Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 1995

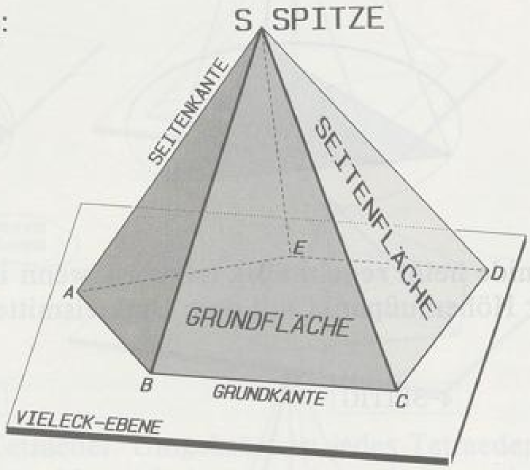
7.1 Grundlagen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

7.1 Grundlagen

Vor rund 4 000 Jahren ließen sich einige Pharaonen im alten Ägypten monumentale Grabstätten bauen. Über einer quadratischen Grundfläche schichtete man behauene Felsquader zu einem Körper, den wir heute Pyramide nennen. In der ägyptischen Sprache bedeutete damals  (vermutliche Aussprache piremus) eine Abmessung der Pyramide, wahrscheinlich eine Kantenlänge. Die Griechen mißverstanden diesen Begriff und verwendeten als Lehnwort »pyramis« zur Bezeichnung des ganzen Körpers.

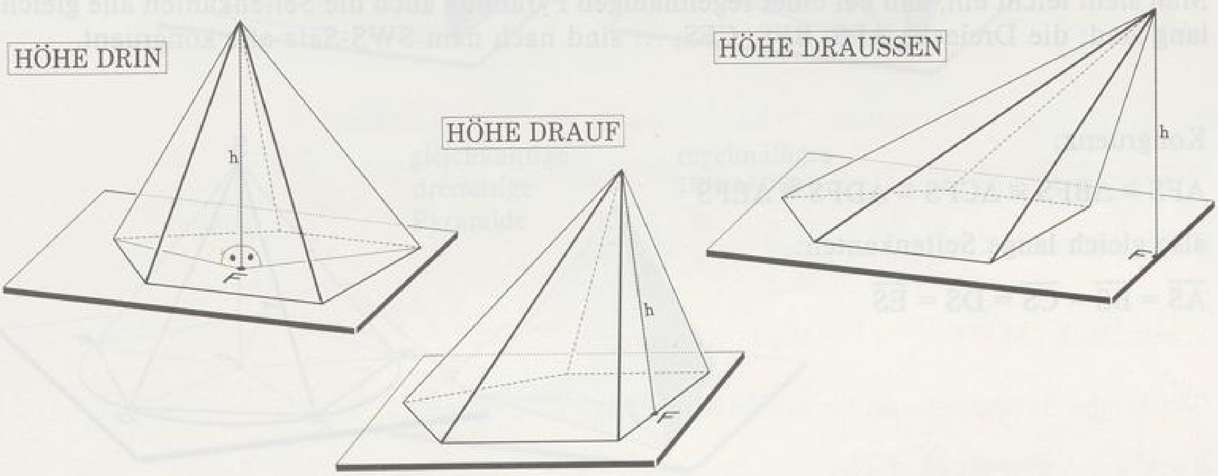
In der Mathematik verallgemeinert man:



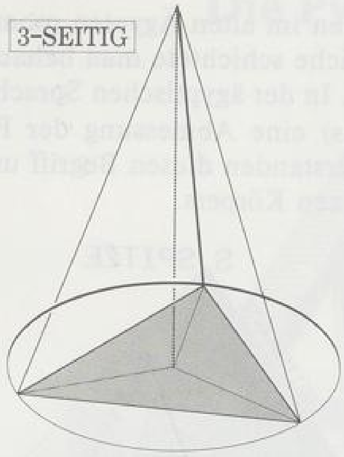
Definition:

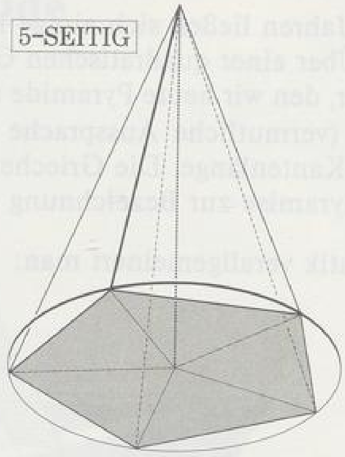
> Verbindet man alle Punkte eines Vielecks mit einem Punkt S, der außerhalb der Vieleckebene liegt, so entsteht der **Mantel** einer Pyramide.
> Die Vieleckfläche heißt **Grundfläche;** zusammen mit der Mantelfläche bildet sie die Pyramide. S heißt Spitze der Pyramide.
> Mantel und Grundfläche bilden zusammen die **Oberfläche** der Pyramide.

Ist die Grundfläche ein n-Eck, so besteht der Mantel aus n Dreiecken (Seitenflächen); die Pyramide heißt dann **n-seitig.**
Das Lot (und auch seine Länge) von der Pyramidenspitze auf die Vieleckebene heißt **Höhe h** der Pyramide; der Lotfußpunkt heißt **Höhenfußpunkt F.**

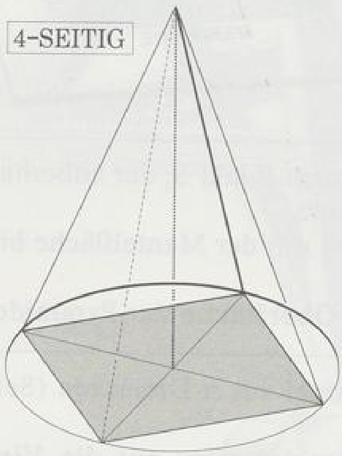


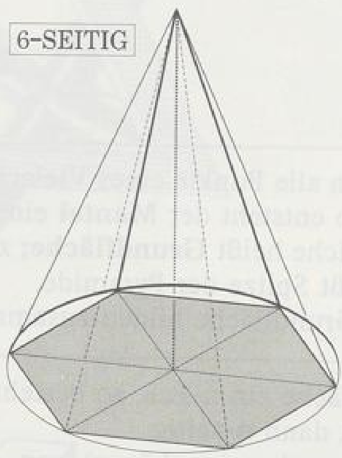
Ein n-Eck heißt **regelmäßig** (regulär), wenn es lauter gleich lange Seiten und einen Umkreis hat.





Eine Pyramide heißt **regelmäßig** (regulär), wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges n-Eck ist und der Höhenfußpunkt mit dem Umkreismittelpunkt der Grundfläche zusammenfällt.





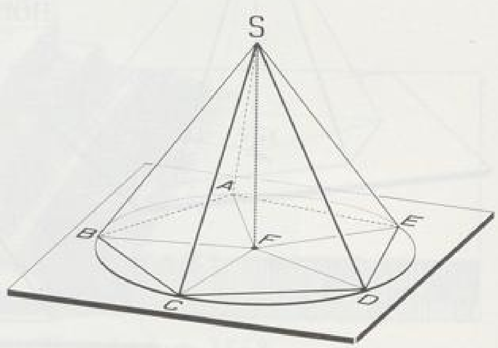
Man sieht leicht ein, daß bei einer regelmäßigen Pyramide auch die Seitenkanten alle gleich lang sind: die Dreiecke AFS, BFS, CFS, ... sind nach dem SWS-Satz alle kongruent.

Kongruenz:

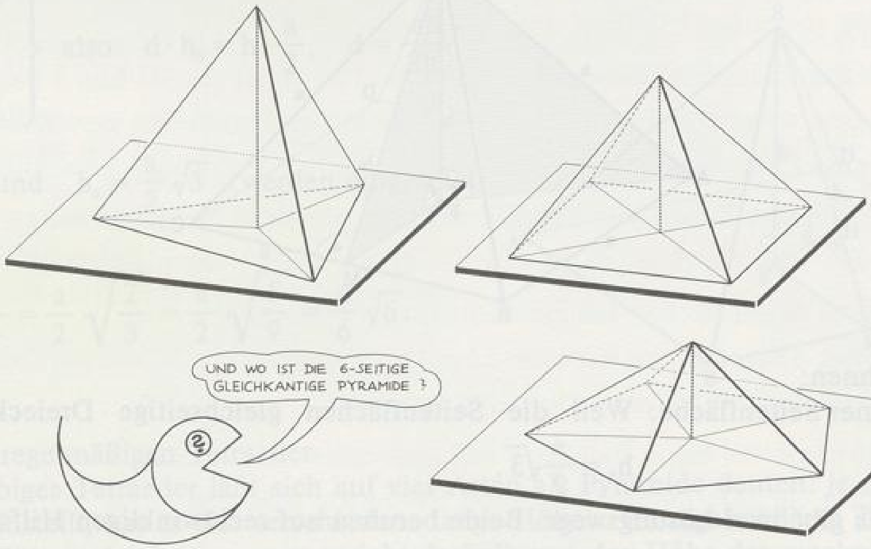
$AFS \cong \Delta BFS \cong \Delta CFS \cong \Delta DFS \cong \Delta EFS$

also gleich lange Seitenkanten:

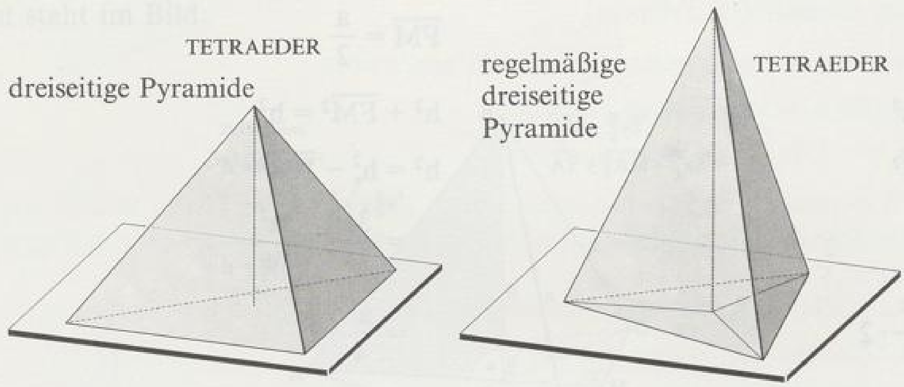
$\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS} = \overline{ES}$

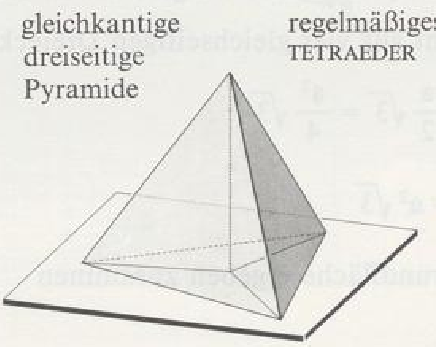


Eine regelmäßige Pyramide mit lauter gleich langen Kanten nennen wir **gleichkantig.** Eine gleichkantige Pyramide hat entweder drei oder vier oder fünf Seitenflächen. Die gleichkantige dreiseitige Pyramide ist etwas ganz Besonderes: bei ihr kann man die Grundfläche nicht mehr von den Seitenflächen unterscheiden; wir nennen sie **regelmäßiges Tetraeder.**



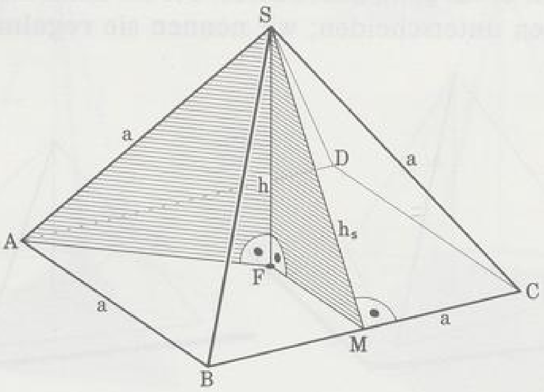
Jede dreiseitige Pyramide ist auch ein Tetraeder. Umgekehrt ist jedes Tetraeder auch eine Pyramide. Die regelmäßige dreiseitige Pyramide muß aber noch lange kein regelmäßiges Tetraeder sein. Erst die gleichkantige dreiseitige Pyramide ist zugleich auch ein regelmäßiges Tetraeder. Obacht: »regelmäßig« bedeutet bei Pyramiden etwas anderes als bei Tetraedern.





In zwei Beispielen machen wir uns mit den neuen Begriffen vertraut.

1. Gegeben ist eine gleichkantige 4seitige Pyramide der Kantenlänge a.



Wir berechnen:

Höhe h_s einer Seitenfläche: Weil die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind, ist

$$h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Höhe h: Es gibt zwei Lösungswege. Beide beruhen auf rechtwinkligen Hilfsdreiecken:

Dreieck AFS

[AF] ist die halbe Diagonale im Grundflächenquadrat:

$$\overline{AF} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$h^2 + \overline{AF}^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \overline{AF}^2$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot 2$$

Dreieck FMS

$$\overline{FM} = \frac{a}{2}$$

$$h^2 + \overline{FM}^2 = h_s^2$$

$$h^2 = h_s^2 - \overline{FM}^2$$

$$= \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot 2$$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, F ist also von allen Pyramidenecken gleich weit entfernt.

Mantel M: Der Mantel besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken.

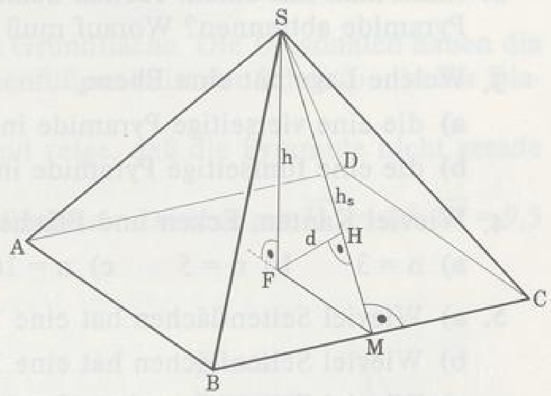
Fläche eines Dreiecks $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

Mantelfläche $M = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$

Oberfläche S: Mantel und Grundfläche ergeben zusammen

$S = a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2(\sqrt{3} + 1).$

Abstand d des Höhenfußpunkts F von einer Seitenfläche:
d = [FH] ist eine Höhe im Dreieck FMS. Wir berechnen den Flächeninhalt A des Dreiecks FMS auf zwei Arten:

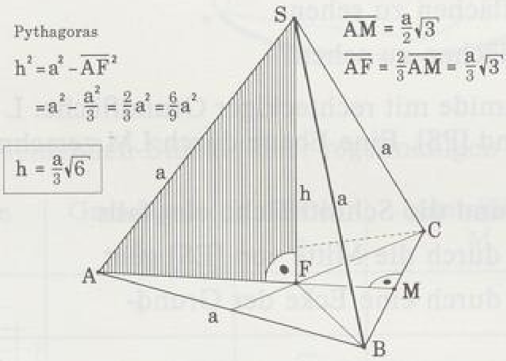


$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\cdot h\cdot\frac{a}{2} \\ A &= \frac{1}{2}\cdot d\cdot h_s \end{aligned}\right\} \quad \text{also} \quad d\cdot h_s = h\cdot\frac{a}{2}, \quad d = \frac{ah}{2h_s}$$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ werden eingesetzt:

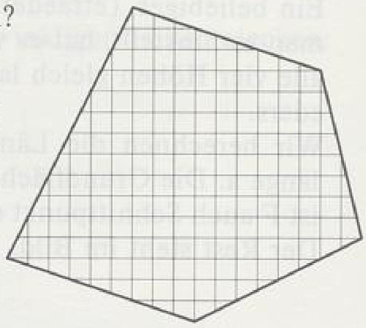
$$d = \frac{a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}}{2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

2. Höhe im regelmäßigen Tetraeder
Ein beliebiges Tetraeder läßt sich auf vier Arten als Pyramide deuten: je nachdem, wie man es hinstellt, hat es vier verschiedene lange Höhen. Im regelmäßigen Tetraeder sind alle vier Höhen gleich lang, man spricht deshalb von **der** Höhe des regelmäßigen Tetraeders.
Wir berechnen die Länge der Höhe eines regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge a. Die Grundfläche ABC ist ein gleichseitiges Dreieck mit F als Mittelpunkt. Also ist F auch Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und teilt deshalb [AM] im Verhältnis 2:1. Der Rest steht im Bild.

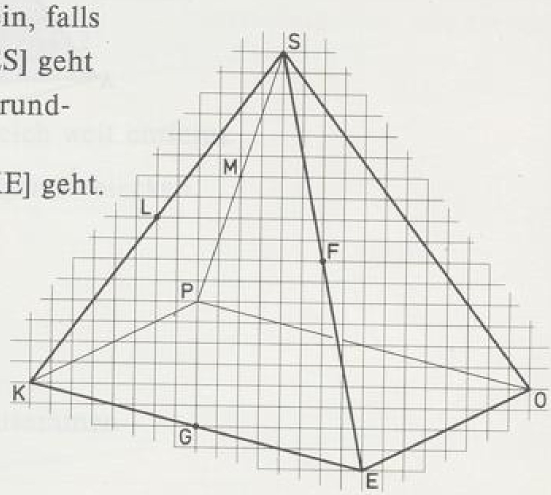


Aufgaben

1. Eine Pyramide ist durch Spitze und Grundfläche festgelegt.
   Welche Körper lassen sich auf verschiedene Arten als Pyramide deuten?
2. Kann man mit einem ebenen Schnitt von jedem Quader eine dreiseitige regelmäßige Pyramide abtrennen? Worauf muß man achten?
3. Welche Lage hat eine Ebene,
   a) die eine vierseitige Pyramide in zwei vierseitige Pyramiden zerschneidet?
   b) die eine fünfseitige Pyramide in zwei vierseitige Pyramiden zerschneidet?
4. Wieviel Kanten, Ecken und Flächen hat eine n-seitige Pyramide, falls
   a) $n = 3$ **b)** $n = 5$ **c)** $n = 16$ **d)** $n = 100$ **e)** n beliebig?
5. **a)** Wieviel Seitenflächen hat eine 16-kantige Pyramide?
   b) Wieviel Seitenflächen hat eine 32-eckige Pyramide?
   c) Wieviel Kanten hat eine 49-eckige Pyramide?
6. **a)** Warum gibt es keine Pyramide mit ungerader Kantenzahl?
   b) Warum hat jede Pyramide so viele Ecken wie Flächen?
7. UMRISS
   Zeichne den Umriß ab und vervollständige ihn zum Bild
   a) einer vierseitigen Pyramide
   b) einer fünfseitigen Pyramide
   c) eines dreiseitigen Prismas.



8. Wie muß man eine n-seitige Pyramide anschauen,
   a) um alle n Seitenflächen zu sehen
   b) um $n - 2$ Seitenflächen zu sehen?
9. KEOPS ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. L und M sind die Mitten der Seitenkanten [KS] und [PS]. Eine Ebene durch LM zerschneidet die Pyramide in zwei Teilkörper.
   Zeichne KEOPS ab und die Schnittfläche ein, falls
   a) die Schnittebene durch die Mitte von [ES] geht
   b) die Schnittebene durch eine Ecke der Grundfläche geht
   c) die Schnittebene durch die Mitte von [KE] geht.



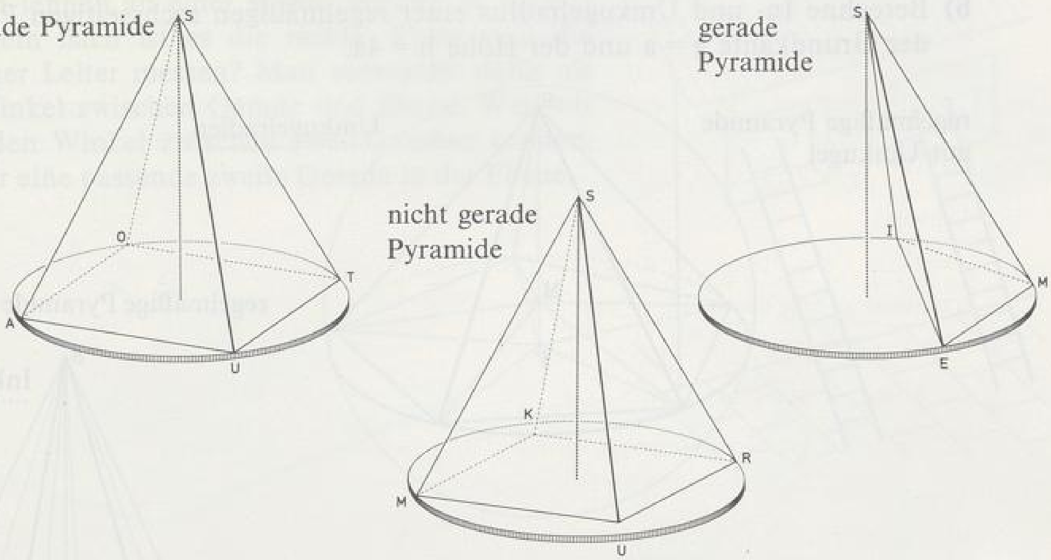
•10. »GERADE« PYRAMIDEN

Unter einer geraden Pyramide versteht man eine Pyramide mit lauter gleich langen Seitenkanten.

a) Begründe: Der Höhenfußpunkt F einer geraden Pyramide ist der Umkreismittelpunkt der Grundfläche.

b) Die Pyramide MURKS hat eine Raute als Grundfläche. Die Diagonalen haben die Längen 8 und 10, die Höhe ist 9. Der Höhenfußpunkt ist der Schnittpunkt der Diagonalen.
Berechne die Längen der Seitenkanten und zeige, daß die Pyramide nicht gerade ist, obwohl sie gerade aussieht.

c) Die gerade Pyramide MIES hat als Grundfläche ein Dreieck mit $\overline{IM} = 4{,}5$, $\overline{EI} = 9{,}5$ und $\overline{EM} = 7{,}3$.
Warum sieht MIES nicht gerade aus?



11. Berechne jeweils die fehlenden Stücke einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide:

	Seitenkante s	Grundkante g	Höhe h	Mantelfläche M
a)	3	4		
b)	$2\sqrt{5}$		$\sqrt{2}$	
c)		2	$\sqrt{62}$	
d)		2		12
•e)			$\sqrt{7}$	$2\sqrt{15}$
•f)	3			$12\sqrt{2}$

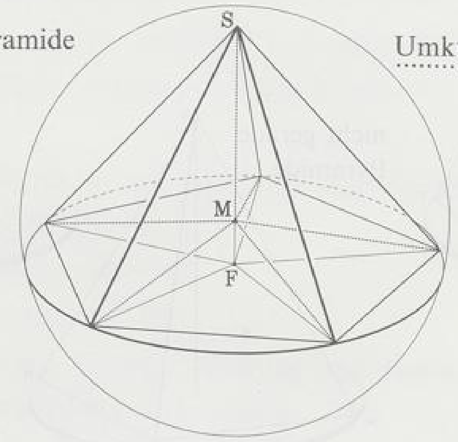
12. Berechne jeweils die fehlenden Stücke einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide:

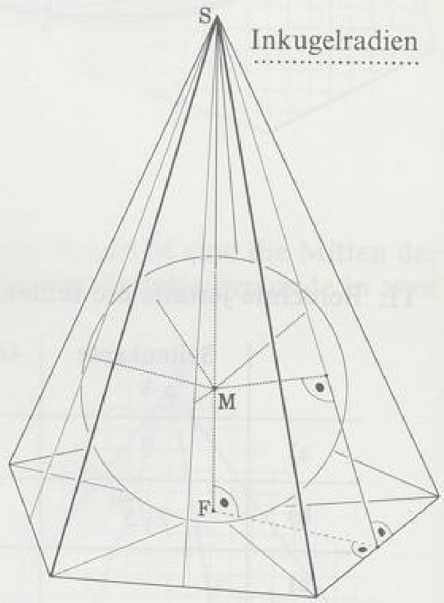
	s	g	h	M
a)	10	6		
b)		3,6	4,8	
c)		5		240

•13. Die Kugel, die durch alle Ecken einer Pyramide geht, heißt **Umkugel.** Die Kugel, die alle Flächen berührt, heißt **Inkugel.**

a) Berechne In- und Umkugelradius einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit der Grundkante $g = 5$ und der Höhe $h = 10$.

b) Berechne In- und Umkugelradius einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit der Grundkante $g = a$ und der Höhe $h = 4a$.





14. Zwei kongruente gleichkantige vierseitige Pyramiden (Kantenlänge 5) werden so zusammengesetzt, daß sich ihre Grundflächen decken.

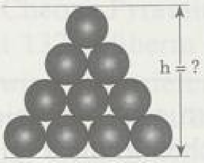
a) Zeichne den Körper.

b) Berechne seine Oberfläche.

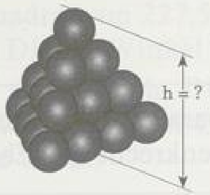
c) Berechne die Entfernung der beiden Pyramidenspitzen.

15. Gegeben: Kugelradius r

a)

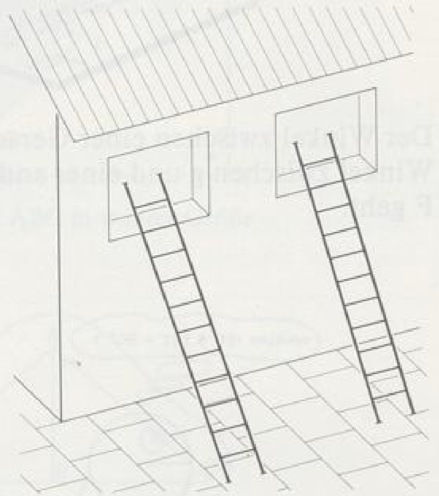


b)



7.2 Winkel im Raum

Zwei Leitern lehnen an einer Wand. Welche ist steiler? Dem Anschein nach ist es die rechte. Kann man die Steilheit einer Leiter messen? Man verwendet dafür als Maß den Winkel zwischen Gerade und Ebene. Weil wir bisher nur den Winkel zwischen zwei Geraden kennen, brauchen wir eine passende zweite Gerade in der Ebene.



Definition:

> Der Winkel φ zwischen einer Gerade g und einer Ebene F ist der Winkel zwischen der Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g′ in der Ebene. Symbolisch $\varphi = \sphericalangle(g, F)$