Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

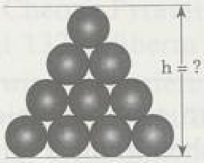
München, 1995

7.2 Winkel im Raum

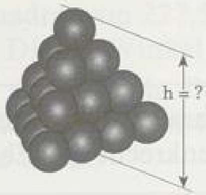
urn:nbn:de:hbz:466:1-83924

15. Gegeben: Kugelradius r

a)

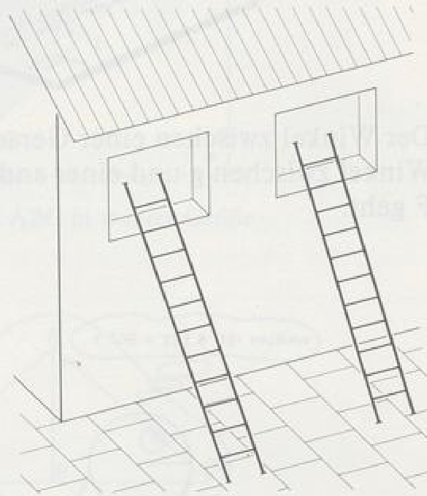


b)



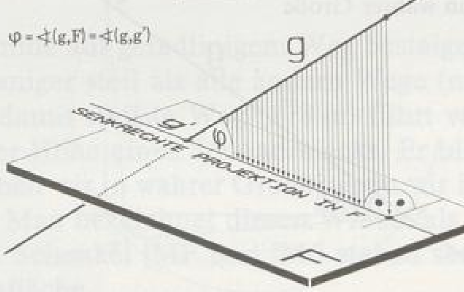
7.2 Winkel im Raum

Zwei Leitern lehnen an einer Wand. Welche ist steiler? Dem Anschein nach ist es die rechte. Kann man die Steilheit einer Leiter messen? Man verwendet dafür als Maß den Winkel zwischen Gerade und Ebene. Weil wir bisher nur den Winkel zwischen zwei Geraden kennen, brauchen wir eine passende zweite Gerade in der Ebene.



Definition:

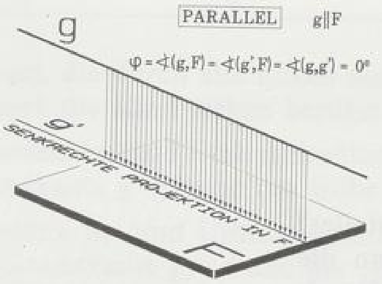
Der Winkel φ zwischen einer Gerade g und einer Ebene F ist der Winkel zwischen der Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g′ in der Ebene. Symbolisch $\varphi = \sphericalangle(g, F)$

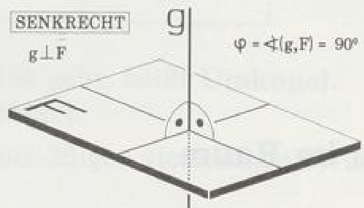


Zwei Sonderfälle müssen eigens definiert werden:

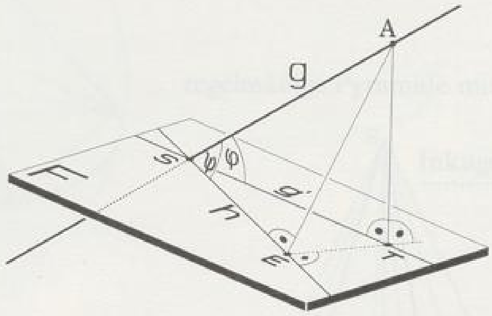
Definition:

Ist die Gerade g parallel zur Ebene F, so ist der Winkel zwischen g und F gleich 0°. Ist die Gerade g senkrecht zur Ebene F, so ist der Winkel zwischen g und F gleich 90°.



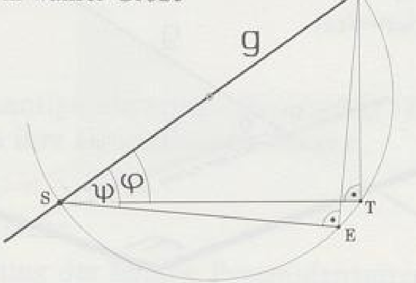


Der Winkel zwischen einer Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g′ ist kleiner als jeder Winkel zwischen g und einer andern Gerade h in F, die durch den Schnittpunkt S von g und F geht.

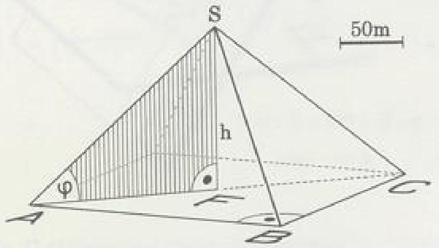


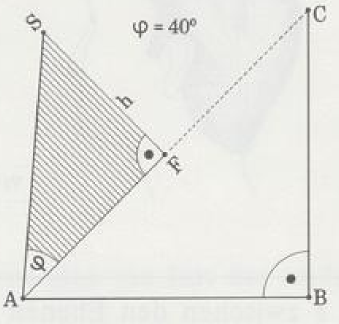
Beweis: Fällt man von A das Lot auf h (Lotfußpunkt E) und zeichnet die rechtwinkligen Dreiecke AST und ASE in wahrer Größe wieder mit der gemeinsamen Hypotenuse [AS], dann liegen E und T auf dem Thaleskreis über [AS].
[AE] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ETA und deshalb länger als die Kathete [AT]. Also ist auch der Winkel ψ größer als der Winkel φ.

Dreiecke AST und ASE
in wahrer Größe

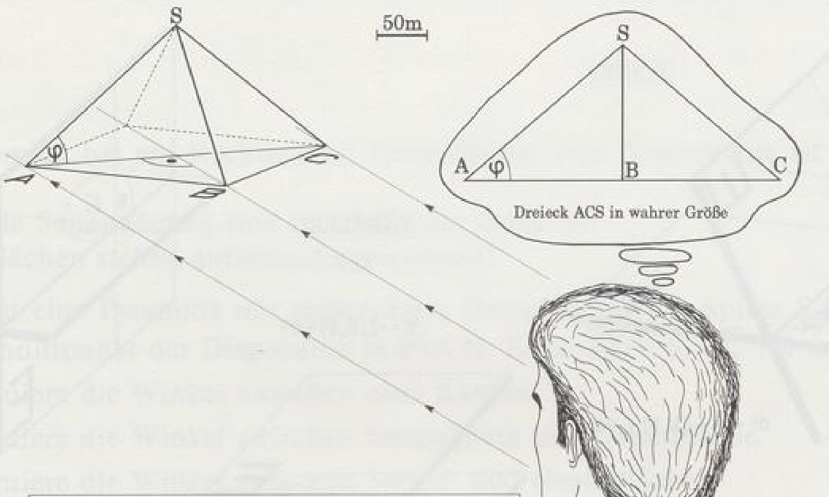


In einem Beispiel konstruieren wir den Winkel zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche der Cheops-Pyramide. Die Grundfläche ist ein Quadrat von 227,5 m Seitenlänge. Die Spitze liegt 137 m überm Schnittpunkt der Diagonalen. Diesen Winkel finden wir im Dreieck AFS; wir konstruieren es aus $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\sphericalangle F = 90°$ und $\overline{SF} = h$. Die Zeichnung ergibt 40°, ein genauerer Wert ist 40,4°. Man sieht diesen Winkel in wahrer Größe, wenn man in Richtung der Grundflächen-Diagonale auf die Pyramide blickt.



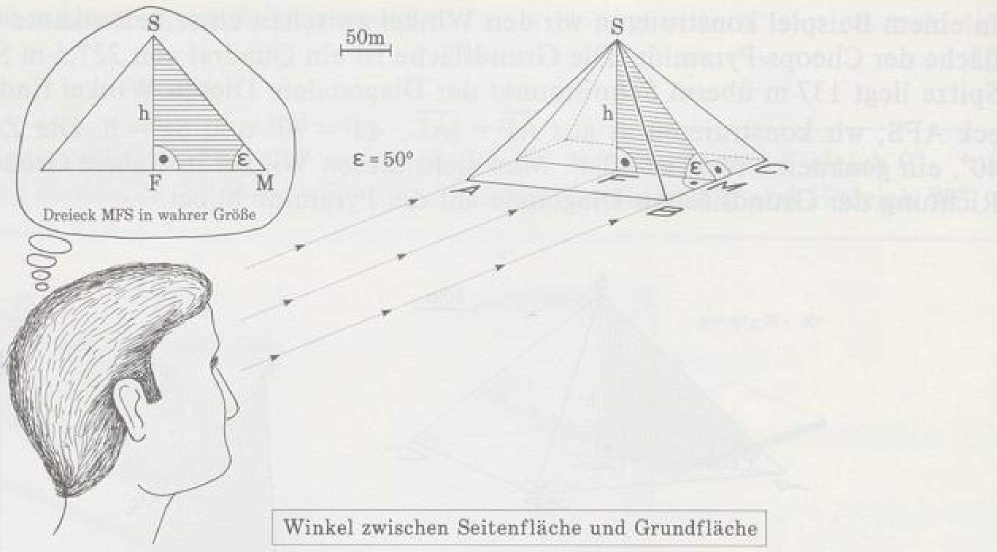


Dreieck ABC in wahrer Größe



Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche

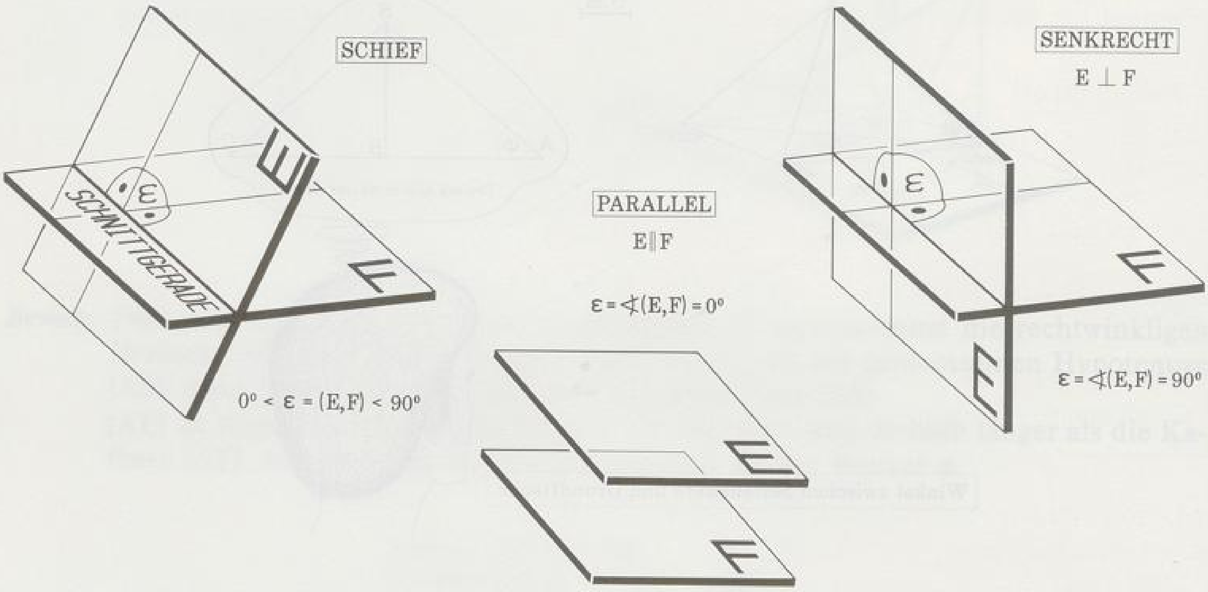
Will man die Cheops-Pyramide auf geradlinigem Weg besteigen, dann ist der Weg auf einer Kante länger und damit weniger steil als alle andern Wege (nach der Konstruktion mißt er 211 m). Der kürzeste und damit steilste Weg (178 m) führt von der Mitte M einer Grundkante zur Spitze S längs der Höhe eines Seitendreiecks. Er bildet mit der Grundfläche den Winkel ε. Den Winkel ε sehen wir in wahrer Größe, wenn wir in Richtung einer Grundkante auf die Pyramide schauen. Man bezeichnet diesen Winkel als Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche. Seine beiden Schenkel [MF und [MS stehen senkrecht auf der Schnittgerade BC von Grund- und Seitenfläche.



Winkel zwischen Seitenfläche und Grundfläche

Definition:

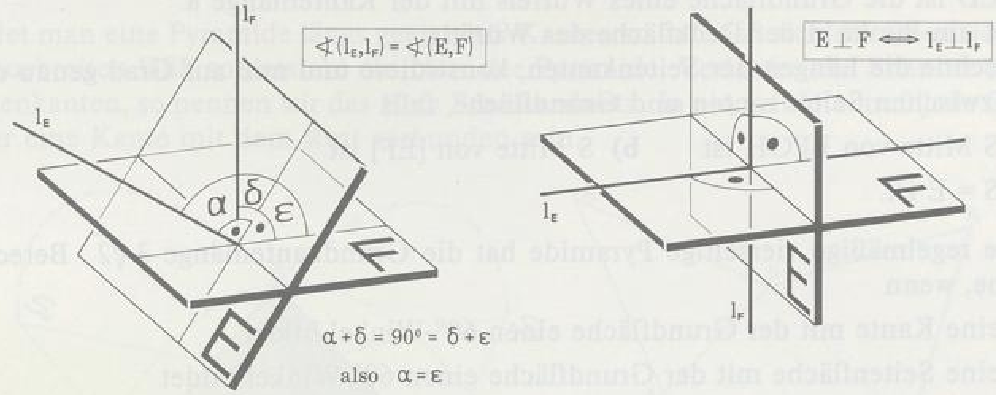
> Der Winkel ε zwischen den Ebenen E und F ist der Winkel zwischen zwei Loten der Schnittgerade; ein Lot liegt in E, das andere in F. Symbolisch $\varepsilon = \sphericalangle\,(E, F)$
> Sind die Ebenen parallel, so ist der Winkel 0°.



Konstruieren wir den Winkel ε zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Cheops-Pyramide, so ergibt sich $\varepsilon = 50°$.
Aus der Definition für den Winkel zwischen zwei Ebenen folgt der

Satz:
Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist genauso groß wie der Winkel zwischen zwei Loten der Ebenen.

Der Beweis steht im Bild.



Eine wichtige Folgerung daraus ist der

Satz:
Zwei Ebenen stehen aufeinander senkrecht, wenn eine ein Lot der andern enthält.

Aufgaben

1. Eine Pyramide hat ein Rechteck als Grundfläche, eine Seitenkante ist zugleich auch Höhe.
Zeige: Alle Seitenflächen sind rechtwinklige Dreiecke.
Welche Flächen stehen aufeinander senkrecht?

•2. FUCHS ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche; die Spitze S liegt senkrecht überm Schnittpunkt der Diagonalen in FUCH. Es ist $\overline{FU} = 6$, $\overline{UC} = 8$ und $h = 12$.

a) Konstruiere die Winkel zwischen zwei Kanten.

b) Konstruiere die Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche.

c) Konstruiere die Winkel zwischen Seiten- und Grundfläche.

•3. Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen einer Seitenkante und der Grundfläche

a) bei einer gleichkantigen dreiseitigen Pyramide

b) bei einer gleichkantigen vierseitigen Pyramide

c) bei einer gleichkantigen fünfseitigen Pyramide.

•4. Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen zwei Seitenflächen einer gleichkantigen

a) dreiseitigen Pyramide **b)** vierseitigen Pyramide

c) fünfseitigen Pyramide.

•**5.** ABCDS ist eine vierseitige Pyramide mit der Spitze S.
ABCD ist die Grundfläche eines Würfels mit der Kantenlänge a.
S ist ein Punkt in der Deckfläche des Würfels.
Berechne die Längen der Seitenkanten, konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen Seitenkanten und Grundfläche, falls

a) S Mitte von EFGH ist **b)** S Mitte von [EF] ist

c) S = E ist.

•**6.** Eine regelmäßige vierseitige Pyramide hat die Grundkantenlänge $3\sqrt{2}$. Berechne die Höhe, wenn

a) eine Kante mit der Grundfläche einen 60°-Winkel bildet

b) eine Seitenfläche mit der Grundfläche einen 60°-Winkel bildet

c) zwei benachbarte Seitenkanten einen 60°-Winkel bilden

d) zwei gegenüberliegende Seitenkanten einen 60°-Winkel bilden

e) eine Seitenkante und eine Grundkante einen 60°-Winkel bilden

f) eine Seitenkante und eine Diagonale der Grundfläche einen 60°-Winkel bilden.

•**7.** In der regelmäßigen Pyramide MOPS mit der Höhe 8 hat eine Grundkante die Länge 6.

a) Berechne die Oberfläche S.

b) Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche.

c) Konstruiere und miß auf Grad genau den Winkel zwischen zwei Seitenflächen.

•**8.** ABCDEFGH ist ein Würfel mit der Kantenlänge 10. In ihm schneiden sich zwei Eckflächen, es entsteht die Pyramide ELFI.

a) Berechne die Kantenlängen von ELFI.

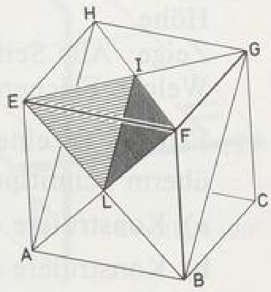
b) Konstruiere den Abstand von LI und der Mitte M von [EF].

Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen

c) den Kanten

d) Kanten und Flächen

e) den Flächen.



•**9.** ABCDEFGH ist ein Würfel mit der Kantenlänge 11. In ihm schneiden sich zwei Diagonalflächen, es entsteht eine Pyramide mit den Ecken B, E, F, G und H.

a) Beschreibe die Pyramide.

Konstruiere und miß auf Grad genau die Winkel zwischen

b) Seiten- und Grundkanten

c) Seiten- und Grundfläche

d) den Seitenflächen.