Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

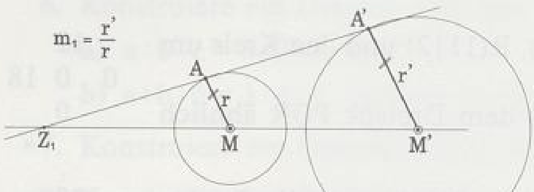
München, 1995

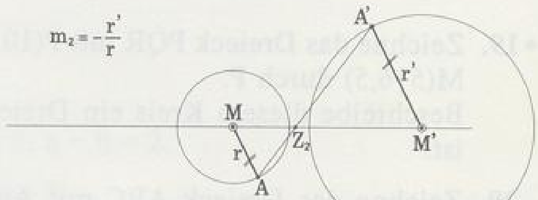
4.4 Ähnlichkeit und Kreis

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

* 4.4 Ähnlichkeit und Kreis

Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die die eine auf die andre abbildet. Bei zwei nicht kongruenten Kreisen gibt es immer zwei zentrische Streckungen, die den kleineren auf den größeren abbilden. Das Zentrum Z liegt auf der Zentrale MM′, weil M′ das Bild von M ist. Zwei parallele Radien bestimmen ein weiteres Paar von Punkt und Bildpunkt (im Bild sind es A und A′). Die Gerade AA′ schneidet MM′ in Z. Für die Streckfaktoren gilt $m_1 = \frac{r'}{r}$, $m_2 = -\frac{r'}{r}$.

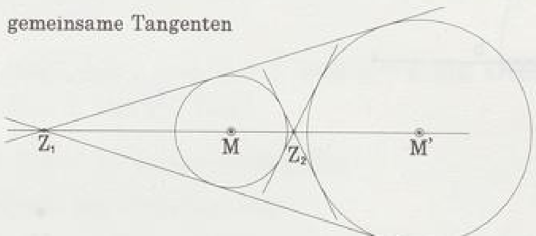




Weil kongruente Kreise sowieso ähnlich sind, gilt der

Satz:
Alle Kreise sind ähnlich.

Legt man von den Zentren Z_1 und Z_2 die Tangenten an einen der beiden Kreise, so bekommt man die gemeinsamen inneren und äußeren Tangenten der beiden Kreise.

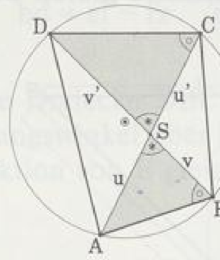


Begründung: Tangenten des einen Kreises werden auf Tangenten des andern Kreises abgebildet. Außerdem ist jede Gerade durchs Zentrum Fixgerade.

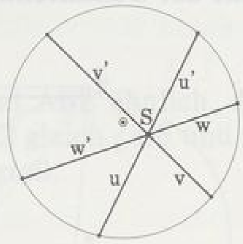
Mit den Eigenschaften der Ähnlichkeit und dem Umfangswinkelsatz beweisen wir einige wichtige Sätze über Sehnen, Sekanten und Tangenten.

Im Sehnenviereck ABCD sind die Winkel ABD und ACD gleich groß, weil sie über derselben Sehne [AD] als Umfangswinkel stehen. Die Winkel ASB und DSC sind gleich groß, weil sie Scheitelwinkel sind. Deshalb stimmen die Dreiecke ABS und CDS in den Winkeln überein und sind ähnlich. Also gilt $u : v = v' : u'$ oder $uu' = vv'$. Es gilt der

Sehnensatz:
Zeichnet man durch einen beliebigen Punkt S in einem Kreis verschiedene Sehnen, so ist das Produkt der jeweiligen Sehnenabschnitte eine Konstante.



$\boxed{uu' = vv'}$

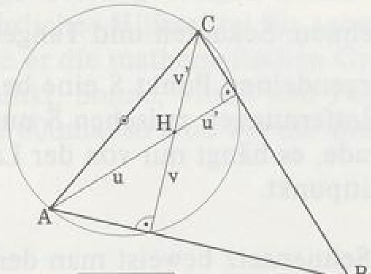


$\boxed{uu' = vv' = ww' = \text{const}}$

Eine direkte Folgerung ist der

Höhenabschnitt-Satz:
Im Dreieck zerlegt der Höhenschnittpunkt die Höhen so, daß das Produkt der Höhenabschnitte bei allen drei Höhen konstant ist.

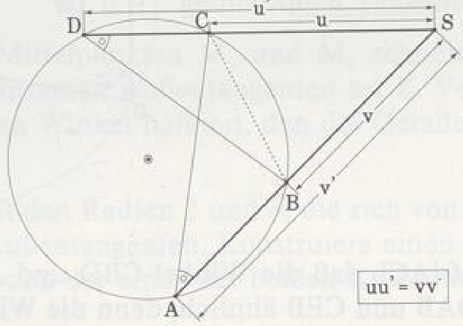
(Beweis mit Sehnensatz und Thaleskreis)



$\boxed{uu' = vv'}$

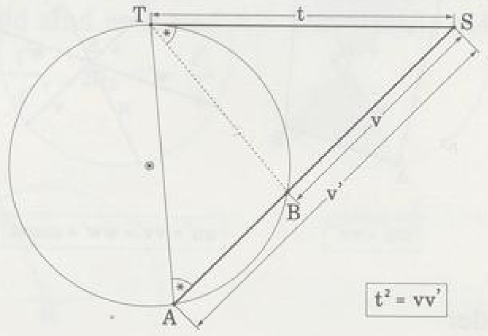
Liegt S außerhalb des Kreises, so gilt ein entsprechender Satz für die Sekantenabschnitte. Die Dreiecke SAC und SBD sind ähnlich, weil sie bei S einen gemeinsamen Winkel haben und in den Winkeln bei A und D übereinstimmen (Umfangswinkel der derselben Sehne [BC]). Also gilt $u : v = v' : u'$ oder $uu' = vv'$. Es gilt der

Sekantensatz:
Zeichnet man durch einen Punkt S außerhalb eines Kreises verschiedene Sekanten, so ist das Produkt der jeweiligen Sekantenabschnitte eine Konstante.



Ein Sonderfall ist der

Sekanten-Tangentensatz:
Zeichnet man durch einen Punkt S außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante, so ist das Produkt der Sekantenabschnitte gleich dem Quadrat des Tangenabschnitts $vv' = t^2$.



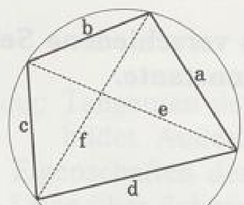
Beweis: Die Dreiecke SAT und SBT sind ähnlich, weil sie bei S einen gemeinsamen Winkel haben und der Umfangswinkel bei A so groß ist wie der Sehnen-Tangenten-Winkel bei T.

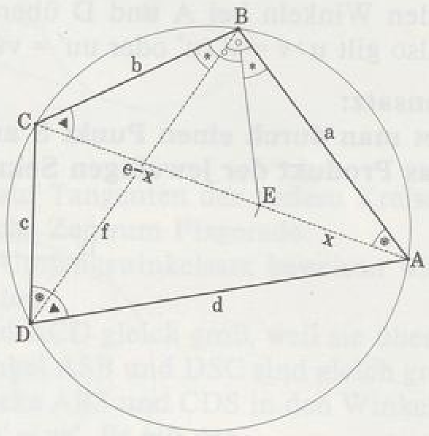
Die Sätze über Sehnen, Sekanten und Tangenten lassen sich zusammenfassen:

Legt man durch irgendeinen Punkt S eine beliebige Gerade, die einen Kreis trifft, dann ist das Produkt der Entfernungen zwischen S und den beiden Schnittpunkten unabhängig von der Wahl der Gerade, es hängt nur von der Lage von S ab. Ein Berührpunkt zählt dabei als »doppelter« Schnittpunkt.

Ähnlich wie den Sehnensatz beweist man den

Satz von Ptolemaios:
In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen so groß wie die Summe der Produkte der Gegenseiten: $ef = ac + bd$.





Beweis: Wir wählen E so auf [AC], daß die Winkel CBD und ABE gleich sind. Dann sind auch die Dreiecke DAB und CEB ähnlich, denn die Winkel BCA und BDA sind als

Umfangswinkel über [AB] gleich groß, und die Winkel DBA und DBE sind nach Konstruktion von E gleich groß.
Folglich gilt

$$\frac{d}{f} = \frac{e-x}{b}, \quad \text{also} \quad bd = ef - fx \quad ⦿$$

Außerdem sind die Dreiecke DBC und ABE ähnlich, denn die Winkel BAC und BDC sind als Umfangswinkel über [BC] gleich groß und die Winkel DBC und ABE sind nach Konstruktion von E gleich groß.
Folglich gilt:

$$\frac{c}{f} = \frac{x}{a}, \quad \text{also} \quad ac = fx.$$

Setzen wir fx = ac in ⦿ ein, so ergibt sich bd = ef − ac oder ac + bd = ef, w.z.b.w.

Satz und Beweis sind fast 2 000 Jahre alt. Gefunden hat sie der ägyptische Astronom KLAUDIOS PTOLEMAIOS (≈100 bis ≈160). PTOLEMAIOS lebte in Alexandria. Mit diesem Satz leitete er seine berühmten Sehnentafeln ab. Sehnentafeln sind mathematische Tabellen, die zum Mittelpunktswinkel im Einheitskreis die Länge der zugehörigen Sehne enthalten. Noch 1 000 Jahre später waren seine Tafeln unentbehrliches Hilfsmittel für geometrische Berechnungen. In seinem Hauptwerk »Almagest« legte er die mathematischen Grundlagen des damaligen Weltbilds: Die Erde steht im Mittelpunkt, Sonne, Mond und Planeten umkreisen sie. Auf einer Kugelschale mit einem Radius 20 000mal so groß wie der Erdradius sitzen die Fixsterne. (Geozentrisches System)

Aufgaben

1. Konstruiere die gemeinsamen Tangenten zweier Kreise für folgende Fälle

a) $\overline{M_1M_2} = 6$, $r_1 = 3$, $r_2 = 1{,}5$

b) $\overline{M_1M_2} = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$

c) $\overline{M_1M_2} = 8$, $r_1 = r_2 = 3$

2. Gib die gegenseitige Lage zweier Kreise an, die

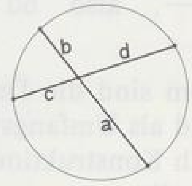
a) 3 **b)** 2 **c)** 1 **d)** 0 gemeinsame Tangenten haben!

3. Zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 schneiden sich in A und B. Der Schnittpunkt der gemeinsamen Außentangenten sei Z. Verbinde A mit Z und zeige, daß AZ einen der beiden Winkel halbiert, den die Geraden M_1A und M_2A miteinander einschließen!

4. Zeichne zwei Kreise mit den Radien 2 und 3, die sich von außen berühren, sowie ihre beiden gemeinsamen Außentangenten. Konstruiere einen weiteren Kreis, der die beiden Tangenten berührt und der einen der beiden Kreise berührt. Berechne seinen Radius!

5. Zeichne zwei Kreise mit den Radien 3 und 4, die sich von außen berühren. Konstruiere alle Geraden, aus denen von beiden Kreisen je eine Sehne der Länge 5 ausgeschnitten wird! (*Hinweis:* Wo liegen die Mittelpunkte aller Sehnen der Länge 5 in einem gegebenen Kreis?)

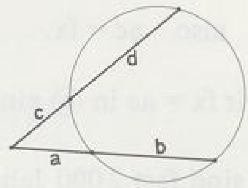
6. Berechne die unbekannten Streckenlängen



a) $a = 7,\ b = 1,\ c : d = 1 : 2$

b) $a : b = 5 : 3,\ c : d = 4 : 15,\ a + b = 24$

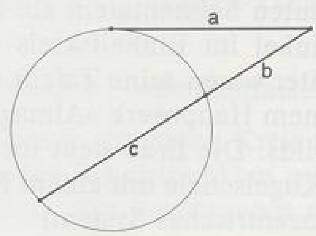
7. Wie **6.**



a) $a = 8,\ b = 4,\ c = 6{,}4$

b) $a : b = 5 : 9,\ c : d = 7 : 3,\ d = 9$

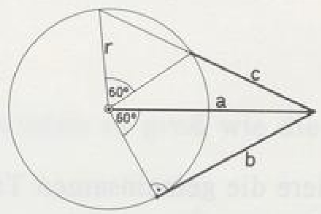
8. Wie **6.**



a) $a = 12,\ b : c = 4 : 5$

b) $a : b = 9 : 5,\ c = 5{,}6$

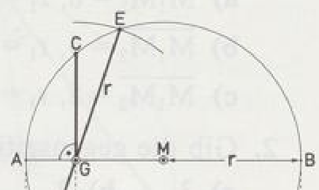
•9. Zeichne die Figur für $r = 5$ und begründe:



a) $a = 2r,\ b = r\sqrt{3}$

b) $c = \frac{r}{2}(\sqrt{13} - 1)$

10. MITTELEI



a) Zeichne die Figur für $a = 2$ und $b = 6$.

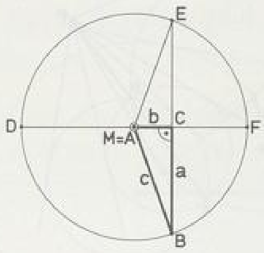
b) Begründe: $\overline{GE} = \frac{a + b}{2}$ (arithmetisches Mittel)

c) Begründe: $\overline{GC} = \sqrt{ab}$ (geometrisches Mittel)

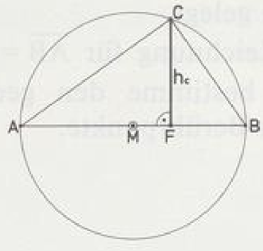
d) Begründe: $\overline{GF} = \frac{2ab}{a + b}$ (harmonisches Mittel)

11. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ und den Höhenfußpunkt F von h_c.
Beweise: $\overline{AC}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AB}$ und $\overline{BC}^2 = \overline{BF} \cdot \overline{AB}$.
(Tip: Thales über [BC] bzw. über [AC])

12. Zeige: $c^2 = a^2 + b^2$

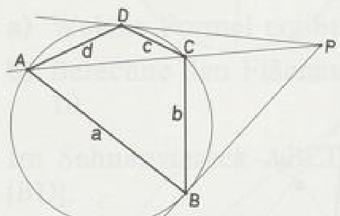


13. Zeige: $h_c^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FB}$

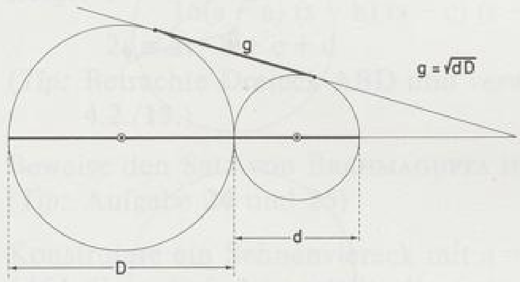


14. Zeichne den Kreis k_1 mit Radius r und den dazu konzentrischen Kreis k_2 mit Radius 2r sowie einen Punkt P auf k_2.
Zeige: Zeichnet man von P aus die Tangente an k_1, so hat der Tangentenabschnitt die Länge $r\sqrt{3}$.

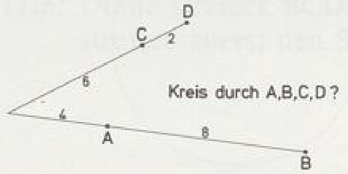
:15. Die Tangenten durch P berühren in B und D. PA ist eine beliebige Sekante, sie schneidet den Kreis noch in C. Zeige: ac = bd.



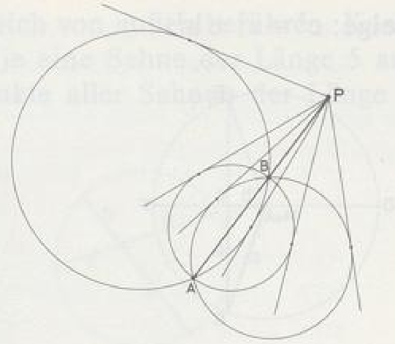
⋮16. Zwei Kreise berühren sich von außen.
Zeige: Die Länge g der gemeinsamen Tangentenstrecke ist das geometrische Mittel der beiden Durchmesser b und D:
$g = \sqrt{dD}$.



:17. a) Formuliere die Umkehrung des Sekantensatzes und beweise sie.
b) Liegen A, B, C und D auf einem Kreis?



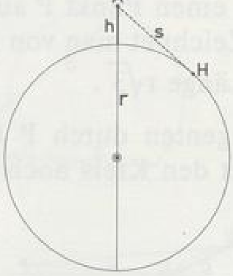
18. [AB] ist gemeinsame Sehne von Kreisen. Von P (auf AB) sind alle Tangenten an die Kreise gelegt.
Mach eine Zeichnung für $\overline{AB} = 5$ und $\overline{PB} = 4$ und bestimme den geometrischen Ort der Berührpunkte.



19. SEHWEITE
Ein Auge A in der Höhe h sieht den Horizont H in der Entfernung s.

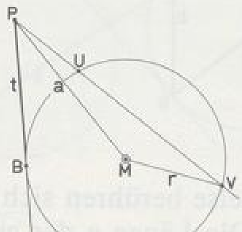
a) Zeige: $s = \sqrt{h^2 + 2hr}$.

b) Berechne s für die Höhen 2 m, 100 m, 2 km und 10 km. (Erdradius 6 370 km)

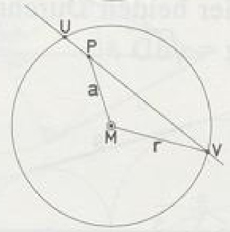


20. POTENZ

a) Liegt ein Punkt P außerhalb eines Kreises k, dann heißt $t^2 = \overline{PU} \cdot \overline{PV}$ die Potenz p von P bezüglich k. Zeige: $p = a^2 - r^2$. Wo liegen alle Punkte mit gleicher Potenz p?



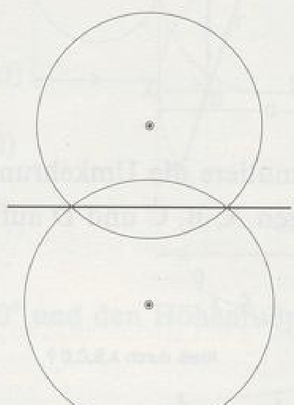
b) Liegt ein Punkt P innerhalb eines Kreises k, dann heißt die Zahl $-\overline{PU} \cdot \overline{PV}$ die Potenz p von P bezüglich k. Zeige: $p = a^2 - r^2$. Wo liegen alle Punkte mit gleicher Potenz $p < 0$? Wie groß kann p sein? Wo liegen alle Punkte mit $p = 0$?



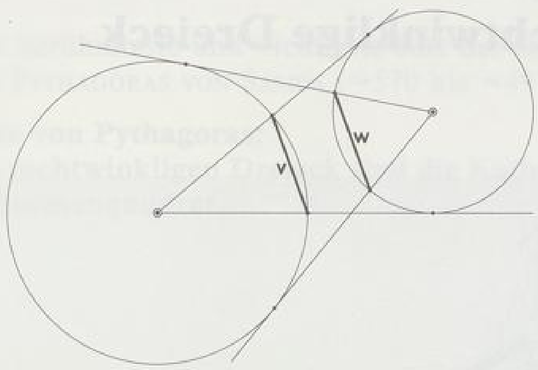
•21. POTENZGERADE

a) Zeige: Der geometrische Ort der Punkte mit gleicher Potenz bezüglich zweier sich schneidender Kreise ist die Chordale.

b) Zeige: Schneidet ein Kreis die beiden Kreise rechtwinklig, dann liegt sein Mittelpunkt auf der Chordale.



22. Zeige: v = w



23. Im 7. Jahrhundert hat der indische Mathematiker und Astronom BRAHMAGUPTA eine Formel gefunden, mit der sich der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks aus den Seiten berechnen läßt:
$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, wobei $2s = a + b + c + d$ ist.

a) Welche Formel ergibt sich für $d = 0$?

b) Berechne den Flächeninhalt vom Sehnenviereck mit den Seitenlängen 5, 6, 7 und 10.

•24. Im Sehnenviereck ABCD ist e die Länge der Diagonale [AC] und f die Länge von [BD].
Zeige: $e^2 = \dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$ $\quad f^2 = \dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$
(*Tip:* Es gibt drei verschiedene Sehnenvierecke mit a, b, c und d als Seitenlängen. Wende dann dreimal Ptolemaios an!)

•25. r ist der Umkreisradius des Sehnenvierecks ABCD.
Zeige: $r^2 = \dfrac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ mit
$2s = a + b + c + d$
(*Tip:* Betrachte Dreieck ABD und verwende »$4r \cdot$ Dreieckfläche = adf«, siehe Aufgabe 4.2./**13.**)

•26. Beweise den Satz von BRAHMAGUPTA in Aufgabe **23.**
(*Tip:* Aufgabe **24** und **25**)

•27. Konstruiere ein Sehnenviereck mit $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$ und $d = 6$. REGIOMONTANUS hat 1464 diese Aufgabe gestellt, die erste Lösung (1585) stammt von dem italienischen Mathematiker BENEDETTI. (REGIOMONTANUS war der deutsche Mathematiker und Astronom Johannes MÜLLER, er nannte sich nach seinem latinisierten Geburtsort Königsberg.)
(*Tip:* Drehe Dreieck BCD und B in die Lage BC′D′, so daß C′ auf AB liegt, und konstruiere zuerst den Schnittpunkt von AB und DD′.)