Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

5.2 Wichtige Formeln

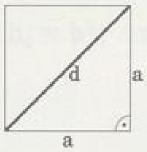
Liefert jedes pythagoräische Tripel ein rechtwinkliges Dreieck, das heißt, ist der Satz von Pythagoras umkehrbar? Schon Euklid hat bewiesen, daß auch die Umkehrung stimmt.

Umkehrung des Satzes von Pythagoras:
Wenn für die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks gilt $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist der Gegenwinkel von c gleich 90°.

Beweis: Nach dem Satz von Pythagoras hat in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b die Hypotenuse die Länge $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Weil es zu drei Seiten a, b und c aber nur ein Dreieck gibt (SSS-Satz), muß das Dreieck bei C rechtwinklig sein.

5.2 Wichtige Formeln

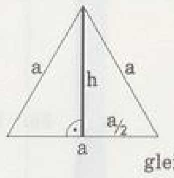
Diagonale im Quadrat und Höhe im gleichseitigen Dreieck



$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$\boxed{d = a\sqrt{2}}$

Diagonale im Quadrat



$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2$

$\boxed{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$

Höhe im gleichseitigen Dreieck

Raumdiagonale im Quader und Würfel

Länge der Diagonale im Deckflächen-Rechteck:

$e^2 = a^2 + b^2, \quad e = \sqrt{a^2 + b^2}$.

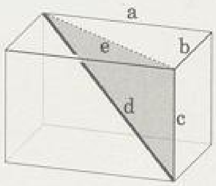
Die Raumdiagonale d ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten e und c:

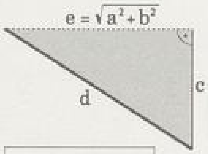
$d^2 = e^2 + c^2$

$d^2 = \overbrace{a^2 + b^2} + c^2, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Beim Würfel ist a = b = c, also gilt:

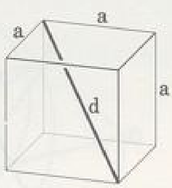
$d^2 = \sqrt{3a^2}, \quad d = a\sqrt{3}$.





$\boxed{d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

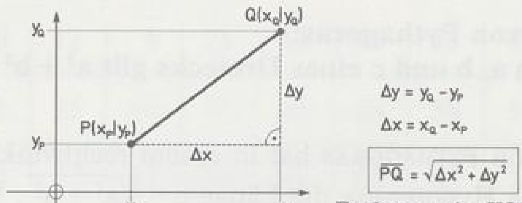
Raumdiagonale im Quader



$\boxed{d = a\sqrt{3}}$

Raumdiagonale im Würfel

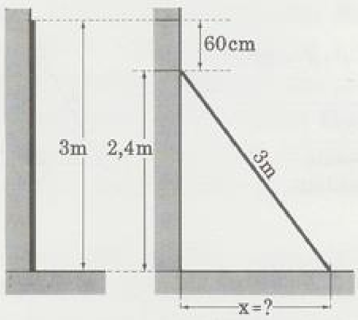
Entfernung zweier Punkte im Koordinatensystem



Entfernung im KOSY

5.3 Berechnungen

In einem etwa 4 000 Jahre alten babylonischen Text steht:
»Ein Palû 0;30 lang. Oben ist er um 0;6 herabgekommen. Von unten?«



In verständlichem Deutsch könnte das bedeuten:
Eine 3 m lange Stange steht senkrecht an einer Mauer. Das untere Stangenende rutscht so weit weg, bis das obere Ende 60 cm tiefer liegt als vorher. Wie weit ist das untere Ende gerutscht?

Lösung: $x = \sqrt{3^2 - 2{,}4^2} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$. Das untere Ende ist 1,8 m gerutscht.

Bei komplizierteren Aufgaben kommt es darauf an, rechtwinklige Dreiecke aufzuspüren, von denen zwei Stücke bekannt sind.
In der nächsten Aufgabe brauchen wir auch den Kathetensatz.