Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

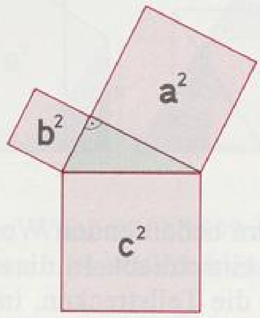
München, 1995

5.1 Die Sätze

5.1 Die Sätze

Der berühmteste und wichtigste Satz der Geometrie ist nach dem griechischen Mathematiker PYTHAGORAS VON SAMOS (≈570 bis ≈497) benannt.

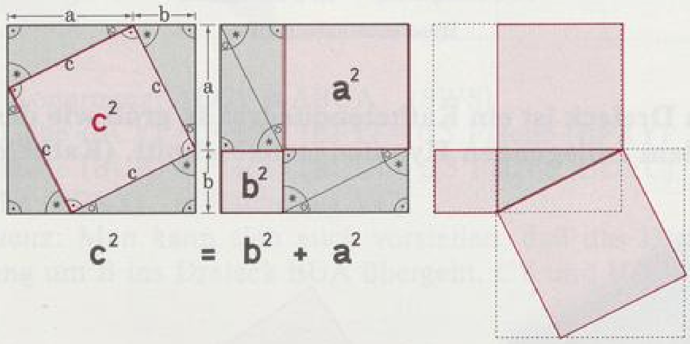
Satz von Pythagoras:
Im rechtwinkligen Dreieck sind die Kathetenquadrate zusammen so groß wie das Hypotenusenquadrat.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Für diesen Satz kennt man heute etwa 400 Beweise. Aus Platzgründen führen wir bloß einige vor.

Beweis von PYTHAGORAS: Der einfachste Beweis stammt vermutlich von ihm selber, man findet ihn aber auch im chinesischen Manuskript Chou-Pei aus der Han-Dynastie (206 v. Chr. bis 220 n. Chr.).

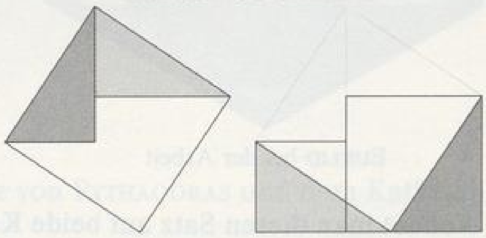


$$c^2 = b^2 + a^2$$

Der Beweis beruht auf der Ergänzungsgleichheit von Figuren. In einen quadratischen Rahmen (Seitenlänge a + b) legt man vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b. Je nach Anordnung bleibt einmal das Hypotenusenquadrat (c^2) und das andere Mal die beiden Kathetenquadrate (a^2, b^2) übrig.

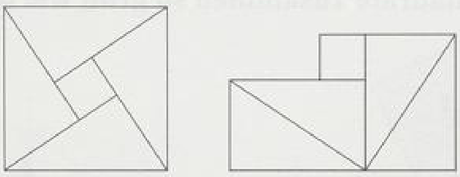
Beweis von NAIRIZI: Der arabische Mathematiker und Astronom ABU-L-ABBASAL-FADLIBN HATIM AN-NAIRIZI (um 900, Bagdad) zeigt, wie man das Hypotenusenquadrat in die beiden Kathetenquadrate verwandelt, indem man zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke verschiebt.

Beweis von NAIRIZI

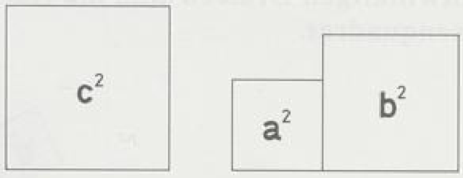


Beweis von BHASKARA: Der indische Mathematiker und Astronom BHASKARA ATSCHARJA (1114 bis $\approx$1178) bringt in seinem um 1150 entstandenen Werk »Stirnjuwel der Lehrmeinungen« einen Beweis, der nur aus zwei Zeichnungen und einem Hinweis besteht. Wer's indisch nicht sieht, studiere die erklärenden Bilder:

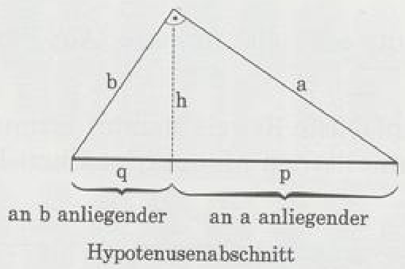
KUKMALDHA



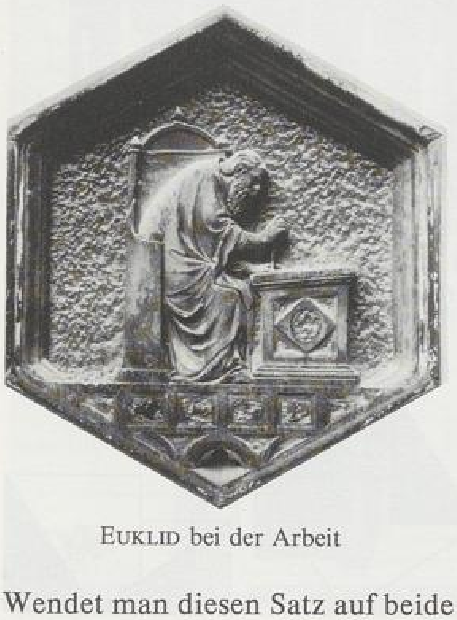
SCHAUHIN



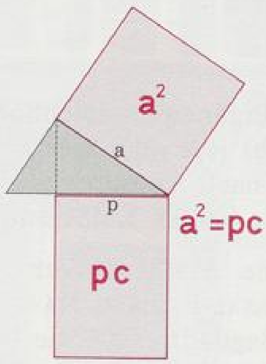
Um 300 v. Chr. hat EUKLID in seinem bedeutenden Werk »Die Elemente« einen Satz bewiesen, der den Satz von PYTHAGORAS einschließt. In diesem Satz kommen die **Hypotenusenabschnitte q** und **p** vor – das sind die Teilstrecken, in die der Höhenfußpunkt die Hypotenuse zerlegt.

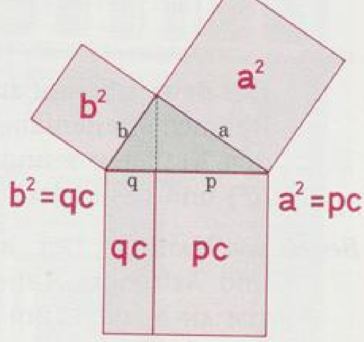


Satz von Euklid:
Im rechtwinkligen Dreieck ist ein Kathetenquadrat so groß wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt. (Kathetensatz)



EUKLID bei der Arbeit

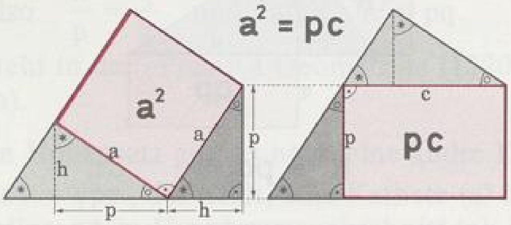




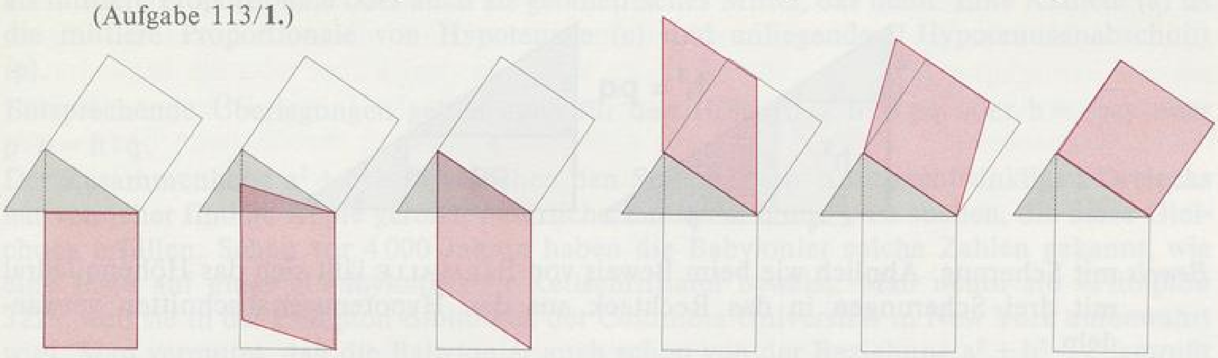
$$b^2 + a^2 = qc + pc = (q+p)c = c^2$$

Wendet man diesen Satz auf beide Katheten an, so ergibt sich der Satz von PYTHAGORAS.

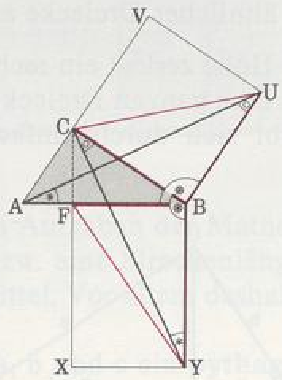
Beweis nach FEGERT: Dieser besonders einfache Beweis beruht auf der Ergänzungsgleichheit zweier Figuren. In einen viereckigen Rahmen legt man zwei rechtwinklige Dreiecke. Je nach Anordnung bleibt einmal das Kathetenquadrat (a^2) und das andere Mal ein Rechteck (pc) übrig.



Beweis von BARAVALLE (HERMANN VON, Wien 25. 5. 1898 bis 6. 7. 1973 Buchenbach bei Freiburg): In einer Bildfolge kommen eine Verschiebung und zwei Scherungen vor. (Aufgabe 113/1.)

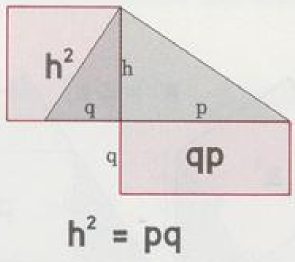


Beweis von EUKLID: Kongruenz: $\Delta BCY \cong \Delta BUA$ (SWS)
Scherung: Fläche (BCY) = Fläche (BFY) = 0,5 Fläche (BFXY)
Scherung: Fläche (BUA) = Fläche (BUC) = 0,5 Fläche (BUVC)
also ist Fläche (BFXY) = Fläche (BUVC).
(Zur Kongruenz: Man kann sich auch vorstellen, daß das Dreieck BCY bei einer Vierteldrehung um B ins Dreieck BUA übergeht. CY und UA sind zueinander senkrecht.)

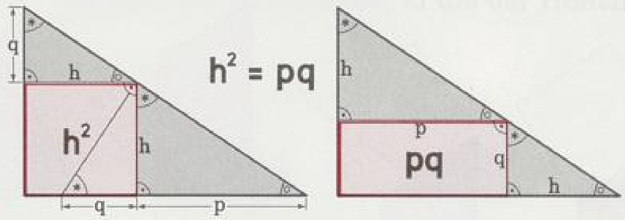


»Die Elemente« von EUKLID enthalten neben dem Satz von PYTHAGORAS und dem Kathetensatz noch einen dritten Flächensatz:

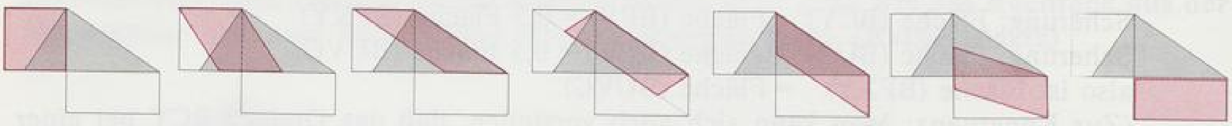
Höhensatz:
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Höhenquadrat so groß wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.



Beweis mit Ergänzungsgleichheit: In einen dreieckigen Rahmen legt man zwei rechtwinklige Dreiecke. Je nach Anordnung bleibt einmal das Höhenquadrat (h^2) und das andere Mal ein Rechteck (pq) übrig.

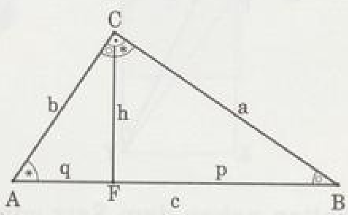


Beweis mit Scherung: Ähnlich wie beim Beweis von Baravalle läßt sich das Höhenquadrat mit drei Scherungen in das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten verwandeln.
(Aufgabe 2)



Der Pythagoras-, der Katheten- und der Höhensatz lassen sich aber auch ganz anders beweisen: Man nutzt die Eigenschaften ähnlicher Dreiecke aus.

Beweis für alle 3 Flächensätze: Die Höhe zerlegt ein rechtwinkliges Dreieck in zwei ähnliche Teildreiecke, die auch noch dem ganzen Dreieck ähnlich sind. Wegen der Gleichheit der Seitenverhältnisse ergibt sich durch einfache Umformung der Satz von Euklid:



$\triangle AFC \sim \triangle CFB \sim \triangle ABC$

$\Delta CFB \sim \Delta ABC$, also $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$ und damit $a^2 = pc$.

Entsprechend ergibt sich $b^2 = pc$ und daraus der Satz von PYTHAGORAS $a^2 + b^2 = pc + qc = (p+q) \cdot c = c^2$.

Den Höhensatz schließlich findet man so:

$\Delta CFB \sim \Delta AFC$, also $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ und damit $h^2 = pq$.

Der letzte Beweis steht in der »Practica Geometria« (1220) von Leonardo FIBONACCI (1170 bis 1240, Pisa).

Für den Katheten- und den Höhensatz gibt es noch eine andre Deutung: Der Kathetensatz läßt sich auch schreiben als $a = \sqrt{pc}$, das heißt, eine Kathete (a) ist das geometrische Mittel von Hypotenuse (c) und anliegendem Hypotenusenabschnitt (p). Der Kathetensatz läßt sich aber auch schreiben als Proportion $c : a = a : p$. In dieser Gleichung steht a nicht nur bildlich zwischen c und p, auch dem Wert nach liegt a zwischen c und p. Deshalb bezeichnet man a als mittlere Proportionale oder auch als geometrisches Mittel, das heißt: Eine Kathete (a) ist die mittlere Proportionale von Hypotenuse (c) und anliegendem Hypotenusenabschnitt (p).

Entsprechende Überlegungen gelten auch für den Höhensatz $h^2 = pq$ oder $h = \sqrt{pq}$ oder $p : h = h : q$.

Der Zusammenhang $a^2 + b^2 = c^2$ zwischen den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks hat von jeher findige Köpfe gereizt, natürliche Zahlen a, b und c zu suchen, die diese Gleichung erfüllen. Schon vor 4000 Jahren haben die Babylonier solche Zahlen gekannt, wie eine Liste auf einer altbabylonischen Keilschrifttafel beweist. Man nennt sie »Plimpton 322«, weil sie in der Plimpton Bibliothek der Columbia Universität in New York aufbewahrt wird. Man vermutet, daß die Babylonier auch schon von der Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gewußt haben, aber als Baumeister und Landvermesser keine Notwendigkeit sahen, sie zu beweisen.

Eine der häufigsten und wichtigsten Aufgaben der Mathematik und ihrer Anwendungen ist es, die Entfernung zweier Punkte bzw. eine Streckenlänge zu berechnen. Der Satz von PYTHAGORAS ist dazu das einfachste Mittel. Vor allem deshalb ist er in der Geometrie so unentbehrlich.

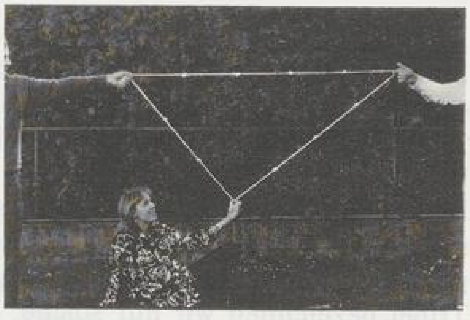
Man nennt drei natürliche Zahlen a, b und c ein **pythagoräisches Zahlentripel,** wenn für sie gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Das einfachste ist 3, 4 und 5. Auch 6, 8 und 10 oder 9, 12 und 15 sind pythagoräische Tripel; die zugehörigen Dreiecke sind ähnlich. Als **primitive** pythagoräische Tripel bezeichnen wir nur solche, deren Zahlen keinen gemeinsamen Teiler haben. Man weiß heute, daß es unendlich viele primitive pythagoräische Tripel gibt. In der Tabelle stehen alle mit $c < 100$.

a	3	5	8	7	20	12	9	28	11	16	33	48	13	36	39	65
b	4	12	15	24	21	35	40	45	60	63	56	55	84	77	80	72
c	5	13	17	25	29	37	41	53	61	65	65	73	85	85	89	97

Die Untersuchung der pythagoräischen Tripel hat zu einem der bekanntesten bis heute ungelösten Probleme der Mathematik geführt. Der französische Jurist und Hobby-Mathematiker Pierre Fermat (1601 bis 1655) las in der »Arithmetica« des griechischen Mathematikers Diophantos von Alexandria (≈ 250 n. Chr.), daß man mit den Formeln $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$ und $c = x^2 + y^2$ alle primitiven pythagoräischen Tripel erzeugen kann (wenn x, y teilerfremde natürliche Zahlen sind und die Differenz $x - y$ ungerade ist). Fermat wollte wissen, ob sich entsprechende Gleichungen wie $a^3 + b^3 = c^3$, $a^4 + b^4 = c^4$ oder allgemein $a^n + b^n = c^n$ mit ganzzahligen Tripeln lösen lassen, und schrieb auf den Rand der Arithmetica die folgenschwere Bemerkung: »Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen. Ich habe dafür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist der Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen«, das heißt: die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat nach Fermat für $n > 2$ keine Lösung mit natürlichen Zahlen.

Seit Fermat 1637 dies geschrieben hatte, suchte man nach diesem Beweis. Fermat fand einen Beweis für $n = 4$. 1825 bewies A. Legendre, daß die Vermutung für $n = 5$ stimmt. Schon 1770 konnte L. Euler den Fall $n = 3$ und 1839 G. Lamé $n = 7$ erledigen. E. Kummer (1810 bis 1893) zeigte, daß Fermat für alle Primzahlen einer besonderen Art recht hatte. Seit 1976 weiß man nach S. Wagstaff, daß die Vermutung für $n \leqq 125\,000$ stimmt. Einen großen Schritt schaffte der deutsche Mathematiker G. Faltings (geb. 1954) im Jahr 1983: er zeigte, daß die Gleichung für $n > 3$, wenn überhaupt, dann nur endlich viele Lösungen hat. Für diese Leistung erhielt er 1986 die berühmte Fields-Medaille, das mathematische Gegenstück zum Nobelpreis. Am 23. Juni 1993 sorgte der englische Zahlentheoretiker Andrew Wiles für eine Sensation. In einem Vortrag an der Universität Cambridge gab er das Ergebnis seiner neunjährigen Forschungsarbeit bekannt: Fermat hatte recht! Der vollständige Beweis für die Fermatsche Vermutung ist in einer mehrere hundert Seiten umfassenden Abhandlung nachzulesen. Zur Zeit überprüfen ihn Mathematiker in der ganzen Welt. Wenn sie keinen Fehler entdecken, dann ist eine der härtesten Nüsse der Mathematik nach mehr als 350jährigem Ringen geknackt.

Beim Bau der Pyramiden haben die Ägypter rechte Winkel schon verblüffend genau erreicht. Angeblich verwendeten sie dabei das Verfahren des Seilspannens. Die Seilspanner (Harpedonapten) nahmen ein Seil mit 13 gleichabständigen Knoten und zogen es um Pflöcke zum 3-4-5-Dreieck. So entstand der 90°-Winkel ganz von selber.



Liefert jedes pythagoräische Tripel ein rechtwinkliges Dreieck, das heißt, ist der Satz von PYTHAGORAS umkehrbar? Schon EUKLID hat bewiesen, daß auch die Umkehrung stimmt.

Umkehrung des Satzes von Pythagoras:
Wenn für die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks gilt $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist der Gegenwinkel von c gleich 90°.

Beweis: Nach dem Satz von PYTHAGORAS hat in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b die Hypotenuse die Länge $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Weil es zu drei Seiten a, b und c aber nur ein Dreieck gibt (SSS-Satz), muß das Dreieck bei C rechtwinklig sein.

5.2 Wichtige Formeln

Diagonale im Quadrat und Höhe im gleichseitigen Dreieck

Diagonale im Quadrat

Höhe im gleichseitigen Dreieck

Raumdiagonale im Quader und Würfel

Länge der Diagonale im Deckflächen-Rechteck:

$$e^2 = a^2 + b^2, \quad e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

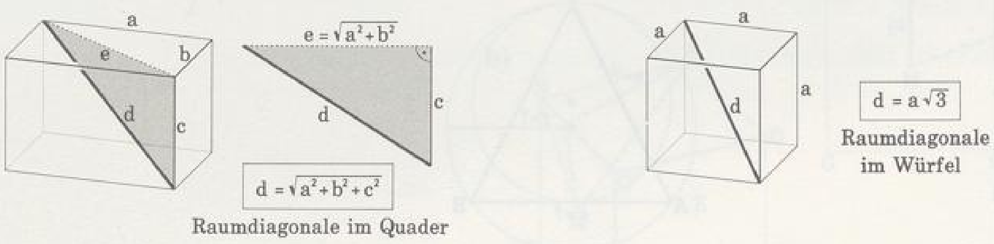
Die Raumdiagonale d ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten e und c:

$$d^2 = e^2 + c^2$$

$$d^2 = \overbrace{a^2 + b^2} + c^2, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Beim Würfel ist a = b = c, also gilt:

$$d^2 = \sqrt{3a^2}, \quad d = a\sqrt{3}.$$



Raumdiagonale im Quader

Raumdiagonale im Würfel