Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

3.3 S-Multiplikation

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

10
b) 1(2|4), 2(10|2), 3(2|6), 4(11|6), 5(11|6), 5(11|6), 6(5,5|0,5) 0 0 12
0

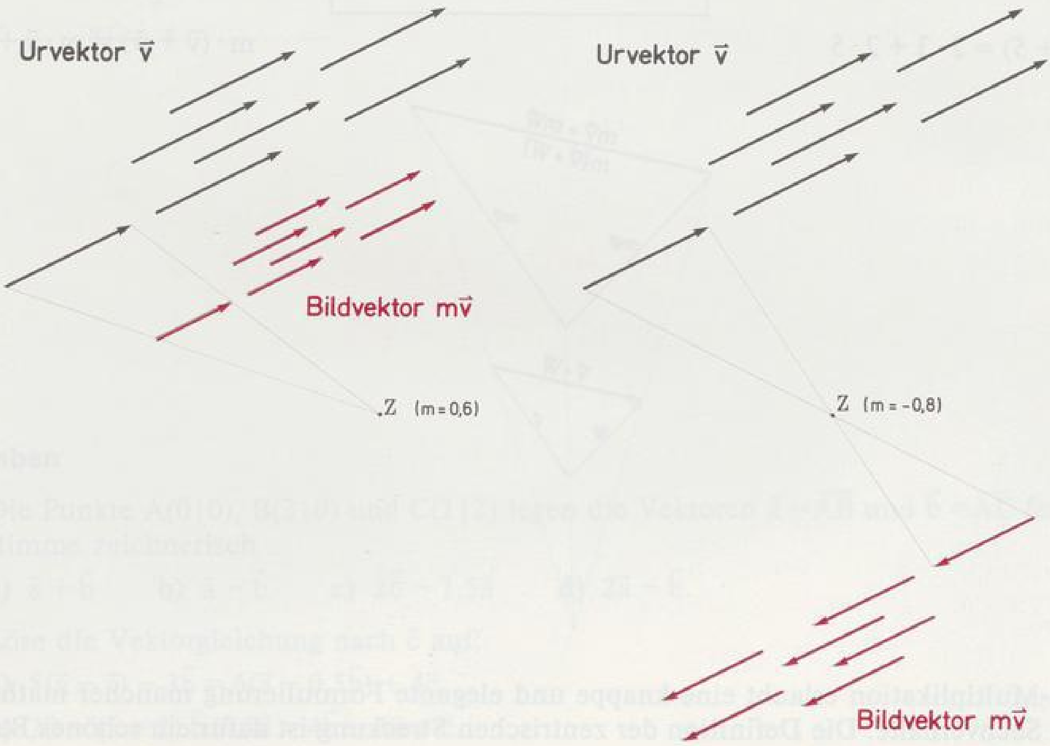
17
c) 1(7|12), 2(7|1), 3(7|1), 4(11|9), 5(11|9), 6(7|12) 0 0 19
0

13. Der Satz von Pappos (um 300 n. Chr., Alexandria)
Auf zwei Geraden liegen die Punkte 1 bis 6 so, daß die ungeraden auf der einen Gerade und die geraden auf der andern Gerade liegen. Die Schnittpunkte der Geraden
12 und 45,
23 und 56,
34 und 61 liegen dann selber wieder auf einer Gerade.
Überprüfe den Satz mit 14

a) 1(5|10), 2(3|6), 3(3|9), 4(4|5), 5(13|14), 6(5|4) 0 0 13
0

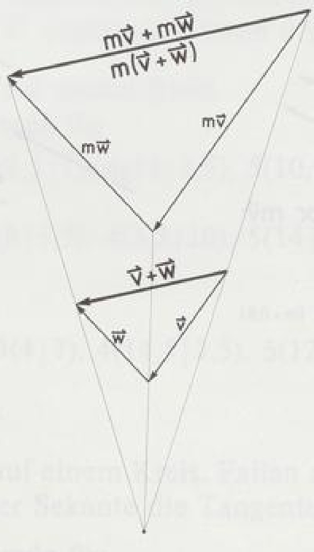
18
b) 1(14|0), 2(3,5|4,5), 3(8|9), 4(8|18), 5(5|13,5), 6(5|9) 0 0 14
0

3.3 S-Multiplikation



Wendet man die zentrische Streckung S (Z; m) auf den Vektor $\vec{v}$ an, so ist das Bild wieder ein Vektor. Man bezeichnet den Bildvektor mit $m \cdot \vec{v}$. Die Pfeile von $m \cdot \vec{v}$ sind parallel zu den Pfeilen von $\vec{v}$ und $|m|$ mal so lang. Für $m > 0$ sind die Pfeile von $\vec{v}$ und $m \cdot \vec{v}$ gleich gerichtet (gleichsinnig parallel), für $m < 0$ sind die Pfeile von $\vec{v}$ und $m \cdot \vec{v}$ entgegengesetzt gerichtet (gegensinnig parallel). Unter $0 \cdot \vec{v}$ versteht man den Nullvektor $\vec{0}$. Die Schreibweise $m \cdot \vec{v}$ erinnert an ein Produkt. Im Gegensatz zum Produkt von Zahlen »multipliziert« man jetzt aber eine Zahl und einen Vektor. Weil Zahlen auch Skalare heißen, nennt man diese besondere Multiplikation die S-Multiplikation. Die Bezeichnung »Multiplikation« ist gerechtfertigt, weil viele Gesetze der Zahlenmultiplikation auch hier gelten, zum Beispiel

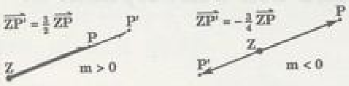
Zahlen-Multiplikation		S-Multiplikation
$2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2$		$\vec{v} + \vec{v} + \vec{v} = 3 \cdot \vec{v}$
$1 \cdot 2 = 2$		$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
$0 \cdot 2 = 0$		$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$
$(-1) \cdot 2 = -2$		$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$
	Assoziativgesetz	
$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$		$(m \cdot n) \cdot \vec{v} = m \cdot (n \cdot \vec{v})$
	1. Distributivgesetz	
$(2 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$		$(m + n) \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{v}$
	2. Distributivgesetz	
$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$		$m \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = m \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w}$



Die S-Multiplikation erlaubt eine knappe und elegante Formulierung mancher mathematischen Sachverhalte. Die Definition der zentrischen Streckung ist dafür ein schönes Beispiel.

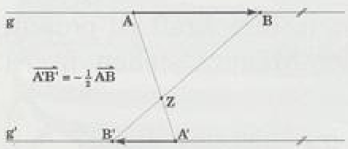
Eine zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor m ist eine Abbildung $P \rightarrow P'$, für die gilt: $\overrightarrow{ZP'} = m\overrightarrow{ZP}$. In dieser einen Gleichung stecken alle Eigenschaften der zentrischen Streckung, Beispiele:

– Z ist Fixpunkt
Begründung: $\overrightarrow{ZZ'} = m\overrightarrow{ZZ} = \vec{0}$, also ist $Z = Z'$.



– Z, P und P′ liegen auf einer Gerade
Begründung: Folgt direkt aus der Definition der S-Multiplikation.
– Für einen beliebigen Vektor $\overrightarrow{AB}$ und sein Bild $\overrightarrow{A'B'}$ gilt: $\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$
Begründung: $\overrightarrow{ZA'} = m\overrightarrow{ZA} \Rightarrow \overrightarrow{A'Z} = m\overrightarrow{AZ}$ (I)
$\overrightarrow{ZB'} = m\overrightarrow{ZB'}$ (II)
I + II: $\overrightarrow{A'Z} + \overrightarrow{ZB'} = m(\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{ZB})$
$\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}$

Damit ist auch gezeigt:
Gerade und Bildgerade sind parallel,
die Bildstrecke [A′B′] ist $|m|$ mal so lang wie die Strecke [AB].
(Im Bild ist $m = -\frac{1}{2}$)



Aufgaben

1. Die Punkte A(0 | 0), B(3 | 0) und C(1 | 2) legen die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ fest. Bestimme zeichnerisch
   a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $\vec{a} - \vec{b}$ **c)** $2\vec{b} - 1{,}5\vec{a}$ **d)** $2\vec{a} - \vec{b}$.

2. Löse die Vektorgleichung nach $\vec{c}$ auf:
   a) $5(\vec{a} - \vec{c}) - 3\vec{b} = 6(\vec{a} - 0{,}5\vec{b}) + 4\vec{c}$
   b) $2\vec{a} - (5 - 2)\,\vec{b} - 3\vec{c} = 4\vec{b} - 3\vec{a} + \vec{c}$

3. Zeichne die Punkte A(0|0), B(4|2), C(1|3) und die Vektoren $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. Überprüfe durch Zeichnung das

a) Assoziativgesetz (mn) $\vec{v}$ = m (n$\vec{v}$) für m = 1,5 und n = 0,5
b) 1. Distributivgesetz (m + n) $\vec{v}$ = m$\vec{v}$ + n$\vec{v}$ für m = 1,5 und n = 0,5
c) 2. Distributivgesetz m($\vec{v}$ + $\vec{w}$) = m$\vec{v}$ + m$\vec{w}$ für m = 1,5.

4. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC, seine Seitenmitten und den Schwerpunkt S. Drücke folgende Vektoren mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ aus.

a) $\overrightarrow{AM_c}$ **b)** $\overrightarrow{AM_a}$ **c)** $\overrightarrow{CM_c}$ **d)** $\overrightarrow{SM_a}$
e) $\overrightarrow{BS}$ **f)** $\overrightarrow{M_bS} - \overrightarrow{BM_c}$.

5. In einem Parallelogramm mit Diagonalenschnittpunkt M gilt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Drücke mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus:

a) $\overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{DM}$ **c)** $\overrightarrow{MC}$ **d)** $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}$.

6. Zeichne die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ mit A(0|0), C(3|1,5) und bestimme den Punkt D so, daß $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ gilt:

a) B(1,5|0) **b)** B(−0,5|−1,5) **c)** B(1|−2).

•7. Im Trapez ABCD mit AB ∥ CD und $\overline{AB} = 2\overline{CD}$ liegt E so auf [DC], daß $\overline{DC} = 3\overline{DE}$ ist; M ist der Mittelpunkt von [AD]. Drücke mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ folgende Vektoren aus:

a) $\overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{CE}$ **d)** $\overrightarrow{BE}$
e) $\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{MC}$ **f)** $\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{MC}$.

•8. Fünf Männer wollen den Gordischen Knoten G(0|0) lösen. Ihre Kraft ist proportional zur Seillänge, alle ziehen gleichzeitig am Knoten, vier Männer stehen in A(2|2), B(2|1), C(1|−2), D(−2|−3).

a) Wo muß E stehen und ziehen, damit der Knoten G im Ursprung bleibt?
b) Mit welcher Kraft zieht E, wenn die Kraft von D 800 N beträgt?