Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

3.2 Berühmte Sätze

13. Ein Dreieck ZAB wird von Z aus auf das Dreieck ZA'B' gestreckt ($m > 0$). Die Fläche des Vierecks AA'B'B ist viermal so groß wie die Fläche des Dreiecks ZAB. Berechne den Streckfaktor m!

14. Bei einer zentrischen Streckung mit negativem Streckfaktor m wird das Dreieck $A(3|1)$, $B(4|5)$, $C(0|5)$ auf ein Dreieck mit Flächeninhalt 4,5 abgebildet.

a) Berechne m!

b) Zeichne das Bilddreieck A'B'C', wenn $Z(5|3)$ gegeben ist und gib seine Koordinaten an!

15. Zeichne das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $a = 4$ und $b = 3$ und bilde dieses Dreieck durch die Streckung S (C; m_1) mit $m_1 > 1$ so ab, daß $\overline{AA'} = 2$ gilt.

a) Berechne m_1!

b) Berechne die Länge $\overline{B'C}$!

c) Welchen Abbildungsfaktor m_2 hat eine Streckung mit dem Zentrum A', die C auf A abbildet? Konstruiere für diese Streckung das Bild B'' von B'!

d) Was für eine Figur ist AB''B'B?

e) Welchen Inhalt hat das Dreieck AA'B''?

16. Von drei Punkten A, B und C ist bekannt: es gibt eine zentrische Streckung S (Z; m) mit $m > 0$, die A auf B und B auf C abbildet.

a) Zeichne die drei Punkte, wenn $\overline{AB} = 3{,}5$ und $\overline{BC} = 2$!

b) Berechne m und konstruiere Z!

17. Zeichne zwei parallele Geraden g und g' mit dem Abstand 3. Wähle auf g einen Punkt A und bestimme dazu auf g' einen Punkt A' so, daß $\overline{AA'} = 4$.

a) Konstruiere das Zentrum Z der Streckung S (Z; $\frac{5}{8}$), die A auf A' abbildet!

b) Das gemeinsame Lot von g und g' durch Z schneidet g in F und g' in F'. Warum bildet die in a) angegebene Streckung F auf F' ab?

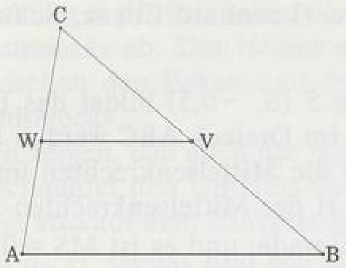
c) Berechne den Abstand von Z zu g'!

3.2 Berühmte Sätze

Mit der zentrischen Streckung beweisen wir einige berühmte Sätze der Geometrie. (Die beiden ersten haben wir schon bei den Strahlensätzen bewiesen.)

Satz über die Mittelparallele im Dreieck:

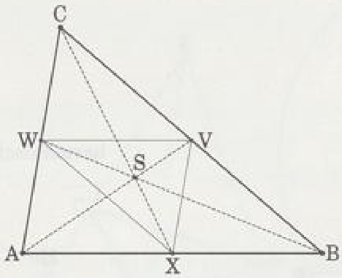
Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten im Dreieck ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie sie.



Beweis: Die zentrische Streckung S (C, $\frac{1}{2}$) bildet die Strecke [AB] ab auf die dazu parallele und halb so lange Strecke [WV].
Außerdem gilt: $\overline{CW} = \frac{1}{2}\overline{CA}$ und $\overline{CV} = \frac{1}{2}\overline{CB}$.

Schwerpunktsatz:

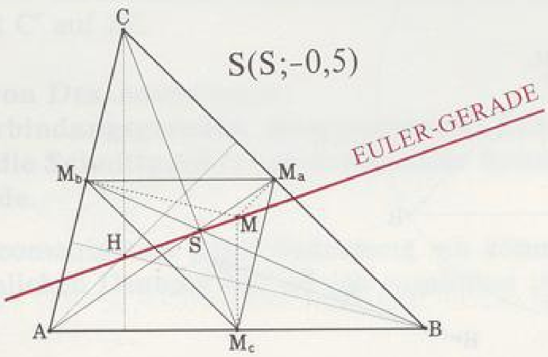
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks.
Die Abschnitte, in die der Schwerpunkt eine Seitenhalbierende teilt, verhalten sich wie 2:1. Das längere Stück ist immer an der Ecke.



Beweis: Die Seitenhalbierenden AV und BW schneiden sich in S. Die zentrische Streckung S (S, −2) bildet dann die Mittellinie [VW] auf [AB] und die Mittelparallele [WX] auf [BC] ab, C ist das Bild von X. S liegt deshalb auch auf der dritten Seitenhalbierenden CX. Weil [CS], [AS] und [BS] die Bilder von [XS], [VS] und [WS] sind, gilt: $\overline{CS} = 2\overline{XS}$, $\overline{AS} = 2\overline{VS}$ und $\overline{BS} = 2\overline{WS}$.

*** Satz über die Euler-Gerade:**

In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten auf einer Gerade.
Es gilt $\overline{HS} = 2 \cdot \overline{MS}$.



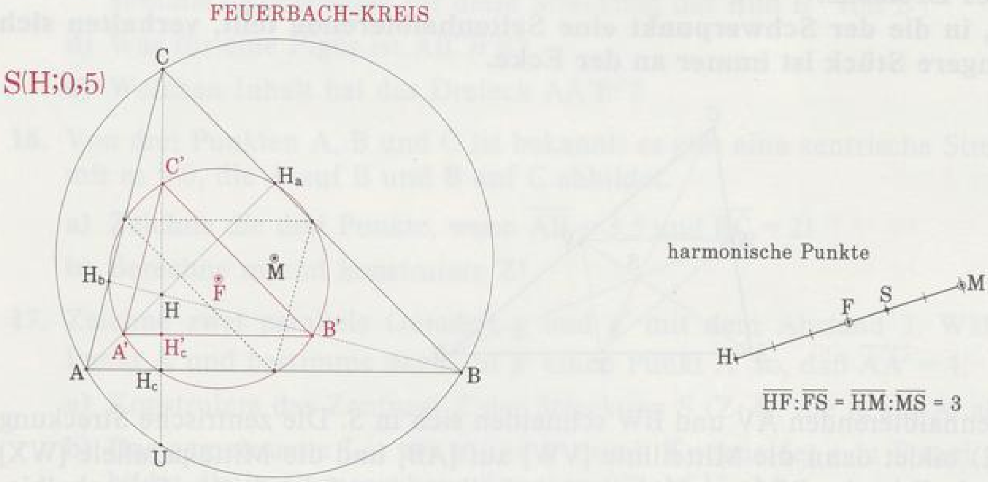
Diese Gerade heißt Euler-Gerade. (Leonhard EULER, Schweizer Mathematiker, Basel 1707 bis 1783 Petersburg)

Beweis: Die zentrische Streckung S (S, −0,5) bildet das Dreieck ABC aufs Mittendreieck $M_aM_bM_c$ ab. Die Höhen im Dreieck ABC werden auf die Höhen im Mittendreieck abgebildet, das sind aber die Mittelsenkrechten im Dreieck ABC. Also ist das Bild des Höhenschnittpunkts H der Mittelsenkrechten-Schnittpunkt M, das heißt, H, S und M liegen auf einer Gerade, und es ist $\overline{MS} = 0{,}5 \cdot \overline{HS}$ bzw. $\overline{HS} = 2\overline{MS}$.

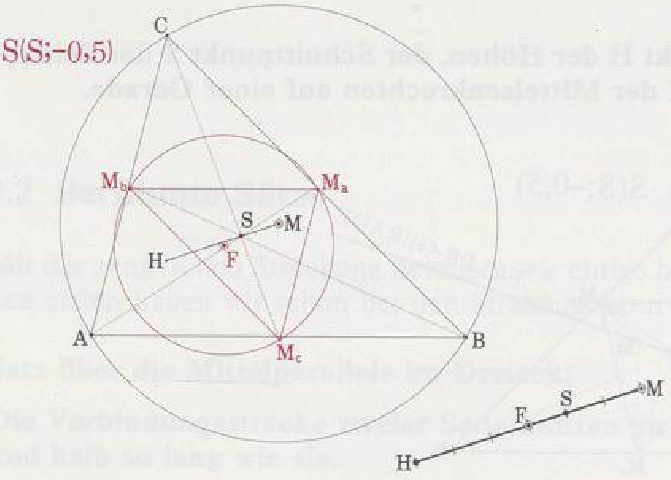
*** Satz über den Feuerbach-Kreis:**

In jedem Dreieck liegen die drei Seitenmitten, die drei Höhenfußpunkte und die drei Mitten zwischen dem Höhenschnittpunkt H und den Ecken auf einem Kreis.

Der Kreis heißt Feuerbach-Kreis oder auch Neunpunktekreis.
(Karl Wilhelm FEUERBACH, deutscher Mathematiker, 1800 bis 1834 Erlangen)



Beweis: Der Umkreis des Dreiecks ABC (Mittelpunkt M, Radius r) wird bei der zentrischen Streckung S (S, −0,5) auf den Umkreis des Mittendreiecks $M_aM_bM_c$ (Mittelpunkt F, Radius r/2) abgebildet. Wegen $\overline{SM} : \overline{SF} = 2:1$ halbiert F die Strecke [MH].

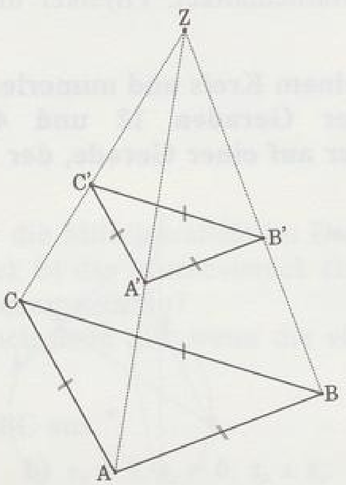


Auch die zentrische Streckung S (H, 0,5) bildet den Umkreis des Dreiecks ABC auf den Umkreis des Mittendreiecks ab. Die Höhen sind Fixgeraden. Also liegen die Mitten A′, B′ und C′ zwischen den Ecken und dem Höhenschnittpunkt auch auf dem Umkreis des Mittendreiecks.
Jetzt müssen wir nur noch zeigen, daß auch die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c auf diesem Kreis liegen. h_c schneidet den Umkreis des Dreiecks ABC in U. S (H, 0,5) bildet U auf H_c ab. H_c liegt also auf dem Umkreis des Mittendreiecks. Weil h_c Fixgerade ist, liegt H_c auch auf h_c. H_c' ist das Bild von H_c, und es gilt: $\overline{H_cH_c'} = \overline{H_c'H}$. Folglich liegt H_c' auf A′B′ und ist Höhenfußpunkt im Dreieck A′B′C′. Deshalb ist das Urbild H_c von H_c' Höhenfußpunkt im Dreieck ABC.

*** Sonderfall des Satzes von Desargues**

(Gérard Desargues, französischer Mathematiker, Lyon 1593 bis 1662 Lyon)

Liegen zwei nicht kongruente Dreiecke so, daß ihre Seiten paarweise parallel sind, so schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken in einem Punkt.

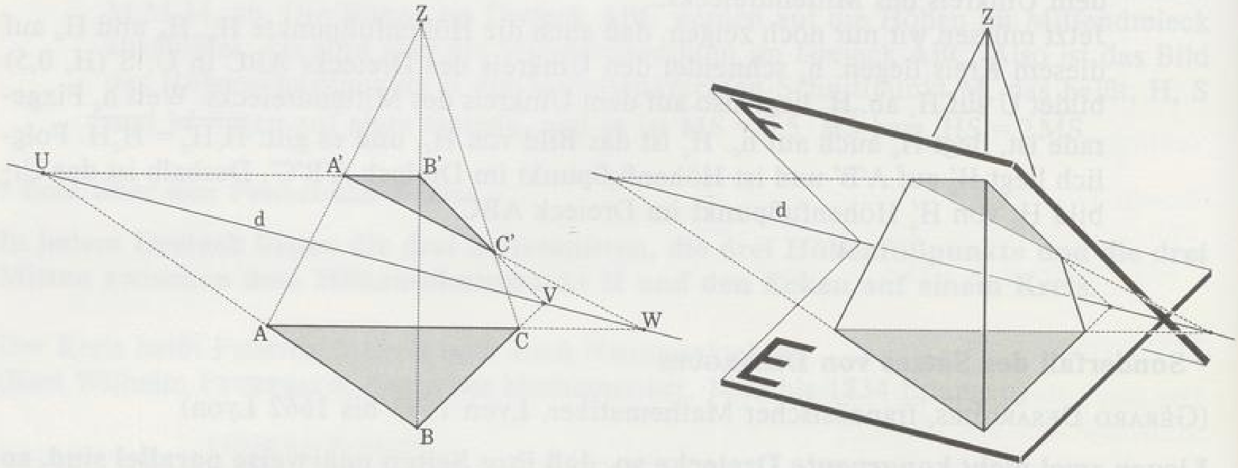


Beweis: AA′ und BB′ schneiden sich in Z. Die zentrische Streckung S (Z, c′/c) bildet [AB] auf [A′B′] ab. Das Bild C* von C ist Schnittpunkt der Parallele zu BC durch B′ und der Parallele zu AC durch A′. Die Parallelen schneiden sich aber in C′, das heißt, C′ = C*, also liegt C′ auf ZC.

*** Der allgemeine Satz von Desargues** lautet:
Schneiden sich die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke in einem Punkt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten (bzw. ihrer Verlängerungen) auf einer Gerade.

Dieser Satz hat in der Geometrie eine große Bedeutung, wir können ihn hier jedoch nicht beweisen. Mit einer räumlichen Deutung läßt er sich zumindest plausibel machen:

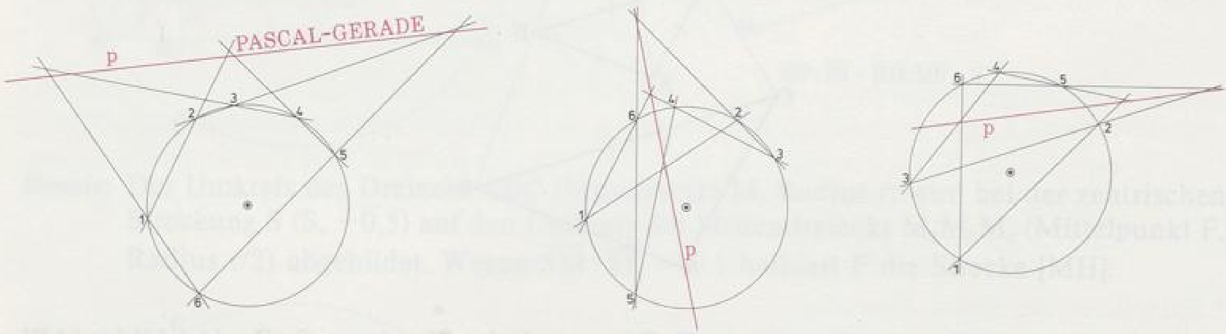
Wir stellen uns ZABC als Pyramide mit der Spitze Z vor. Die Ebenen E (A, B, C) und F (A′, B′, C′) schneiden die Pyramiden in den beiden Dreiecken. Im allgemeinen sind die beiden Ebenen nicht parallel und schneiden sich in d.



* Und nun als Krönung der **Satz von Pascal**

(Blaise Pascal, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, Clermont-Ferrand 1623 bis 1662 Paris)

Wählt man sechs Punkte auf einem Kreis und numeriert sie beliebig mit 1 bis 6, dann liegen die Schnittpunkte der Geraden 12 und 45, 23 und 56, 34 und 67 (Ecke 7 = Ecke 1) selber wieder auf einer Gerade, der Pascal-Gerade.



Je nachdem, wie man die sechs Punkte numeriert, ergibt sich eine andere Pascal-Gerade. Insgesamt gibt's davon 60 Stück! Zum Beweis braucht man den richtigen Blick:

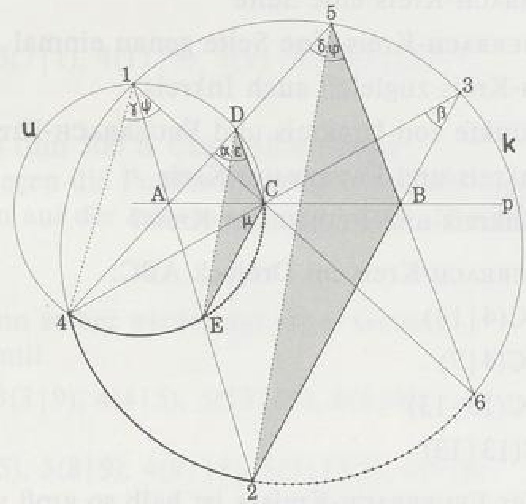
C ist Schnittpunkt von 61 und 43,
u ist Umkreis des Dreiecks 1 C4,
54 schneidet u in D, 12 schneidet u in E

Umfangswinkel in den Kreisen k und u:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \gamma \text{ (Kreis u)}\\ \gamma = \delta \text{ (Kreis k)}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \delta \Rightarrow \text{DE} \parallel 52 \qquad \left.\begin{array}{l}\varepsilon = \psi \text{ (Kreis u)}\\ \psi = \varphi \text{ (Kreis k)}\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon = \psi \Rightarrow \text{DC} \parallel 5\text{B}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta = \delta \text{ (Kreis k)}\\ \delta = \alpha \text{ (oben!)}\\ \alpha = \mu \text{ (Kreis u)}\end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \mu \Rightarrow \text{CE} \parallel \text{B}2$$

Die Dreiecke CDE und B52 haben also paarweise parallele Seiten. Deshalb liegen A, B und C nach DESARGUES auf einer Gerade.



Übrigens hat PASCAL diesen Satz mit 16 Jahren bewiesen und 1640 in seinem »Essai pour les Coniques« veröffentlicht.

Aufgaben

1. Folgere aus dem Satz über die Mittelparallele im Dreieck den Satz:
In einem beliebigen Viereck ist das Mittenviereck ein Parallelogramm.
Wie lang sind die Parallelogrammseiten?
Begründe, daß der Satz auch dann gilt, wenn die vier Ecken im Raum liegen (also nicht in einer Ebene).

• **2.** Konstruiere ein Dreieck ABC aus
a) $a = 8$, $s_b = 9$, $s_a = 7{,}5$ **b)** $s_a = 3$, $s_c = 6$, $s_a \perp s_c$.

3. Bei welchen Dreiecken ist die EULER-Gerade zugleich auch
a) Winkelhalbierende **b)** Seitenhalbierende?

4. Konstruiere die EULER-Gerade im Dreieck ABC:
a) A(0|0), B(15|0), C(3|12) 12 / 0 0 15 / 0
b) A(1|2), B(13|5), C(10|11)
c) A(1|1), B(13|4), C(7|7)
d) A(0|2), B(15|2), C(9|8)
e) A(1|0), B(13|6), C(10|12)
f) A(0|1), B(15|4), C(9|10)
g) A(13|0), B(7|12), C(1|6)
h) A(0|4), B(15|1), C(9|10)

5. Bei welchen Dreiecken

a) geht der Feuerbach-Kreis durch eine Ecke

b) berührt der Feuerbach-Kreis eine Seite

c) schneidet der Feuerbach-Kreis eine Seite genau einmal

d) ist der Feuerbach-Kreis zugleich auch Inkreis

e) fallen die Mittelpunkte von Umkreis und Feuerbach-Kreis zusammen

f) berühren sich Umkreis und Feuerbach-Kreis

g) schneiden sich Umkreis und Feuerbach-Kreis?

6. Konstruiere den Feuerbach-Kreis im Dreieck ABC: 13

a) A(0|1), B(10|1), C(4|13) 0 0 13

b) A(1|4), B(13|4), C(4|7) 0

c) A(1|1), B(13|5), C(13|13)

d) A(1|7), B(7|1), C(13|13)

7. Zeige: Der Radius des Feuerbach-Kreises ist halb so groß wie der des Umkreises.

• **8.** Der Feuerbach-Kreis eines Dreiecks ABC um F(9|8) geht durch M_a(9|3). 16
Konstruiere das Dreieck, wenn M(10|6) Umkreismittelpunkt ist. 0 0 18
0

9. Zwei nicht kongruente Dreiecke liegen so, daß ihre Seiten paarweise parallel sind. Zeichne sie so, daß der »Desargues-Punkt Z« zwischen den entsprechenden Punkten liegt.

• **10.** A(14|3), B(16|9), C(12|11) A′(7|4), B′(4|6)
Die Dreiecke ABC und A′B′C′ liegen so, daß sich die Verbindungsgeraden 12
entsprechender Ecken in einem Punkt Z treffen. 0 0 16
Konstruiere C′ so, daß die »Desargues-Gerade d« parallel zu AC ist, und 0
zeichne d. Welcher Punkt C′ ergibt sich, wenn d parallel AB ist?

11. Die Punkte 1 bis 6 liegen auf einem Kreis.
Konstruiere die Pascal-Gerade für 12

a) 1(13,5|5), 2(7|11,5), 3(2,5|7), 4(13|3,5), 5(10,5|1), 6(3|3,5) 0 0 14
0

b) 1(8|16,5), 2(4|13,5), 3(8|5,5), 4(3,5|10), 5(14|8,5), 6(11,5|6) 17
0 0 15
0

c) 1(14,5|8,5), 2(12|11), 3(4|7), 4(14,5|3,5), 5(12|1), 6(4,5|3,5) 12
0 0 17
0

12. Die Punkte 1 bis 6 liegen auf einem Kreis. Fallen zwei Punkte in einem Punkt zusammen, dann zeichne statt der Sekante die Tangente in diesem Punkt.

Konstruiere die Pascal-Gerade für 15

a) 1(9|13), 2(1|9), 3(1|9), 4(10|9), 5(9|7), 6(9|7) 0 0 13
0

10
b) 1(2 | 4), 2(10 | 2), 3(2 | 6), 4(11 | 6), 5(11 | 6), 5(11 | 6), 6(5,5 | 0,5) 0 0 12
0

17
c) 1(7 | 12), 2(7 | 1), 3(7 | 1), 4(11 | 9), 5(11 | 9), 6(7 | 12) 0 0 19
0

13. Der Satz von PAPPOS (um 300 n. Chr., Alexandria)
Auf zwei Geraden liegen die Punkte 1 bis 6 so, daß die ungeraden auf der einen Gerade und die geraden auf der andern Gerade liegen. Die Schnittpunkte der Geraden
12 und 45,
23 und 56,
34 und 61 liegen dann selber wieder auf einer Gerade.
Überprüfe den Satz mit 14
a) 1(5 | 10), 2(3 | 6), 3(3 | 9), 4(4 | 5), 5(13 | 14), 6(5 | 4) 0 0 13
0

18
b) 1(14 | 0), 2(3,5 | 4,5), 3(8 | 9), 4(8 | 18), 5(5 | 13,5), 6(5 | 9)
0 0 14
0

3.3 S-Multiplikation