Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

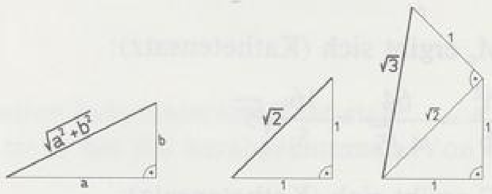
5.4 Konstruktionen

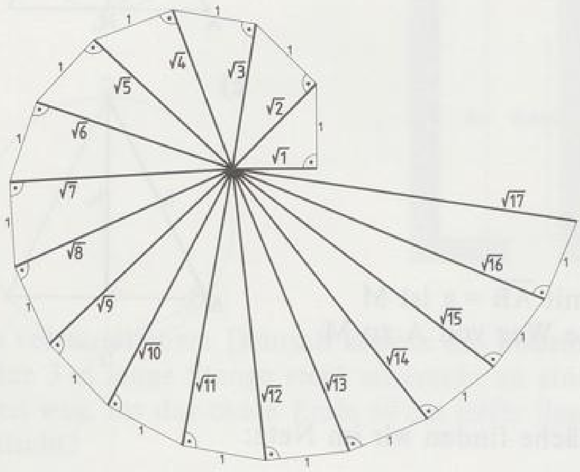
urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

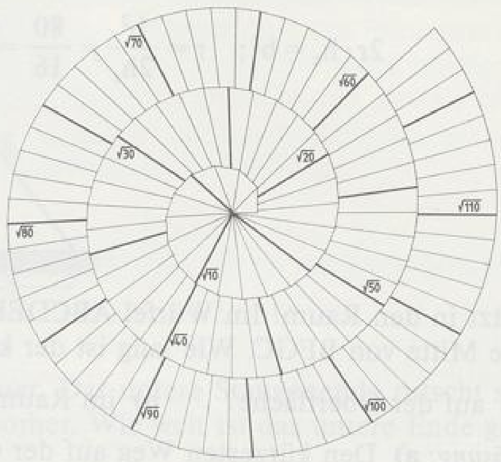
5.4 Konstruktionen

Geometrisches Wurzelziehen

Mit dem Satz von PYTHAGORAS lassen sich schrittweise alle Wurzeln aus natürlichen Zahlen konstruieren. Man beginnt mit einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Kathetenlänge 1. Die Hypotenuse hat dann die Länge $\sqrt{2}$. Sie ist Kathete im nächsten Dreieck, die andre Kathete hat wieder die Länge 1. In diesem Dreieck hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{3}$. Dieses Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen: die Wurzelschnecke entsteht.







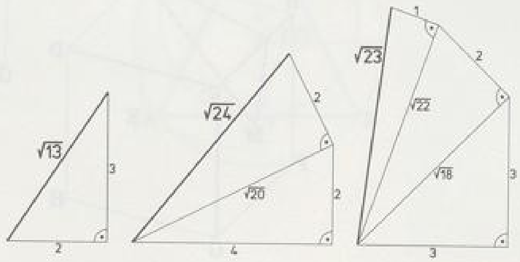
Für einzelne Wurzeln geht's auch schneller: Man zerlegt den Radikanten in eine Summe aus (möglichst wenigen!) Quadratzahlen, zum Beispiel:

$$\sqrt{13} = \sqrt{4+9} = \sqrt{2^2+3^2}$$

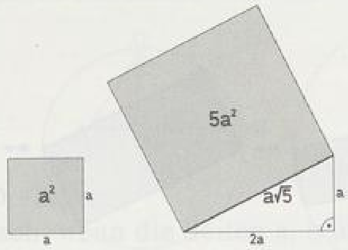
$$\sqrt{24} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{(4^2+2^2)+2^2}$$

$$\sqrt{23} = \sqrt{9+9+4+1} = \sqrt{3^2+3^2+2^2+1^2}$$

Man kann beweisen, daß man nie mehr als vier Summanden braucht!



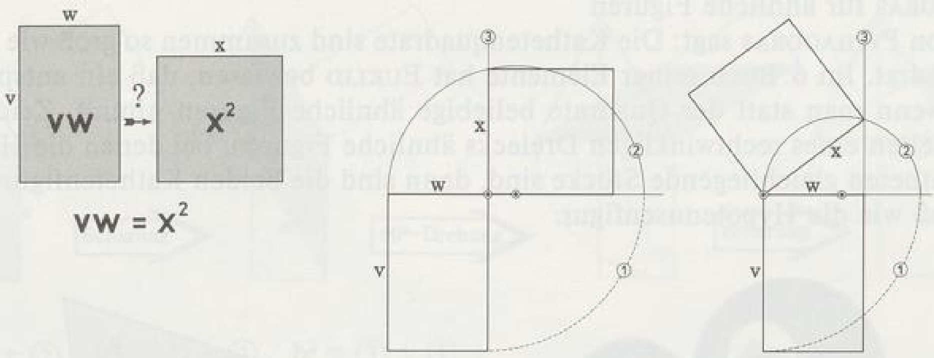
Nimmt man statt der Seitenlänge 1 die Längeneinheit a, dann konstruiert man so a-fache Wurzeln, Beispiel: Konstruktion eines Quadrats, das fünfmal so groß ist wie ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge a.



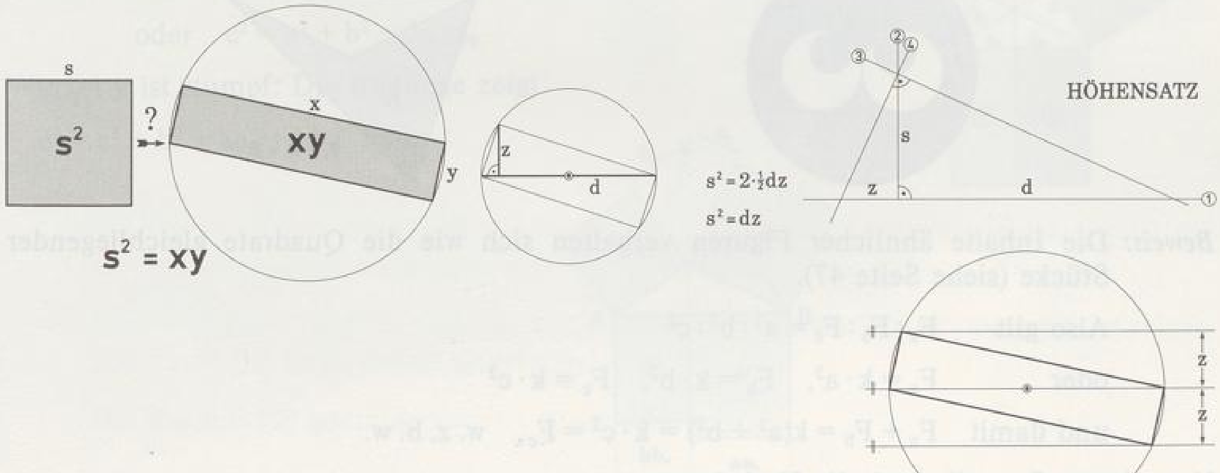
Flächenverwandlung

Schon im Altertum hat man sich mit der Aufgabe beschäftigt, eine Figur in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. Man nennt diese Konstruktion **Quadratur** einer Figur. Zur Quadratur eines Rechtecks verwenden wir den Höhen- oder den Kathetensatz.

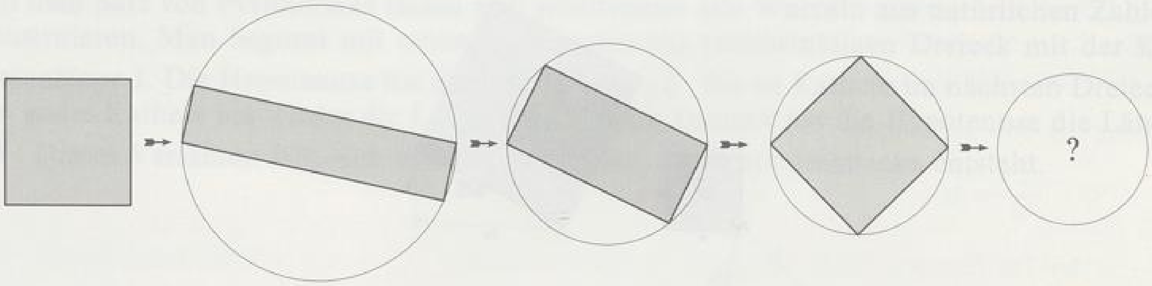
QUADRATUR EINES RECHTECKS HÖHENSATZ KATHETENSATZ



Auch die nächste, etwas schwierigere Aufgabe lösen wir mit dem Höhensatz:



Verwandle ein Quadrat (Seitenlänge s) in ein flächengleiches Rechteck, das einem Kreis (Durchmesser d) einbeschrieben ist. Die Planfigur zeigt, daß wir die Strecke z in einem Rechteck konstruieren müssen, das die Diagonale d hat.

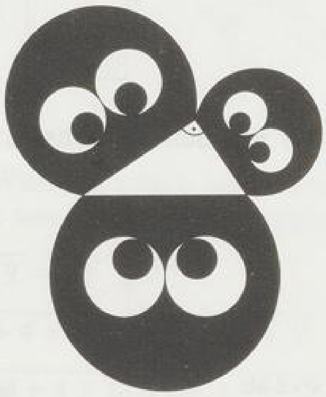


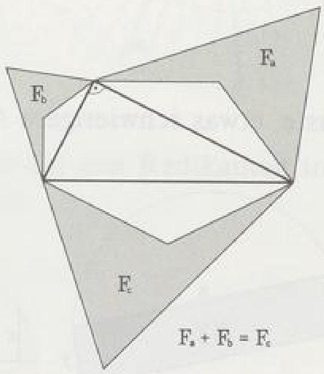
Geht's mit jedem Kreis?

* 5.5 Verallgemeinerungen des Satzes von Pythagoras

a) PYTHAGORAS für ähnliche Figuren

Der Satz von PYTHAGORAS sagt: Die Kathetenquadrate sind zusammen so groß wie das Hypotenusenquadrat. Im 6. Buch seiner Elemente hat EUKLID bewiesen, daß ein entsprechender Satz gilt, wenn man statt der Quadrate beliebige ähnliche Figuren nimmt. Zeichnet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, bei denen die Hypotenuse und die Katheten gleichliegende Stücke sind, dann sind die beiden Kathetenfiguren zusammen so groß wie die Hypotenusenfigur.





Beweis: Die Inhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Stücke (siehe Seite 47).

Also gilt $F_a : F_b : F_c = a^2 : b^2 : c^2$

oder $F_a = k \cdot a^2, \quad F_b = k \cdot b^2, \quad F_c = k \cdot c^2$

und damit $F_a + F_b = k(a^2 + b^2) = k \cdot c^2 = F_c$, w. z. b. w.

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung:
Wenn $F_a + F_b = F_c$ gilt, dann ist auch $ka^2 + kb^2 = kc^2$, das heißt $a^2 + b^2 = c^2$.