Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

4.2 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

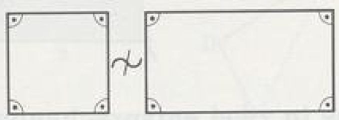
urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

Das Zeichen »~« erinnert an den Buchstaben S, den Anfangsbuchstaben von similis (lat.) = ähnlich. Das Zeichen »~« für »ähnlich« steckt auch im Zeichen »≅« für »kongruent«.
Weil sich bei zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen Winkelgrößen und Streckenverhältnisse nicht ändern, gilt der

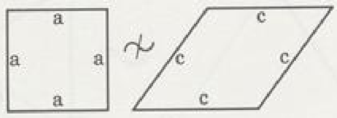
Satz:
In ähnlichen Figuren sind entsprechende Winkel und entsprechende Seitenverhältnisse gleich groß.

Die Gleichheit entsprechender Winkel reicht aber noch nicht für die Ähnlichkeit zweier Figuren, ebensowenig die Gleichheit entsprechender Seitenverhältnisse.

gleiche Winkel



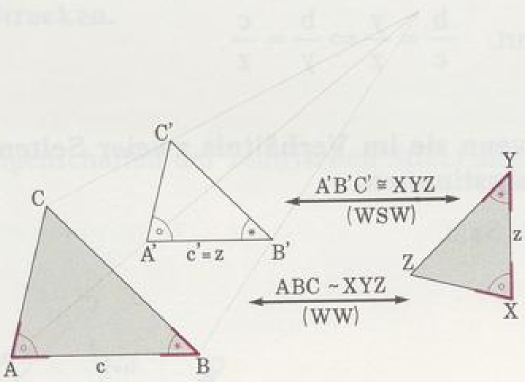
gleiche Streckenverhältnisse



4.2 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

In welchen Stücken müssen Dreiecke übereinstimmen, damit man mit Sicherheit weiß, daß sie ähnlich sind? Wie bei der Kongruenz von Dreiecken gibt es einfache Kriterien (Erkennungsmerkmale), an denen man die Ähnlichkeit erkennt.

1. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

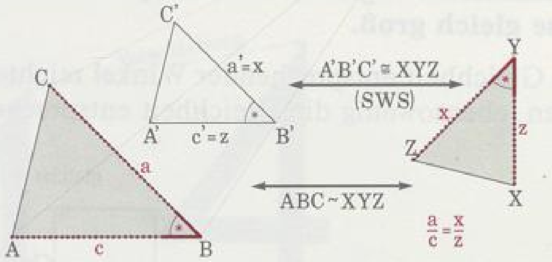


Beweis: Eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor m = z/c bildet das Dreieck ABC aufs Dreieck A′B′C′ ab; das Dreieck A′B′C′ ist wegen des WSW-Kongruenzsatzes zum Dreieck XYZ kongruent. Folglich gibt es eine Ähnlichkeitsabbildung, die ABC auf XYZ abbildet.

Neben diesem wichtigsten Ähnlichkeitssatz gibt es noch drei weitere:

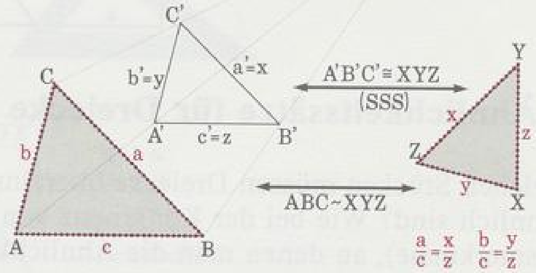
2. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen.

Beweis: analog wie beim 1. Satz.



3. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Beweis: analog wie beim 2. Satz.

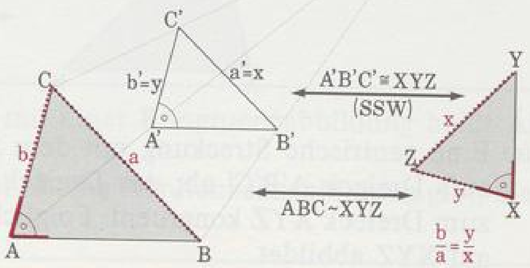


Übrigens: entsprechende Seitenverhältnisse sind b/c und y/z, Verhältnisse entsprechender Seiten sind b/y und c/z.

Die Algebra lehrt: $\frac{b}{c} = \frac{y}{z} \Leftrightarrow \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

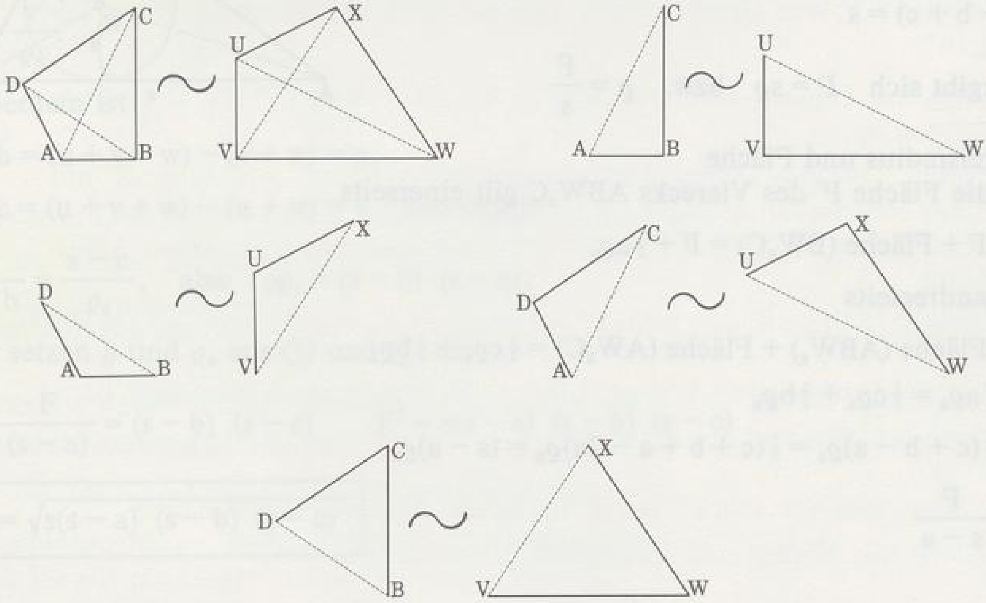
4. Ähnlichkeitssatz:
Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen.

Beweis: analog wie beim 3. Satz.



Bei Vielecken mit mehr als drei Ecken sind die Ähnlichkeitssätze wesentlich komplizierter. Eine hinreichende Bedingung ist die Ähnlichkeit aller entsprechenden Dreiecke, zum Beispiel sind die Vierecke ABCD und UVWX sicher ähnlich, wenn gilt

$$ABC \sim UVW, \quad ABD \sim UVX, \quad ACD \sim UWX, \quad BCD \sim VWX.$$



Die Ähnlichkeitssätze geben an, unter welchen Bedingungen Figuren ähnlich sind. Umgekehrt folgt aus der Ähnlichkeit von Figuren die Gleichheit aller entsprechenden Winkel und aller entsprechenden Streckenverhältnisse und aller Verhältnisse entsprechender Strecken.

Für die Flächeninhalte ähnlicher Figuren gilt der

Satz:
Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Verhältnisse der Quadrate entsprechender Strecken.

Beispiel: $\dfrac{A'}{A} = \dfrac{a'^2}{a^2} = m^2$

Der Satz folgt aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung.

Der 1. Ähnlichkeitssatz eignet sich zur Herleitung einer praktischen Formel für die Dreieckfläche. Weil jedes Dreieck durch die Länge seiner Seiten eindeutig bestimmt ist, muß auch sein Flächeninhalt aus den drei Seitenlängen berechenbar sein. Der Weg zu dieser Formel führt über vier Stationen:

① Inkreisradius und Fläche

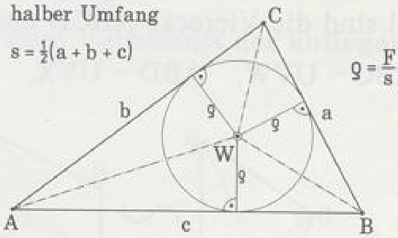
Für die Dreieckfläche F gilt

$F = \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho + \frac{1}{2}c\varrho = \frac{1}{2}(a+b+c)\varrho.$

Den halben Umfang kürzen wir ab mit s:

$\frac{1}{2}(a+b+c) = s.$

Es ergibt sich $F = s\varrho$ bzw. $\varrho = \dfrac{F}{s}$



② Ankreisradius und Fläche

Für die Fläche F′ des Vierecks ABW_aC gilt einerseits

$F' = F + \text{Fläche}\,(BW_aC) = F + \frac{1}{2}a\varrho_a$

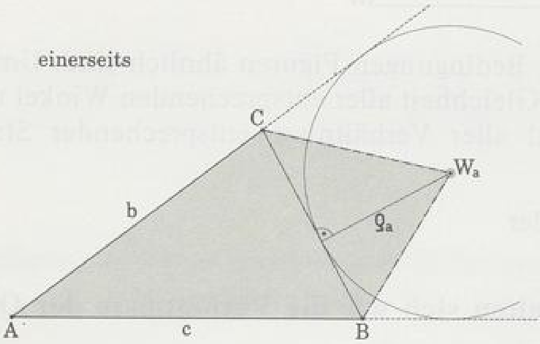
und andrerseits

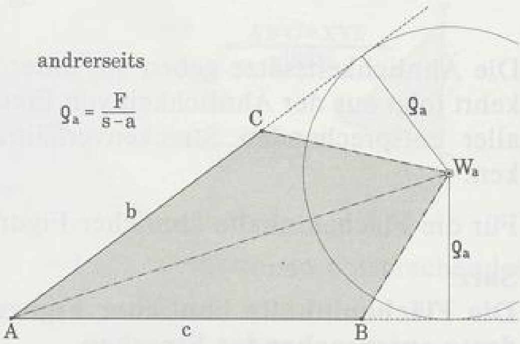
$F' = \text{Fläche}\,(ABW_a) + \text{Fläche}\,(AW_aC) = \frac{1}{2}c\varrho_a + \frac{1}{2}b\varrho_a$

$F + \frac{1}{2}a\varrho_a = \frac{1}{2}c\varrho_a + \frac{1}{2}b\varrho_a$

$F = \frac{1}{2}(c+b-a)\varrho_a = \frac{1}{2}(c+b+a-2a)\varrho_a = (s-a)\varrho_a$

$\varrho_a = \dfrac{F}{s-a}$





③ Tangentenabschnitte

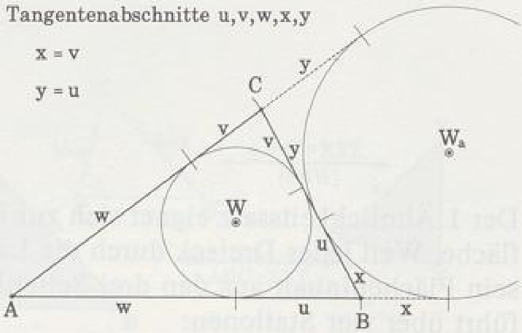
Zwei sich schneidende Tangenten an ein und demselben Kreis haben gleich lange Tangentenabschnitte. Deshalb gilt

einerseits $w + v + y = w + u + x$,

also $v + y = u + x$ (I)

andrerseits $u + v = x + y$ (II).

Aus (I) und (II) ergibt sich $x = v$ und $y = u$.



④ HERON-Formel

Die Innen- und die Außenwinkelhalbierende an der Ecke eines Dreiecks stehen aufeinander senkrecht. Deshalb sind die Winkel VBW_a und UWB gleich groß (paarweise senkrechte Schenkel). Also sind die Dreiecke WUB und BVW_a ähnlich (1. Ähnlichkeitssatz), und es gilt

$$\frac{\varrho}{u} = \frac{v}{\varrho_a}.$$

Außerdem ist

$$s - b = (u + v + w) - (v + w) = u,$$

$$s - c = (u + v + w) - (u + w) = v \quad \text{und damit}$$

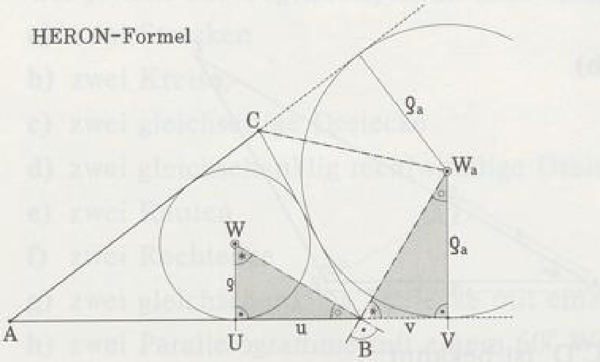
$$\frac{\varrho}{s-b} = \frac{s-c}{\varrho_a}, \quad \text{also} \quad \varrho\varrho_a = (s-b)\ (s-c).$$

Wir setzen ϱ und ϱ_a aus ① und ② ein:

$$\frac{F}{s} \cdot \frac{F}{(s-a)} = (s-b)\ (s-c) \qquad F^2 = s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)$$

$$\boxed{F = \sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}}$$

HERON-Formel



Diese Formel heißt Heron-Formel nach dem griechischen Physiker HERON VON ALEXANDRIA (wahrscheinlich 1. Jahrhundert n. Chr.). Sie war allerdings schon ARCHIMEDES VON SYRAKUS (285 bis 212) bekannt.

Eine kuriose Folgerung:

ebenso wie $\varrho_a = \frac{F}{s-a}$ gilt auch $\varrho_b = \frac{F}{s-b}$ und

$$\varrho_c = \frac{F}{s-c} \quad \text{und damit}$$

$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \frac{F \cdot F \cdot F \cdot F}{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)} = \frac{F^4}{F^2} = F^2, \quad \text{also}$$

$$F = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c}$$

Aufgaben

1. Zeichne das Dreieck ABC und die Strecke [A′C′] mit A(2|2), B(1|0), C(4|2), A′(5|11), C′(5|15). Gib eine Ähnlichkeitsabbildung an, die [AC] auf [A′C′] abbildet; beschreibe die Kongruenzabbildung und die zentrische Streckung genau. 16 / 0 0 10 / 0
Konstruiere B′ vom Dreieck A′B′C′ und gib die Koordinaten an. (Zwei Lösungen!)

2. Zeichne das Dreieck ABC mit A(1|1), B(13,5|1) und C(9|7). D ist Fußpunkt von h_c. 12 / 0 0 14 / 0

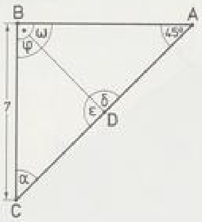
a) Drehe [DB] um D mit +90° (Gegenuhrzeigersinn) und bilde B′ mit einer zentrischen Streckung am Zentrum D auf C ab.
Konstruiere das Bild C″ von C bei dieser zusammengesetzten Abbildung.

b) Spiegle [AC] an w_β und bilde C′ mit einer zentrischen Streckung am Zentrum B auf D ab.
Konstruiere das Bild A″ von A bei dieser Ähnlichkeitsabbildung.

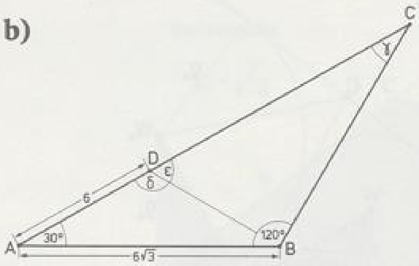
c) Spiegle [AB] an w_α und bilde B′ mit einer zentrischen Streckung am Zentrum A auf C ab.
Konstruiere das Bild C″ von C bei dieser Ähnlichkeitsabbildung.

3. Berechne alle Winkel und Streckenlängen, wenn gilt: $\Delta ABC \sim \Delta ADB$.

a)



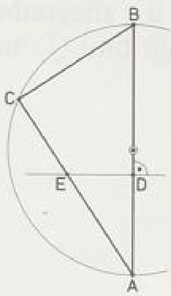
b)



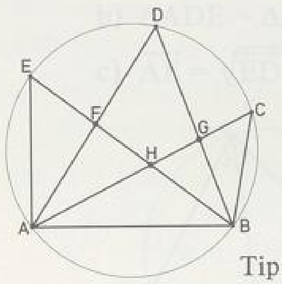
4. Von den Vierecken ABCD und A′B′C′D′ ist bekannt:
ABCD ~ A′B′C′D′, a = 8, b = 6, c = 3, d = 5, Umfang u′ = 33. Berechne a′, b′, c′ und d′.

5. Es gilt: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $a = 4\sqrt{5}$, $b = 5$, $c = 11$, $h_c = 4$ und $b' = 2$.
Berechne a′, c′ sowie die Flächeninhalte F und F′ der Dreiecke.

6. Beweise: $\Delta ABC \sim \Delta ADE$



7. Welche Dreiecke sind ähnlich?



Tip: Umfangswinkel

8. Beweise: Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie
   a) im Winkel an der Spitze
   b) in einem Basiswinkel
   c) im Verhältnis Basis/Schenkel übereinstimmen.

9. Beweise: Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie
   a) in einem spitzen Winkel
   b) im Verhältnis der Katheten übereinstimmen.

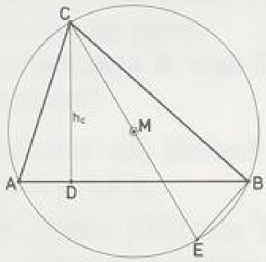
10. In welchen Fällen sind die Figuren sicher ähnlich?
Gib jeweils ein Gegenbeispiel an (falls möglich).
   a) zwei Strecken
   b) zwei Kreise
   c) zwei gleichseitige Dreiecke
   d) zwei gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke
   e) zwei Rauten
   f) zwei Rechtecke
   g) zwei gleichschenklige Dreiecke mit einem 50°-Winkel
   h) zwei Parallelogramme mit einem 60°-Winkel
   i) zwei Quadrate.

11. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Spitze C. Der Kreis um A mit Radius c schneidet CB in D.
   a) Zeige: $\Delta ABD \sim \Delta CAB$
   b) Zeige: $\overline{AB}$ ist geometrisches Mittel von $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$, das heißt: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}$.
   c) Bei welchen Dreiecken ABC ist der Flächeninhalt vom Dreieck ABD kleiner/gleich/größer als der vom Dreieck ABC?

12. Zeichne ein Dreieck ABC mit den drei Höhen; H ist der Höhenschnittpunkt, und H_a, H_b, H_c sind die Höhenfußpunkte.
   a) Welche Dreiecke sind dem Dreieck AHH_c ähnlich?
   b) Folgere durch Auswahl geeigneter ähnlicher Dreiecke: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

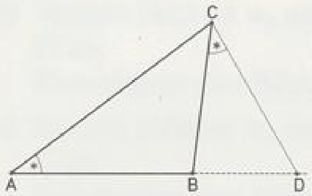
• **13.** Zeige: **a)** ADC ~ ΔCEB

b) $\overline{ME} = r = \dfrac{ab}{2h_c}$ und $F = \dfrac{abc}{4r}$

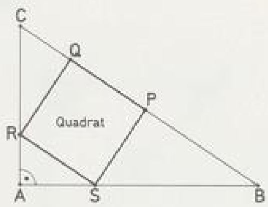


Tip: Umfangswinkel

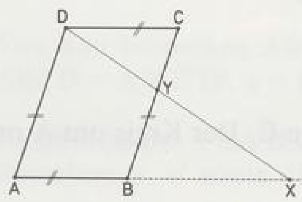
14. Zeige: $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}$



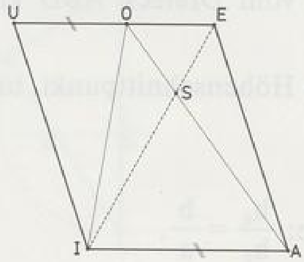
15. Zeige: $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CQ} \cdot \overline{PB}}$



16. Zeige: $\overline{CY} \cdot \overline{AX} = \text{const}$



17. Zeige: $\overline{OS} \cdot \overline{SI} = \overline{ES} \cdot \overline{SA}$

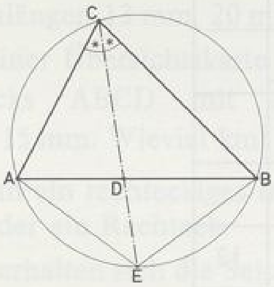


Tip: Umfangswinkel

18. Zeige: **a)** $\overline{AE} = \overline{EB}$

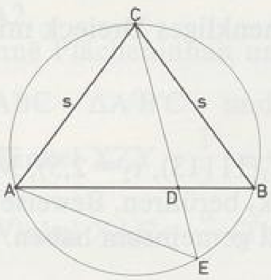
b) $\Delta ADE \sim \Delta BCD$

c) $\overline{AE} = \sqrt{\overline{ED} \cdot \overline{CE}}$



Tip: Umfangswinkel

19. Zeige: $s = \sqrt{\overline{CD} \cdot \overline{CE}}$



Tip: Umfangswinkel

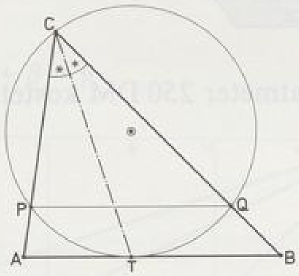
20. w_γ schneidet [AB] in T, ein Kreis k durch C berührt AB in T.
Zeige:

a) Die Sehne [PQ] ist parallel AB.

b) $\Delta CPT \sim \Delta CTB$

c) $\Delta CQT \sim \Delta CAT$

d) $\overline{CT} = \sqrt{\overline{CP} \cdot \overline{CB}} = \sqrt{\overline{CQ} \cdot \overline{CA}}$



21. **a)** Wie lautet die HERON-Formel für ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a?

b) Berechne a, falls $4F = 27\sqrt{3}$.

c) Berechne die Höhe für das Dreieck in **b)**.

22. Berechne die fehlenden Stücke des Dreiecks ABC; u ist der Umfang.

	F	a	b	c	u	h_a	h_b	h_c
a)		4	13	15				
b)			10	17	36			
c)	$16\sqrt{3}$		a	a				
d)	12		a	8				
• e)				14	42			12
⁞ f)	42			20		12		

23. **a)** Wie lautet die HERON-Formel für ein gleichschenkliges Dreieck mit a = b?

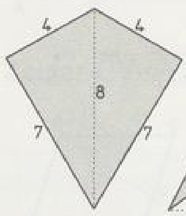
b) Berechne F, falls a = b = 5 und c = 6 ist.

c) Berechne h_a und h_c für das Dreieck in **b)**.

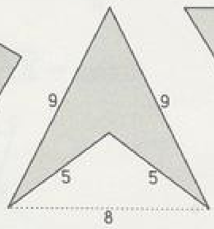
⁞24. Zeichne die Kreise k_1 $(M_1(5\,|\,5),\ r_1 = 5)$ und k_2 $(M_2(11\,|\,13),\ r_2 = 2{,}5)$, $\overline{M_1M_2} = 10$. Konstruiere die Kreise mit Radius 1,5, die k_1 und k_2 berühren. Beweise mit der HERON-Formel, daß die konstruierten Kreise keinen Punkt gemeinsam haben. Wie nahe kommen sich die Kreise?

25. Flächeninhalt?

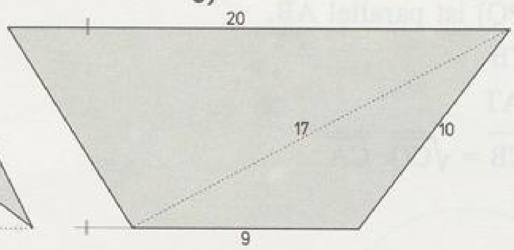
a)



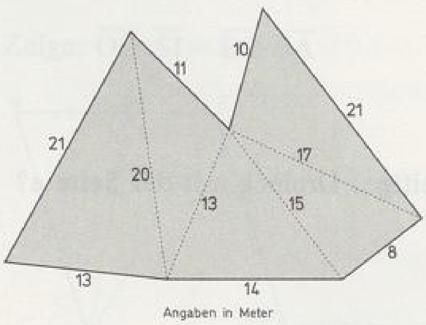
b)



c)



26. Wie teuer ist das Grundstück, wenn ein Quadratmeter 250 DM kostet?



27. Mit der HERON-Formel können wir aus den Seiten den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen. Bis heute hat man keine Formel gefunden, mit der man aus den Seiten den Flächeninhalt eines Vierecks berechnen kann. Warum wohl?

28. **a)** Auf einem Meßtischblatt (Maßstab 1:5000) hat ein dreieckiges Grundstück die Seitenlängen 13 mm, 20 mm und 21 mm. Wieviel m^2 hat das Grundstück?

b) Auf einer Übersichtskarte (Maßstab 1:500000) hat ein See etwa die Form eines Vierecks ABCD mit $\overline{AB} = 13\,mm = \overline{DC}$, $\overline{BC} = 14\,mm$, $\overline{AD} = 4\,mm$ und $\overline{AC} = 15\,mm$. Wieviel km^2 hat der See?

•**29.** Faltet man ein rechteckiges Blatt so, daß die längeren Seiten halbiert werden, so entsteht wieder ein Rechteck.

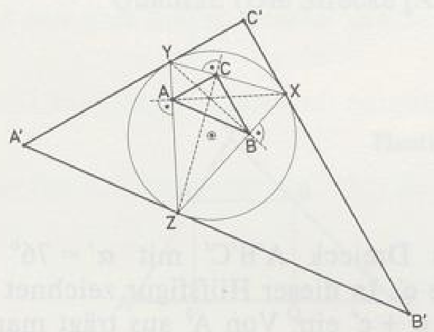
a) Wie verhalten sich die Seiten des Rechtecks, wenn beide Rechtecke ähnlich sind?

b) Die DIN-A…-Rechtecke haben die Eigenschaft des Rechtecks von **a)**, und das DIN-A0-Rechteck hat den Flächeninhalt von einem Quadratmeter. Beim Falten des DIN-A0-Rechtecks entstehen der Reihe nach Rechtecke vom Format DIN-A1, DIN-A2, …
Berechne Flächeninhalt und Seitenlängen des DIN-A4-Rechtecks.

⁝**30.** Zeige: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ und $AB \parallel A'B'$.

Hilfen: Winkel $XZY = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, Winkel $XZC = \frac{\alpha}{2}$,

Winkel $XAC = \frac{\alpha}{2}$ (Thales über [XZ])



⁝**31.** Zeige: $\alpha + \beta = \gamma$