 1$ und den Kreis k_2 um M_2 mit $r_2 = 2$.
Konstruiere die Zentren der Streckungen, die k_1 auf k_2 abbilden, und gib m an.

9. Zeichne die Strecke [PP′] der Länge 4. Die zentrische Streckung S (Z, m) bildet P auf P′ ab.
Konstruiere Z für

a) $m = 2$ **b)** $m = 0{,}5$ **c)** $m = \frac{2}{3}$

d) $m = -1$ **e)** $m = -\frac{1}{3}$ **f)** $m = -2$.

•10. Zeichne das Viereck ABCD mit A(0 | 1), B(8 | 1), C(9 | 7) und D(5 | 7). M ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

a) Die zentrische Streckung S (M, m) bildet [AB] auf [CD] ab. 14
Bei welchem Viereck ist das möglich? Wie groß ist m? 0 0 19
Konstruiere das Bildviereck von ABCD. 0

b) Die zentrische Streckung S (M, k) bildet [CD] auf [AB] ab.
Wie groß ist k? Konstruiere das Bildviereck.

c) Wie verhalten sich die Umfänge und die Flächeninhalte von Urbild und Bild in **a)** und **b)**?

•11. Im Dreieck ABC mit A(1 | 1), B(13,5 | 1) und C(5,5 | 7) haben die Katheten die Länge 7,5 und 10.

a) Bilde ABC mit S (H_c, m) so ab, daß das Bilddreieck den Umfang 20 hat. 9
(Zwei Lösungen) 0 0 14

b) Bilde ABC mit S (H_c, k) so ab, daß das Bilddreieck den Flächeninhalt $\frac{200}{3}$ 7
hat. (Zwei Lösungen)

12. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC (Spitze bei C) wird durch die Streckung S (C; m) mit $m > 0$ auf das Dreieck A′B′C′ abgebildet.

Bekannt ist: $\overline{AB} = 4$, $\overline{A'B'} = 3$, d (AB, A′B′) = 1

a) Zeichne die Figur mit den Punkten A, B, C, A′, B′, C′!

b) Berechne m, h_c, h_c', F_{ABC} und $F_{A'B'C'}$!

13. Ein Dreieck ZAB wird von Z aus auf das Dreieck ZA′B′ gestreckt ($m > 0$). Die Fläche des Vierecks AA′B′B ist viermal so groß wie die Fläche des Dreiecks ZAB. Berechne den Streckfaktor m!

14. Bei einer zentrischen Streckung mit negativem Streckfaktor m wird das Dreieck $A(3|1)$, $B(4|5)$, $C(0|5)$ auf ein Dreieck mit Flächeninhalt 4,5 abgebildet.

a) Berechne m!

b) Zeichne das Bilddreieck A′B′C′, wenn $Z(5|3)$ gegeben ist und gib seine Koordinaten an!

15. Zeichne das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $a = 4$ und $b = 3$ und bilde dieses Dreieck durch die Streckung $S\ (C;\ m_1)$ mit $m_1 > 1$ so ab, daß $\overline{AA'} = 2$ gilt.

a) Berechne m_1!

b) Berechne die Länge $\overline{B'C}$!

c) Welchen Abbildungsfaktor m_2 hat eine Streckung mit dem Zentrum A′, die C auf A abbildet? Konstruiere für diese Streckung das Bild B″ von B′!

d) Was für eine Figur ist AB″B′B?

e) Welchen Inhalt hat das Dreieck AA′B″?

16. Von drei Punkten A, B und C ist bekannt: es gibt eine zentrische Streckung $S\ (Z;\ m)$ mit $m > 0$, die A auf B und B auf C abbildet.

a) Zeichne die drei Punkte, wenn $\overline{AB} = 3{,}5$ und $\overline{BC} = 2$!

b) Berechne m und konstruiere Z!

17. Zeichne zwei parallele Geraden g und g′ mit dem Abstand 3. Wähle auf g einen Punkt A und bestimme dazu auf g′ einen Punkt A′ so, daß $\overline{AA'} = 4$.

a) Konstruiere das Zentrum Z der Streckung $S\ (Z;\ \frac{5}{8})$, die A auf A′ abbildet!

b) Das gemeinsame Lot von g und g′ durch Z schneidet g in F und g′ in F′. Warum bildet die in a) angegebene Streckung F auf F′ ab?

c) Berechne den Abstand von Z zu g′!

3.2 Berühmte Sätze

Mit der zentrischen Streckung beweisen wir einige berühmte Sätze der Geometrie. (Die beiden ersten haben wir schon bei den Strahlensätzen bewiesen.)

Satz über die Mittelparallele im Dreieck:

Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten im Dreieck ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie sie.